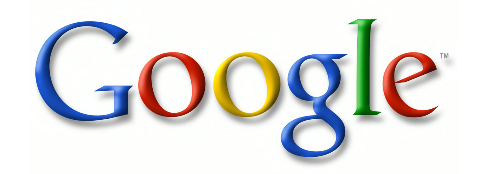
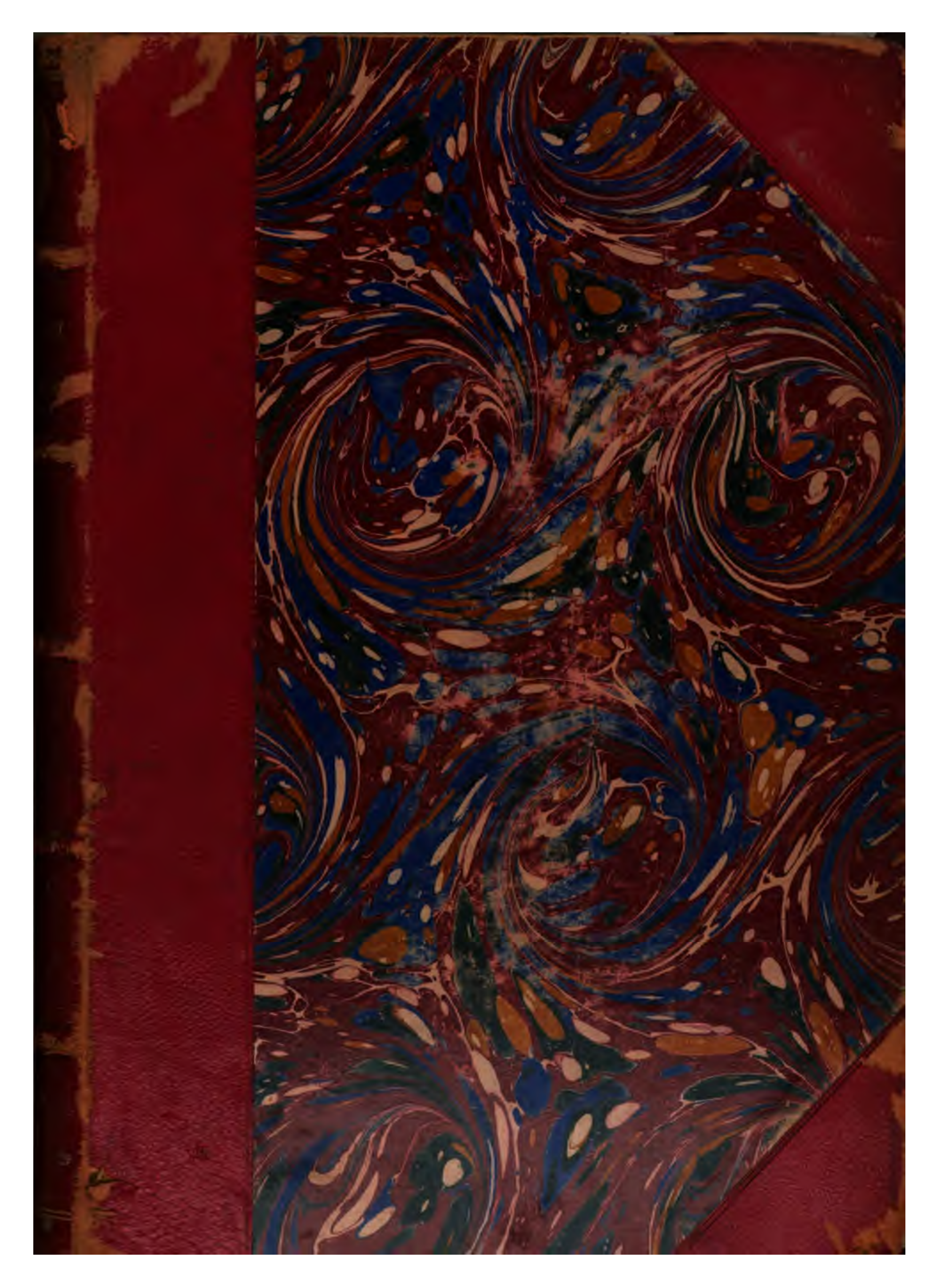
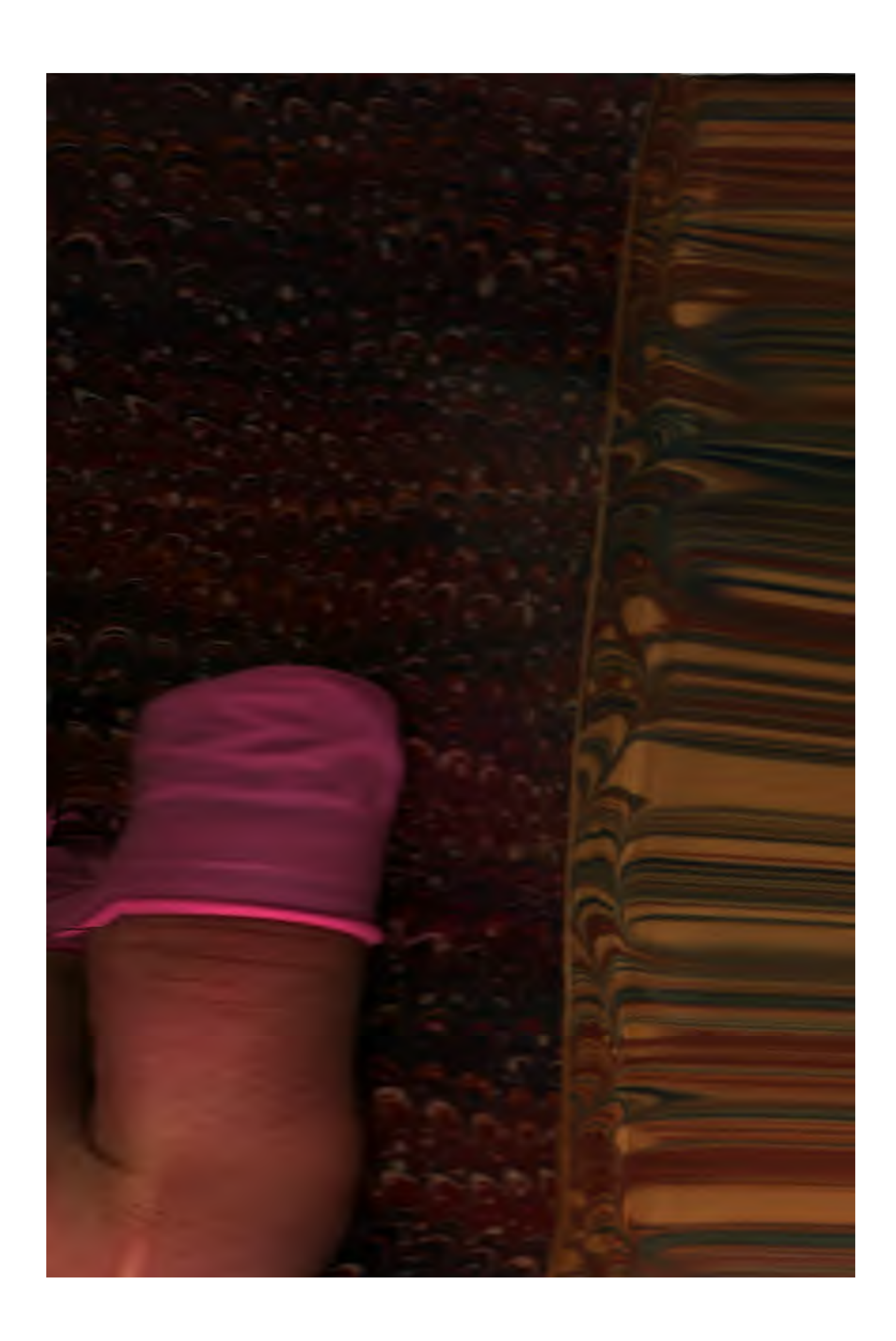
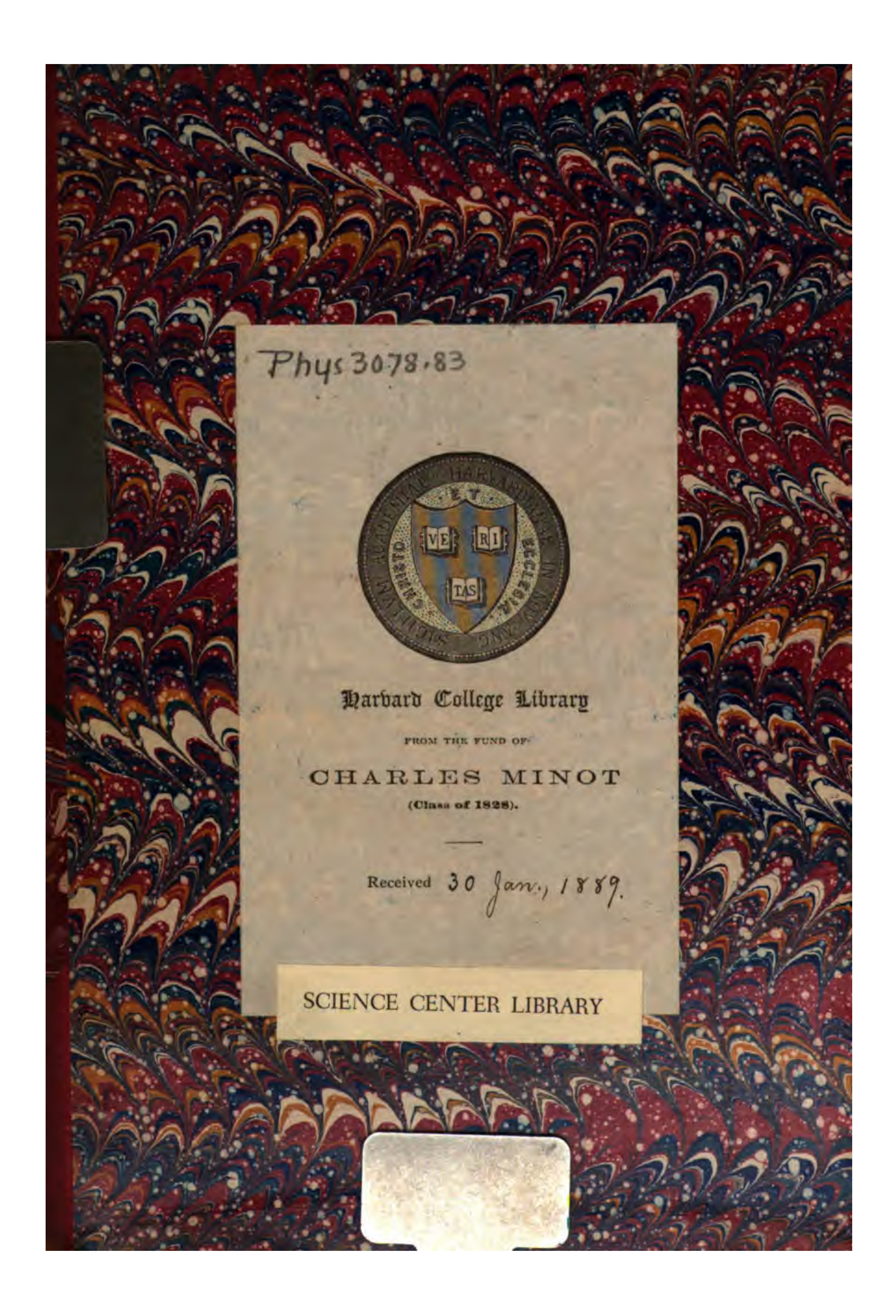







Phys 3078.83
VE RI TAS
Harvard College Libra
FROM THE FUND OF
CHARLES MIN
(Class of 1828).
30 Jan.
SCIEN
TER L




Phys 3078.83
VE
RI
TAS
Harvard College Library
FROM THE FUND OF
CHARLES MINOT
(Class of 1828).
Received 30 Jan., 1889.
SCIENCE CENTER LIBRARY



Lehrbuch

der

Electricität und des Magnetismus

von

James Clerk Maxwell, M. A.

Autorisirte deutsche Uebersetzung

von

Dr. B. Weinstein.

In zwei Bänden.

Zweiter Band.

Mit zahlreichen Holzschnitten und 7 Tafeln.



BERLIN.

Verlag von Julius Springer.

1883.

Druck von Eduard Krause in Berlin.

Bei der hohen Bedeutung, die der zweite Band des Maxwell-schen Werkes für die theoretische wie für die experimentale Physik besitzt, schien eine eingehende Gliederung des Stoffes und sorgfältige Revision aller analytischen Rechnungen unumgänglich. Durch diese Revision dürften auch die wenigen im Originale durch Versehen stehen gebliebenen Fehler beseitigt sein.

Die deutsche Ausgabe des zweiten Bandes überschreitet das Original an Umfang um nahezu 11 Bogen, was vorzugsweise darin seinen Grund hat, dass an denjenigen Stellen des Werkes, wo dies zur Erleichterung des Verständnisses wünschenswert schien, die im Original weggelassenen Zwischenrechnungen nachgetragen worden sind. Ich wollte dem Leser die Controle der Maxwellschen Formeln erleichtern und bei eventueller Weiterführung der Rechnungen mühsame Vorarbeiten ersparen. Das Namen- und Sachregister ist einer vollständigen Umarbeitung unterzogen worden.

Berlin, im Juni 1883.

Weinstein.

Inhalt.

Dritter Teil. — Magnetismus.

Cap. I.

Elementare Theorie des Magnetismus.

Cap. II.

Magnetische Kraft und Magnetische Induction.

Cap. III.

Magnetische Solenoide und Magnetische Schalen.

Cap. IV.

Inducirte Magnetisirung.

Cap. V.

Behandlung specieller Probleme der magnetischen Induction.

Cap. VI.

Webers Theorie der Magnetischen Induction.

Cap. VII.

Magnetische Messungen.

Cap. VIII.

Der Erdmagnetismus.

Vierter Teil. — Electromagnetismus.

Cap. I.

Electromagnetische Kraft.

Cap. II.

Ampères Theorie der Wirkung electrischer Ströme auf einander.

Cap. III.

Induction der electrischen Ströme.

Cap. IV.

Induction eines Stromes auf sich selbst.

Cap. V.

Bewegungsgleichungen eines Systems mit einander verbundener Agentien.

Cap. VI.

Dynamische Theorie des Electromagnetismus.

Cap. VII.

Theorie der linearen electrischen Ströme.

Cap. VIII.

Untersuchung eines electromagnetischen Feldes durch seine Wirkungen auf eine Strombahn.

Cap. IX.

Allgemeine Gleichungen des electromagnetischen Feldes.

Cap. X.

Electrische Einheiten und ihre Dimensionen.

Cap. XI.

Energie und Zwang in einem electromagnetischen Felde.

Cap. XII.

Platte Körper (Schalen) im electromagnetischen Felde.

Cap. XIII.

Parallele Ströme.

Cap. XIV.

Kreisströme.

Cap. XV.

Electromagnetische Instrumente.

Cap. XVI.

Electromagnetische Beobachtungen.

Cap. XVII.

Vergleichung von Rollen.

Cap. XVIII.

Electromagnetische Widerstandseinheit.

Cap. XIX.

Vergleichung der electrostatischen mit den electromagnetischen Einheiten.

Cap. XX.

Electromagnetische Theorie des Lichtes.

Cap. XXI.

Wirkung des Magnetismus auf das Licht.

Cap. XXII.

Erklärung des Ferromagnetismus und des Diamagnetismus durch moleculare Ströme.

Cap. XXIII.

Theorieen einer Wirkung in der Ferne.

DRITTER TEIL.

Magnetismus.

Cap. I.

Elementare Theorie des Magnetismus.

Magnetische Axe.

371. Gewisse Körper, zu denen der Magneteisenstein, die Erde als solche, und Stahl, wenn man ihn besondern Operationen unterwirft, gehören, besitzen die im Folgenden zu beschreibenden Eigenschaften und werden als *Magnete* bezeichnet.

Hängt man in der Nähe der Erdoberfläche, jedoch nicht in der ihrer magnetischen Pole, einen Magnet so auf, dass er ohne Zwang um eine Verticalaxe sich zu drehen vermag, so begiebt er sich im allgemeinen von selbst in ein bestimmtes Azimut. Entfernt man ihn aus seiner angenommenen Lage, so kehrt er in dieselbe zurück und oscillirt um sie. Unmagnetische Körper besitzen eine solche Tendenz nicht, sie bleiben in jedem ihnen verliehenen Azimut im Gleichgewicht.

372. Eine nähere Untersuchung hat ergeben, dass die auf den aufgehängten Magnet wirkende Kraft in ihm eine gewisse Richtung, die man als *Magnetische Axe* des betreffenden Magnets bezeichnet, hervorzubringen strebt, und dass sie ferner diese Axe einer bestimmten Richtung im Raume, der *Directionslinie der magnetischen Kraft* parallel zu stellen sucht.

Wir geben dem Magnete noch mehr Bewegungsfreiheit, indem wir ihn auf eine Spitze legen und ihm so sich um einen Punkt beliebig zu drehen gestatten. Um den Einfluss der Schwere zu eliminiren, verlegen wir diesen Punkt in den Schwerpunkt des Magnets. Wir merken uns die Lage desselben, wenn er sich in Ruhe befindet, nehmen ihn von der Spitze herab und legen ihn in irgend einer andern Stellung mit seinem Schwerpunkte wieder auf die Spitze auf. Aus der Theorie der Bewegung fester Körper von unveränderlicher Form folgt dann, dass sich stets eine Linie angeben lässt, die so gelegen ist, dass eine einfache Rotation um dieselbe den Körper genau in die Lage bringt, die er nach der tatsächlich ausgeführten Bewegung einnimmt, dass also eine Linie existirt, die trotz der Umlegung des

Körpers und seiner eventuellen Bewegung um die Spitze ihre Richtung im Raume nicht ändert. Da nun die magnetische Axe des Körpers dadurch definirt ist, dass sie, wie der Körper auch auf der Spitze aufgelegt ist, stets der magnetischen Directionslinie parallel bleiben, also in ihrer Richtung durch die Umlegung des Körpers nicht afficirt werden soll, so folgt, dass in der Tat jeder magnetische Körper eine magnetische Axe besitzen muss.

Zur Construction dieser Axe merkt man sich bei zwei auf dem Magnete gelegenen Punkten, wie sie im Raume situirt sind, wenn der Magnet einmal in einer und dann in einer andern Stellung sich auf der Spitze im Gleichgewicht befindet, zieht für jeden der beiden Punkte von seiner ersten zu seiner zweiten Position eine Linie und legt zwei Ebenen, welche die bezeichneten Verbindungslinien rechtwinklig treffen und halbiren.

Die Schnittlinie der beiden letztgenannten Ebenen verläuft dann parallel der magnetischen Axe des Körpers und natürlich auch der magnetischen Directionslinie der äussern magnetischen Kraft. Praktischen Wert hat diese Constructionsmethode nicht, doch komme ich noch bei der Auseinandersetzung über magnetische Messungen darauf zurück.

Declination, Inclination und Intensität.

Man hat gefunden, dass die magnetische Kraft der Erde an verschiedenen Stellen derselben nach verschiedenen Richtungen wirkt.

So entfernt sich das nach dem Norden zeigende Ende eines Magnets im allgemeinen beträchtlich aus dem Meridian des Ortes, ferner ist es in der nördlichen Halbkugel nach unten, in der südlichen nach oben gerichtet.

Das Azimut der erdmagnetischen Directionslinie heisst die *Magnetische Declination* (in England auch *Variation*) an dem betreffenden Orte und wird vom wahren Norden nach Westen als positiv gerechnet.

Der Winkel, den die erdmagnetische Directionslinie mit der Horizontalebene bildet, heisst die *Magnetische Inclination* (in England *Dip*) an dem betreffenden Ort.

Die genannten beiden Winkel bestimmen völlig die Richtung, nach der die magnetische Kraft der Erde an dem betreffenden Orte wirkt, kennt man auch noch die *Intensität* ihrer Wirkung, so ist nichts mehr hinsichtlich der erdmagnetischen Kraft zweifelhaft. Die Methoden zur Bestimmung der Werte dieser drei Elemente an den verschiedenen Stellen der Erde gehören mit der Auseinandersetzung der Art und Weise, wie sie nach dem Standpunkt des Beobachters und nach der Zeit der Beobachtung variiren, und mit der Untersuchung über den letzten Grund der erdmagnetischen Kraft und ihrer Variation in die Lehre vom *Erdmagnetismus*.

373. Ich setze jetzt voraus, dass wir uns in dem Besitze einer Anzahl Magnete befinden, deren Axenrichtungen uns völlig bekannt sind.

Wir versehen bei allen Magneten den Teil, welcher nach Norden zeigt, mit einer Marke und hängen einen derselben so auf, dass er sich frei bewegen kann.

Nähert man dem markirten Teile des aufgehängten Magnets den markirten Teil eines der andern Magnete, so wird er von diesem fortgestossen, nähert man ihm den unmarkirten Teil, so wird er angezogen. Ebenso findet man, dass die nichtmarkirten Teile zweier Magnete sich abstossen, und dass ein markirter Teil einen nichtmarkirten anzieht.

Magnetische Pole.

Bei Magneten, welche aus langen, gleichmässig und nach ihrer Längsrichtung magnetisirten Stäben oder Drähten bestehen, zeigt sich die grösste Kraftwirkung, wenn man ihre Enden einander nähert. Entsprechende Enden stossen einander ab, nichtentsprechende Enden ziehen einander an, während die mittlern Teile der Magnete sich gegenseitig so gut wie gar nicht afficiren.

Man nennt die Enden eines langen dünnen Magnets gewöhnlich seine *Pole*.

Kraftgesetz für magnetische Pole.

Im Grenzfall eines unendlich dünnen, seiner Länge nach gleichmässig magnetisirten Körpers, wirken in der Tat die beiden Endpunkte wie Kraftcentra, alles andere scheint magnetisch gänzlich unwirksam zu sein. Bei den wirklichen Magneten vermag man keine vollständige Gleichmässigkeit in der Magnetisirung ihrer einzelnen Teile zu erreichen, demnach kann auch kein Punkt derselben als Pol angesehen werden. Doch ist es Coulomb*), indem er lange, dünne und mit grosser Sorgfalt magnetisirte Stäbe verwendete, gelungen, das nachfolgende Gesetz für die Kraftwirkung zwischen zwei magnetischen Polen aufzustellen.

Zwei magnetische Pole stossen einander in Richtung ihrer Verbindungslinie und mit einer Kraft ab, welche dem Product ihrer Stärken direct, dem Quadrate ihres Abstandes von einander umgekehrt proportional ist.

Dimensionen eines magnetischen Einheitspols.

374. Das angeführte Kraftgesetz setzt voraus, dass man die Stärke eines Magnetpoles in einer gewissen Einheit auszudrücken vermag. Die Grösse dieser Einheit ergiebt sich aus der Fassung des Gesetzes. Darnach

*) Seine mit der Torsionswage ausgeführten Experimente über den Magnetismus sind in den *Mémoires de l'Académie de Paris 1780—89* und in Biots *Traité de Physique* T. III. beschrieben.

ist ein Pol von der Stärke Eins, ein *Einheitspol*, ein Pol, der nach Norden zeigt und so stark magnetisirt ist, dass er einen andern Einheitspol in der Einheit der Entfernung mit der in Art. 6 definirten Einheit der Kraft abstösst. Die Stärke eines Pols, der nach Süden zeigt, gilt also als negativ.

Sind m_1 und m_2 die numerischen Beträge der Stärken zweier magnetischen Pole, giebt l den numerischen Betrag ihrer Entfernung von einander und f den ihrer Kraftwirkung auf einander, so hat man

$$f = \frac{m_1 m_2}{l^2}. \tag{1}$$

Daraus folgt, wenn man mit $[m]$, $[L]$, $[F]$ die concreten Einheiten für die Stärke eines magnetischen Pols, für eine Länge und für eine Kraft bezeichnet,

$$f[F] = \left[\frac{m}{L}\right]^2 \frac{m_1 m_2}{l^2},$$

also

$$[m^2] = [L^2 F] = \left[L^2 \frac{ML}{T^2}\right],$$

oder

$$[m] = [L^{\frac{3}{2}} T^{-1} M^{\frac{1}{2}}]. \tag{2}$$

Die Dimension eines Einheitspols ist also nach der Länge von der $\frac{3}{2}$ten, nach der Zeit von der -1ten und nach der Masse von der $\frac{1}{2}$ten Potenz. Ganz dieselben Dimensionen haben wir früher in Art. 42 für eine electrostatische Electricitätseinheit gefunden. Die Definition derselben unterschied sich aber auch in Nichts von der hier für einen Einheitspol gegebenen.

375. Man darf annehmen, dass die Exactheit des angeführten magnetischen Kraftgesetzes von Coulomb durch seine Versuche an der Torsionswage genügend nachgewiesen und von Gauss und Weber und von allen in den magnetischen Observatorien beschäftigten Beobachtern, die tagtäglich magnetische Stärken zu messen haben, hinreichend bestätigt worden ist. Die Resultate der einzelnen Beobachtungen müssten einander widersprechen, wenn zu ihrer Berechnung ein ungenaues Gesetz angenommen worden wäre. Fester noch ist das magnetische Kraftgesetz durch die Regeln, denen die electromagnetischen Phänomene folgen, begründet worden.

376. Die bisher als Stärke eines Poles bezeichnete Grösse kann auch seine Menge *Magnetismus* genannt werden, doch darf man mit dem Worte „Magnetismus“ keine andern Erscheinungen und Eigenschaften verbinden, als die schon angeführten bei magnetischen Polen beobachtbaren.

Man wird einsehen, dass, da das Kraftgesetz zwischen Mengen Magnetismus genau denselben mathematischen Ausdruck hat, wie das zwischen entsprechend grossen Mengen Electricität, die mathematische Behandlung der Theorie

des Magnetismus in vielen Punkten der der Electricität ähneln wird. Doch giebt es eine Reihe besonderer, die Magnete charakterisirender Erscheinungen, die der Leser dem Gedächtnis wol einprägen muss, und die auch einiges Licht auf die electrischen Eigenschaften der Körper werfen.

Summe der Magnetismen in einem Magnete; Constitution eines Magnets.

377. Die Menge Magnetismus, die ein Pol eines Magnets beherbergt, ist stets der Grösse nach gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt der Menge Magnetismus, die der andere Pol desselben in sich birgt.

Allgemeiner:

In jedem Magnete ist die Gesammtmenge an Magnetismus algebraisch genommen gleich Null.

In einem Felde, in welchem die Kraft überall in dem Raume, den der Magnet einnimmt, gleichmässig verteilt ist, und wo sie nach Richtungen wirkt, die einer Richtung parallel verlaufen, ist die Kraft, die das markirte Ende angreift, genau gleich, entgegengesetzt und parallel der Kraft, die sich an dem nicht markirten Ende bemerkbar macht. Die Kräfte an den beiden Enden eines solchen Magnets setzen sich also zu einem Kräftepaar zusammen, das die Axe des Magnets in eine bestimmte Richtung zu bringen strebt, aber den Magnet als Ganzes nach keiner Richtung hin zu verrücken vermag.

Man kann diese Behauptung leicht experimentell erweisen, wenn man den Magnet in ein kleines Gefäss legt und dieses auf Wasser schwimmen lässt. Das Gefäss dreht sich dann so, dass die Axe des Magnets möglichst der Richtung, in der der Erdmagnetismus wirkt, parallel gelegt wird, es bewegt sich aber nicht als Ganzes nach irgend einer Richtung. Daraus folgt, dass den Magnet keine grössere Kraft nach Norden als nach Süden, oder nach Süden als nach Norden zieht.

Dieselbe Behauptung wird auch durch die Tatsache erwiesen, dass die Magnetisirung eines Stahlstabes sein Gewicht nicht verändert. Doch alterirt die Magnetisirung die Lage seines Schwerpunkts, indem sie in unsern Breiten den Schwerpunkt längs der magnetischen Axe scheinbar nach Norden verschiebt. Der Trägheitsmittelpunkt, wie er durch die Rotation des Stabes bestimmt wird, bleibt aber unverändert in seiner Position.

378. Die Mitte eines langen dünnen Magnets besitzt, wie eine nähere Untersuchung lehrt, keine magnetischen Eigenschaften. Bricht man aber den Magnet an der Mitte durch, so weist jeder der beiden Teile desselben an der Bruchstelle einen Pol auf, der an Stärke gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt dem Pole ist, den das betreffende Stück an seinem andern Ende von vornherein schon hatte. Man kann also weder durch Magnetisirung, noch durch Zerteilen von schon vorhandenen Magneten, noch auch durch sonst irgend eine Operation einen Magnet mit zwei verschieden starken Polen erhalten.

Zerbricht man einen langen dünnen Magnet in lauter kurze Stücke, so bekommt man eine Anzahl kurzer Magnete, deren Pole nahezu so stark sind, wie die des ursprünglichen langen Magnets. Diese Neuschaffung von Polen ist aber nicht notwendig gleichbedeutend mit einer Neuschaffung von Energie, denn es gehört schon eine gewisse Arbeitsleistung, um die einzelnen Teile, die sich in Folge des magnetischen Kraftgesetzes anziehen, von einander zu trennen.

379. Wir legen nun die einzelnen Stücke in der Ordnung, wie sie dem unversehrten Magnete angehörten, an einander. An jeder Verbindungsstelle berühren sich zwei ganz gleiche und entgegengesetzte Pole, ihre combinirte Wirkung auf einen andern Pol ist also gleich Null. Demnach hat der so reconstruirte Magnet genau dieselben Eigenschaften wie im unversehrten Zustand; er besitzt zwei Pole, einen an jedem Ende, seine beiden Pole sind sich auch gleich und entgegengesetzt, und er zeigt in der Strecke zwischen den beiden Polen keine magnetischen Wirkungen.

Nun wissen wir aber, dass der reconstruirte Magnet aus hintereinandergereihten kurzen Magneten zusammengesetzt ist, und da er sich in seinen Eigenschaften in keiner Weise von dem unzerbrochenen Magnete unterscheidet, so darf man umgekehrt annehmen, dass der Magnet auch in seinem unversehrten Zustande aus kleinen Teilchen besteht, deren jedes zwei gleiche und entgegengesetzte Pole besitzt. Da in jedem Teilchen die algebraische Summe der Magnetismen verschwindet, so lehrt diese Annahme, dass diese Summe auch im ganzen Magnete gleich Null sein muss. Die Pole des Magnets sind von gleicher Stärke, aber von entgegengesetzter Art.

Magnetische Materie.

380. Die Form des Gesetzes, dem die Wirkung der magnetischen Kraft folgt, ist identisch mit der Form, die die electrische Kraftwirkung regelt. Dieselben Gründe, aus denen man die electrischen Erscheinungen der Existenz eines Fluidums oder zweier Fluida zuschreibt, kann man also auch für die Existenz einer oder zweier Arten magnetischer Materie geltend machen, der man eine flüssige oder irgend eine andere Constitution zuschreiben mag. In der Tat ist auch eine Theorie, die von der Supposition solcher Materie ausgeht, sofern sie lediglich mathematisch aufgefasst wird, völlig im Stande alle magnetischen Phänomene zu entwickeln.

Doch ist man gezwungen, noch eine Anzahl accessorischer, den tatsächlichen Verhältnissen Rechnung tragender Gesetze einzuführen.

Zunächst muss man annehmen, dass die magnetischen Flüssigkeiten nicht von einem Teilchen zu einem andern, auch nicht von einem Molekel zu einem andern überzugehen vermögen. Demnach soll der Magnetisirungsprocess darin bestehen, dass die beiden magnetischen Fluida in jedem Teilchen des betreffenden Körpers für sich von einander bis zu einem

gewissen Grade so getrennt werden, dass das eine Fluidum sich mehr nach dem einen, das andere sich mehr nach dem andern Ende des Teilchens begiebt. Diese Anschauung von der Bedeutung des Magnetisirens liegt der Poisson'schen Theorie des Magnetismus zu Grunde.

Nach ihr verhält sich ein magnetisirbares Teilchen analog wie ein kleiner isolirter nicht geladener Conductor, der ja zufolge der Hypothese der zwei Fluida von beiden Electricitätsarten auch sehr grosse und genau gleiche Mengen in sich bergen soll. Eine auf den Conductor wirkende electromotorische Kraft trennt seine beiden electrischen Fluida und lässt sie an entgegengesetzten Stellen desselben in Erscheinung treten. Aehnlich bringt nach Poissons Theorie eine magnetisirende Kraft in den beiden magnetischen Flüssigkeiten, die sich ursprünglich in jedem Teilchen des Körpers neutralisirten, eine Trennung zu Stande, und zwingt sie an entgegengesetzten Stellen des Teilchens zu erscheinen.

Bei gewissen Substanzen, die sich nicht permanent magnetisiren lassen, so beim weichen Eisen, verschwindet der magnetische Zustand mit der magnetisirenden Kraft, ganz so wie auch der electrische Zustand eines Conductors aufhört, wenn die inducirende Kraft entfernt ist. Bei andern Substanzen, so beim harten Stahl, lässt sich der magnetische Zustand nur schwer herstellen, doch bleibt er dafür bestehen, auch wenn die magnetisirende Kraft nicht mehr existirt.

Man drückt die letztere Tatsache dadurch aus, dass man sagt, der betreffende Körper besitze eine *Coercitivkraft*, die einer Aenderung der Magnetisirung entgegen wirkt, und die infolge dessen erst überwunden werden muss, ehe man seine magnetische Stärke zu vermehren, bezüglich zu vermindern vermag. Eine analoge Coercitivkraft würden Körper auch bei der Electrisirung aufweisen, wenn sie eine gewisse Art von electrischem Widerstand besässen, der, unähnlich dem bei Metallen beobachtbaren gewöhnlichen electrischen Widerstand, für electromotorische Kräfte, die unter eine gewisse Grösse sinken, mit gänzlicher Isolation völlig gleichbedeutend wäre.

Offenbar ist die auseinandergesetzte Theorie des Magnetismus ebenso wie die entsprechende der Electricität für die wirklichen Verhältnisse zu umfassend, sie sagt mehr aus, als die Tatsachen zu rechtfertigen im Stande sind, und muss durch künstliche Bedingungen eingeschränkt werden. Nach ihr müsste ein Körper, der mehr von beiden magnetischen Flüssigkeiten in sich birgt als ein anderer, sich von diesem irgendwie unterscheiden, sie giebt aber keine Rechenschaft darüber, weshalb das tatsächlich nicht der Fall ist. Ferner lässt sie die Eigenschaften erkennen, die ein Körper, der von einer magnetischen Flüssigkeit mehr als von der anderen hätte, besitzen würde; sie giebt zwar auch einen Grund an, weshalb trotzdem ein solcher Körper nicht existirt, doch ist dieser Grund erst nachträglich und direct, um diese specielle Nichtexistenz zu motiviren, angegeben worden; aus der Theorie selbst lässt er sich nicht deduciren.

381. Wir müssen uns daher nach einer Theorie umsehen, die uns mit Ausdrücken versieht, die einerseits nicht mehr aussagen, als die Tatsachen bestätigen, und die andererseits noch genügend umfassend für Einführung neuer aus neuen Tatsachen fliessender Ideen sind. Ich glaube, dass wir zum Ziele kommen, wenn wir den Partikeln eines Magnets eine „Polarisation" zuschreiben.

Was man unter „Polarisation" im allgemeinen zu verstehen hat.

Sind die Eigenschaften eines Körperpartikels so verteilt, dass sie zu einer festen Linie oder Richtung im Körper in Beziehung stehen, wirken sie ferner bei einer Umlegung des Körpers, bei der jene feste Richtung in die ihr entgegengesetzte Richtung verlegt wird, in Bezug auf andere Körper entgegengesetzt wie in der ursprünglichen Lage des Körpers, so heisst das Körperpartikel *Polarisirt* und seine Eigenschaften werden einer gewissen Art von *Polarisation* zugeschrieben.

In diesem Sinne kann man beispielsweise sagen, dass die Rotation eines Körpers um eine Axe eine gewisse Art von Polarisation constituirt, denn wenn man die Rotationsaxe, ohne die Rotation zu unterbrechen, um 180° sich gedreht denkt, so dass das eine Ende die Lage des andern annimmt, so rotirt der Körper in Bezug auf den ihn umgebenden Raum in entgegengesetzter Richtung wie früher.

Ein leitendes Partikel, durch das ein electrischer Strom fliesst, ist polarisirt, weil, wenn man das Partikel umlegt, während der Strom relativ zum Partikel seine Richtung beibehält, der Strom im Verhältniss zum umgebenden Raum in entgegengesetzter Richtung wie vorher sich bewegt.

Kurz, ist irgend eine mathematische oder physikalische Grösse von der in Art. 11 definirten Natur eines Vectors, so heisst der Körper oder das Partikel, dem jene gerichtete Grösse, das heisst jener Vector angehört, *Polarisirt* *), denn es zeigt in entgegengesetzten Richtungen entgegengesetzte Eigenschaften, es besitzt Pole für die betreffende Grösse.

---

*) Das Wort Polarisation kommt auch in der Optik vor, doch bezeichnet es hier etwas anderes als im Text. Ein Lichtstrahl heisst nämlich polarisirt, wenn seine Eigenschaften sich auf die Seiten des Strahles beziehen, und er hat an beiden Enden gleichsinnige Eigenschaften. Diese Art von Polarisation kennzeichnet eine andere Klasse von gerichteten Grössen, die man als Dipolare bezeichnen kann, während die von uns im Text behandelten Unipolare heissen mögen.

Dreht man eine dipolare Grösse um ihre Mitte durch 180°, so bleibt sie in jeder Beziehung das, was sie vorher war. Zug, Druck, Ausdehnung, Compression und Torsion in festen Körpern gehören ebenso wie die meisten optischen, electrischen und magnetischen Eigenschaften krystallinischer Körper zu jener Klasse dipolarer Grössen.

Die Eigenschaft, die der Magnetismus in durchsichtigen Körpern, wo er die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes dreht, hervorbringt, gehört ebenso wie der Magnetismus selbst zu der Klasse unipolarer Grössen.

Auch die in Art. 303 hervorgehobene rotatorische Eigenschaft gewisser Körper bei der Leitung des Stromes ist unipolar.

Die Pole der Erde, zum Beispiel, stehen in Beziehung zu ihrer Rotation und werden dementsprechend mit verschiedenen Namen bezeichnet.

Was man unter „Magnetische Polarisation“ zu verstehen hat.

382. Sprechen wir von dem Zustand der Teilchen eines Magnets als von der *Magnetischen Polarisation* dieser Teilchen, so meinen wir, dass jedes der kleinsten Teilchen, in die ein Magnet zerlegt werden kann, Eigenschaften besitzt, die zu einer bestimmten, durch das betreffende Partikel gehenden Axe, seiner *Magnetisirungsaxe*, in Beziehung stehen, und die an dem einen Ende des Partikels sich entgegengesetzt wie an dem andern Ende äussern.

Die Eigenschaften sollen in jedem Teilchen von derselben Art wie in dem ganzen Magnete sein. Diese Annahme ist nur der Ausdruck für die schon erwähnte Tatsache, dass man einen Magnet in kleine Teilchen zerbrechen kann, deren jedes wieder einen vollständigen Magnet bildet.

Potential eines magnetischen Molekels auf einen Pol.

383. Ich nehme an, dass ein Element $dx\,dy\,dz$ das Partikel eines Magnets bildet und alle Eigenschaften eines solchen besitzt. Sei m die Stärke seines positiven Pols und ds seine Länge. Bezeichnet dann P irgend einen im Raume gelegenen und vom positiven Pol des Teilchens um r, vom negativen um r' abstehenden Punkt*), so ist das vom positiven Pol herrührende magnetische Potential in P gleich m/r, und das vom negativen Pol verursachte gleich $-m/r'$. Demnach wird das Potential des magnetischen Teilchens in P

1a) $$dV = \frac{m}{rr'}(r'-r).$$

Ist aber ds, der Abstand der beiden Pole von einander, sehr klein, so darf man setzen

$$r' - r = \cos\varepsilon\, ds,$$

wo ε den Winkel angiebt, den die vom kleinen Magnet zum Punkte P gezogene Linie mit der Axe ds des Magnets einschliesst, und damit erhält man auch

1b) $$dV = \frac{m\,ds}{r^2}\cos\varepsilon.$$

Magnetisches Moment.

384a. Das im Zähler des Potentialausdruckes auftretende Product mds führt einen besondern durch die folgende Definition fixirten Namen.

---

*) Unter Punkt ist hier natürlich ein mit einer Einheit positiven Magnetismus geladenes, unendlich kleines Partikel zu verstehen.

Das Product aus der Länge eines gleichmässig und seiner Länge nach magnetisirten Stabes und der Stärke seines positiven Poles heisst das *Magnetische Moment* des Stabes.

Intensität der Magnetisirung.

384b. Unter *Intensität* oder *Stärke der Magnetisirung* eines magnetischen Teilchens versteht man das Verhältnis seines magnetischen Moments zu seinem Volumen. Ich bezeichne diese Intensität stets durch J.

Die Magnetisirung an einer Stelle eines Magnets ist bestimmt, wenn man ihre Intensität und ihre Richtung anzugeben vermag.

Die Richtung lässt sich aber durch die drei Cosinusse λ, μ, ν der Winkel, die sie mit den Coordinatenaxen einschliesst, fixiren.

Potential eines Magnets auf einen Pol.

Da die Magnetisirung in einem Punkte eines Körpers eine Vectorgrösse ist, so kann sie durch drei in Richtung der Coordinatenaxen verlaufende Componenten ausgedrückt werden. Nennen wir diese Componenten A, B, C, so ist

$$1)\qquad A = J\lambda,\quad B = J\mu,\quad C = J\nu.$$

$$2)\qquad J^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

385. Liegt der betrachtete Teil des Körpers an der Stelle des Körperelements $dx\,dy\,dz$ und bezeichnet J speciell die Magnetisirungsintensität an dieser Stelle, so ist das magnetische Moment daselbst

$$3)\qquad dM = J\,dx\,dy\,dz.$$

Ersetzt man in der Gleichung 1b) des Art. 383 $m\,ds$ durch den obigen Ausdruck für dM und beachtet, dass

$$r\cos\varepsilon = \lambda(\xi - x) + \mu(\eta - y) + \nu(\zeta - z)$$

ist, wenn x, y, z die Coordinaten des magnetischen Partikels und ξ, η, ζ die des Endpunktes eines von x, y, z ausgehenden Vectors r angeben, so hat man für das Potential des in (x, y, z) liegenden Elements auf den in (ξ, η, ζ) befindlichen Einheitspol

$$4_1)\qquad dV = \frac{1}{r^3}\Big\{A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)\Big\}\,dx\,dy\,dz.$$

Hieraus findet man das Potential eines einen bestimmten Raum ausfüllenden Magnets auf einen Einheitspol (ξ, η, ζ)

$$4a)\qquad V = \iiint \frac{1}{r^3}\Big\{A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)\Big\}\,dx\,dy\,dz,$$

wo die Integration sich auf den ganzen vom Magnete eingenommenen Raum bezieht. Eine partielle Integration ergiebt

4b) $$V = \iint \frac{A}{r}\, dy\, dz + \iint \frac{B}{r}\, dz\, dx + \iint \frac{C}{r}\, dx\, dy$$
$$- \iiint \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right\} dx\, dy\, dz.$$

Die drei ersten Integrale beziehen sich auf die Oberfläche, das vierte Integral erstreckt sich über das Volumen des Magnets.

Bezeichnet man mit l, m, n die Richtungscosinusse der von einem Element dS der Oberfläche des Magnets nach aussen gezogenen Normale, so ist wie in Art. 21 die Summe der drei ersten Integrale auch gleich

$$\iint \left\{ lA + mB + nC \right\} \frac{1}{r}\, dS,$$

wenn die Integration wieder über die ganze Fläche S des Magnets ausgedehnt wird.

Führt man demnach zwei neue Symbole σ und ρ ein, die durch die Gleichungen

5) $$\sigma = lA + mB + nC,$$

6) $$\rho = -\left\{ \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right\}$$

definirt sind, so erhält man auch

4c) $$V = \iint \frac{\sigma}{r}\, dS + \iiint \frac{\rho}{r}\, dx\, dy\, dz.$$

386. Dieser Ausdruck ist aber identisch mit dem für das electrische Potential, welches ein Körper ausübt, wenn seine Oberfläche zur Flächendichte σ und sein ganzes Inneres zur Raumdichte ρ electrisirt ist. Nehmen wir also an, dass σ und ρ Flächen- bezüglich Raumdichte in der Verteilung einer supponirten und als magnetische Materie bezeichneten Substanz ist, so wird das Potential dieser Verteilung identisch mit dem sein, welches die wahre Magnetisirung der einzelnen Teilchen des Magnets hervorbringt.

Die Flächendichte σ ist gleich der in Richtung der nach aussen zur Oberfläche des Magnets gezogenen Normale fallenden Componente der Magnetisirungsintensität, die Raumdichte ρ wird durch die in Art. 25 definirte *Convergenz* der Magnetisirung eines betreffenden, innerhalb des Magnets gelegenen Elements gegeben.

Die eben auseinandergesetzte Interpretation des magnetischen Potentials lässt äusserst bequem die Wirkung eines Magnets durch die der in gewisser Weise verteilten magnetischen Materie repräsentiren, man darf aber nicht vergessen, dass sie rein künstlich die Action polarisirter Partikel darstellt.

Wirkung zweier magnetischer Molekel aufeinander.

387. Allgemeine Formeln. Ich bezeichne mit l, m, n die Richtungscosinusse einer Axe h und setze wie in Art. 129 bei Gelegenheit der Definition der Kugelfunctionen

$$\frac{d}{dh} = l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + n\frac{\partial}{\partial z}.$$

Sind dann l_1, m_1, n_1 die Richtungscosinusse der Axe h_1 eines magnetischen Molekels, dessen Mitte sich im Ursprung befindet, und dessen Moment gleich m_1 ist, so haben wir für sein Potential in einer Entfernung r

$$1)\qquad V_1 = -\frac{d}{dh_1}\left(\frac{m_1}{r}\right) = \frac{m_1}{r^2}\lambda_1,$$

wo λ_1 wie in dem schon citirten Art. 129 den Cosinus des Winkels, den h_1 mit r bildet, angiebt.

Ein zweites magnetisches Molekel habe das Moment m_2, die Axe h_2 und sei im Endpunkt von r gelegen.

Die potentielle Energie der Wirkung des einen magnetischen Molekels auf das andere ist

$$2a)\qquad W = m_2\frac{\partial V_1}{\partial h_2} = -m_1 m_2 \frac{\partial^2}{\partial h_1 \partial h_2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

also nach Art. 129

$$2b)\qquad W = \frac{m_1 m_2}{r^3}\left(\mu_{12} - 3\lambda_1\lambda_2\right).$$

μ_{12} bezeichnet den Cosinus des Winkels, den die Axen der beiden magnetischen Molekel einschliessen; λ_1, λ_2 geben die Cosinusse der Winkel, welche die Verbindungslinie der beiden magnetischen Molekel mit den bezüglichen Axen h_1, h_2 derselben bildet.

Ich bestimme das Drehungsmoment, welches der erste kleine Magnet auf den zweiten in Bezug auf eine durch dessen Mitte gehende Axe ausübt.

Dreht man den zweiten Magnet in einer zu einer dritten Axe h_3 senkrechten Ebene um einen Winkel $d\varphi$, so hat man gegen die magnetischen Kräfte eine Arbeit von der Grösse $(\partial W/\partial\varphi)\, d\varphi$ zu leisten, demnach ist das Moment der in der genannten Drehungsebene auf den Magnet wirkenden Kräfte

$$3)\qquad -\frac{\partial W}{\partial \varphi} = -\frac{m_1 m_2}{r^3}\left(\frac{d\mu_{12}}{d\varphi} - 3\lambda_1\frac{d\lambda_2}{d\varphi}\right).$$

Es besteht aus zwei Componenten. Die eine wirkt in einer Ebene, die parallel den Axen beider Magnete läuft, und sucht den Winkel, den diese Axen einschliessen, mit einer Kraft vom Moment

$$\frac{m_1 m_2}{r^3} \sin(h_1 h_2)$$

zu vergrössern. Die andere Componente wirkt in einer Ebene, die durch r und die Axe h_2 des zweiten Magnets geht, und strebt den Winkel, den r mit h_2 bildet, mit einer Kraft vom Moment

$$3\frac{m_1 m_2}{r^3} \cos(r h_1) \sin(r h_2)$$

zu verkleinern.

Bestimmen wir noch die Kraft, welche den zweiten Magnet in der zu h_3 parallelen Richtung angreift, so haben wir für dieselbe zunächst

$$\text{4a)} \qquad -\frac{\partial W}{\partial h_3} = m_1 m_2 \frac{\partial^3}{\partial h_1 \partial h_2 \partial h_3}\left(\frac{1}{r}\right),$$

also nach Art. 129c, d

$$\text{4b)} \qquad -\frac{\partial W}{\partial h_3} = -\frac{m_1 m_2}{r^4} 3!\, Y_3.$$

Für Y_3 ist aber der Wert in Art. 132 schon angegeben worden, und es resultirt

$$\text{4c)} \qquad -\frac{\partial W}{\partial h_3} = 3\frac{m_1 m_2}{r^4}\{\lambda_1 \mu_{23} + \lambda_2 \mu_{31} + \lambda_3 \mu_{12} - 5\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\}$$

$$= 3\lambda_3 \frac{m_1 m_2}{r^4}(\mu_{12} - 5\lambda_1 \lambda_2) + 3\mu_{13}\frac{m_1 m_2}{r^4}\lambda_2 + 3\mu_{23}\frac{m_1 m_2}{r^4}\lambda_1.$$

Man kann aber diese Kraft auch als aus drei Componenten R, H_1, H_2, die in den bezüglichen Richtungen r, h_1, h_2 wirken, zusammengesetzt denken. Macht man also

$$\text{4d)} \qquad -\frac{\partial W}{\partial h_3} = \lambda_3 R + \mu_{13} H_1 + \mu_{23} H_2,$$

und beachtet, dass die Richtung h_3 ganz willkürlich gewählt werden kann, so wird*)

$$\text{5)} \qquad \begin{gathered} R = \frac{3 m_1 m_2}{r^4}(\mu_{12} - 5\lambda_1 \lambda_2), \\ H_1 = \frac{3 m_1 m_2}{r^4}\lambda_2, \quad H_2 = \frac{3 m_1 m_2}{r^4}\lambda_1. \end{gathered}$$

---

*) Diese Analyse von den zwischen zwei kleinen Magneten wirkenden Kräften rührt von Tait her, und ist von ihm im Januarheft des *Quarterly Math. Journ.* 1860 und in seinem Werke über Quaternionen (Art. 414) unter Benutzung der Terminologie der Quaternionentheorie veröffentlicht.

R repräsentirt eine Abstossungskraft, welche r zu vergrössern strebt; H_1 wirkt auf den zweiten Magnet in Richtung der Axe des ersten, H_2 in Richtung seiner eignen Axe.

388. Specielle Fälle. (1) Es mögen die Axen beider Magnete in derselben Geraden liegen und nach derselben Richtung laufen, dann ist

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_{12} = 1$$

und die Kraftwirkung des einen Magnets auf den andern wird

$$R + H_1 + H_2 = -\frac{6 m_1 m_2}{r^4}.$$

Aus dem negativen Zeichen dieser Kraft folgt, dass sie sich in einer Anziehung äussert.

(2) Es mögen die Axen beider Magnete einander parallel laufen und zu ihrer Verbindungslinie r senkrecht stehen, wir haben dann

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \mu_{12} = 1$$

und

$$R = \frac{3 m_1 m_2}{r^4}, \quad H_1 = H_2 = 0.$$

Die Kraft besteht in einer in Richtung der Verbindungslinie beider Magnete wirkenden Abstossung. Weder in diesem, noch in dem vorhergehenden Falle existirt ein Kräftepaar.

(3) Legen wir ferner die beiden Magnete senkrecht zu einander, und setzen demgemäss

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \mu_{12} = 0,$$

so wird

$$R = 0, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = \frac{3 m_1 m_2}{r^4}.$$

Zunächst wird also der zweite Magnet mit einer Kraft $3 m_1 m_2 / r^4$ in Richtung seiner Axe fortgestossen. Ferner folgt aus der Gleichung 2) des vorigen Artikels, dass der zweite Magnet auch von einem Kräftepaar

$$D = \frac{2 m_1 m_2}{r^3}$$

angegriffen wird, das ihn dem ersten Magnete parallel zu stellen sucht. Die Kraft und das Kräftepaar setzen sich zu einer einzigen Kraft von der Grösse $3 m_1 m_2 / r^4$ zusammen, die in Richtung der Axe des zweiten Magnets wirkt und deren Angriffspunkt um $2r/3$ vom zweiten Magnete entfernt ist.

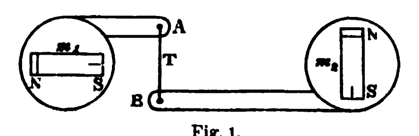


Fig. 1.

Der behandelte Fall ist in der beistehenden Fig. 1 illustrirt. m_1 und m_2 liegen beide in kleinen, auf Wasser schwimmenden Gefässen, die Axe von m_2 wird von der von m_1 senkrecht ge-

troffen und halbirt. Von den Gefässen gehen zwei Arme A und B aus. Verbindet man dieselben durch eine starre Stange T, die die von m_1 nach m_2 führende Linie senkrecht in einem von m_1 um $^1/_3$ und von m_2 um $^2/_3$ der Länge dieser Linie entfernten Punkte trifft, so befindet sich das System im Gleichgewicht.

(4) Gestatten wir dem zweiten Magnete sich so lange frei um seinen Mittelpunkt zu bewegen, bis er in eine Lage stabilen Gleichgewichts kommt, so wird W nach h_2 ein Minimum, demnach die von m_2 herrührende und in Richtung der Axe h_1 wirkende Kraft ein Maximum. Daraus lässt sich das folgende Verfahren zur Bestimmung der Lage, die man den Axen von Magneten, deren Centren fixirt sind, zu erteilen hat, ableiten, falls man einen gegebenen Punkt nach einer vorgeschriebenen Richtung von der möglich grössten magnetischen Kraft angreifen lassen will. Man versetzt einen der Magnete mit seiner Mitte in den gegebenen Punkt, und stellt seine Axe in die vorgeschriebene Richtung. Den andern Magnet legt man nach einander mit seiner Mitte auf die Punkte, wo die Centren der Magnete hinfallen sollen. Die Richtungen, die seine Axe, während er sich in seine stabile Gleichgewichtslage begiebt, in den einzelnen Punkten annimmt, stellen dann die Richtungen, in die man die Magnete in den betreffenden Punkten zu legen hat, dar.

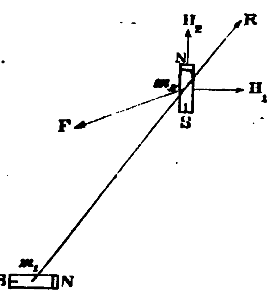


Fig. 2.

In der Praxis muss man aber noch, wo es nötig ist, die Einwirkung des Erdmagnetismus berücksichtigen.

Es möge sich der zweite Magnet in einer hinsichtlich der Richtung seiner Axe stabilen Gleichgewichtslage befinden. Das auf ihn wirkende Kräftepaar verschwindet dann, und demgemäss muss seine Axe mit der Axe des ersten Magnets sich in einer und derselben Ebene befinden. Wir haben also

$$(h_1 h_2) = (h_1 r) + (r h_2),$$

und da das Kräftepaar

$$\frac{m_1 m_2}{r^3}\left\{\sin(h_1 h_2) - 3\cos(h_1 r)\sin(r h_2)\right\}$$

verschwinden soll, wird

$$\operatorname{tg}(h_1 r) = 2\operatorname{tg}(r h_2)$$

oder

$$\operatorname{tg} H_1 m_2 R = 2 \operatorname{tg} R m_2 H_2.$$

Hat der zweite Magnet die charakterisirte Lage angenommen, so bezeichnet in dem Werte $m_2 dV/dh_2$ von W das h_2 die Richtung der Kraft, mit der m_1 auf m_2 noch wirkt, demnach erhält man

$$W = -m_2\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}.$$

Der zweite Magnet hat also das Bestreben, sich nach Orten hin zu begeben, an denen grössere resultirende Kräfte ihn angreifen.

Die den zweiten Magnet in diesem Falle beeinflussenden Kräfte ergeben sich aus den unter 4) und 5) in Art. 387 angeführten Formeln zu

$$R = -3\frac{m_1 m_2}{r^4}\frac{7\lambda_1^2+1}{\sqrt{3\lambda_1^2+1}},$$

$$H_1 = 6\frac{m_1 m_2}{r^4}\frac{\lambda_1}{\sqrt{3\lambda_1^2+1}}, \quad H_2 = \frac{3m_1 m_2}{r^4}\lambda_1.$$

Zerlegt man aber die Kraft H_2 nach r und nach h_1, so erhält man die bezüglichen Componenten

$$9\frac{m_1 m_2}{r^4}\frac{\lambda_1^2}{\sqrt{3\lambda_1^2+1}}, \quad -\frac{3m_1 m_2}{r^4}\frac{\lambda_1}{\sqrt{3\lambda_1^2+1}}.$$

Demnach zerfällt die ganze den zweiten Magnet in seiner angegebenen Lage angreifende Kraft in die beiden Componenten

$$P = -\frac{3m_1 m_2}{r^4}\frac{4\lambda_1^2+1}{\sqrt{3\lambda_1^2+1}}, \quad H'_1 = 3\frac{m_1 m_2}{r^4}\frac{\lambda_1}{\sqrt{3\lambda_1^2+1}}.$$

P ist stets negativ, diese Kraftcomponente zieht also den zweiten Magnet zu dem ersten hin. H'_1 wirkt in Richtung der Axe des ersten Magnetes.

Auf der Tafel XV. habe ich für einen etwas allgemeinern, aber dem eben behandelten ähnlichen Fall die Kraft- und Niveaulinien construirt. Die beiden Magnete sind als lange cylindrische und transversal in Richtung der hineingezeichneten Pfeile magnetisirte Stäbe angenommen. Die Querschnitte der Stäbe werden durch die blank gelassenen Kreisscheiben fixirt.

Da längs den Kraftlinien eine Spannung wirkt, so suchen beide Magnete, wie man aus der Zeichnung ersehen kann, sich in Richtung des Zeigers einer Uhr um ihre Axen zu drehen. Ausserdem hat der zur Rechten gezeichnete Magnet die Neigung, sich nach dem Kopf des Zeichenblattes zu begeben, während der zur Linken befindliche seinem Ende zustrebt.

Potentielle Energie eines Magnets in einem magnetischen Felde.

389. Ich bezeichne mit V das magnetische Potential, welches ein System von Magneten auf einen besonderen Magnet ausübt, und nenne es das Potential einer äussern magnetischen Kraft.

Legt man einen kleinen Magnet von der Stärke m und der Länge ds so hin, dass sein positiver Pol sich da befindet, wo das magnetische Potential den

Wert V besitzt, während sein negativer Pol die Stelle einnimmt, wo das magnetische Potential den Wert V' hat, so ist die potentielle Energie dieses kleinen Magnets gleich $m\,(V-V')$. Zählen wir ds, wenn es sich vom negativen zum positiven Pol erstreckt als positiv, so haben wir für diese potentielle Energie auch

$$\text{1a)} \qquad dW = m\frac{dV}{ds}\,ds.$$

Ist J die Intensität der Magnetisirung des kleinen Magnets, sind A, B, C die Componenten derselben und geben λ, μ, ν die Richtungscosinusse von ds, also die der Magnetisirung an, so wird

$$m\,ds = J\,dx\,dy\,dz,$$

$$\frac{dV}{ds} = \lambda\frac{\partial V}{\partial x} + \mu\frac{\partial V}{\partial y} + \nu\frac{\partial V}{\partial z};$$

$$A = \lambda J,\ B = \mu J,\ C = \nu J,$$

und damit erhalten wir den zweiten Ausdruck

$$\text{1b)} \qquad dW = \left\{A\frac{\partial V}{\partial x} + B\frac{\partial V}{\partial y} + C\frac{\partial V}{\partial z}\right\} dx\,dy\,dz.$$

Haben wir statt des kleinen Magnets einen Magnet von endlicher Grösse, so muss der obige Ausdruck für jedes Element des Magnets genommen werden, demnach

$$\text{2a)} \qquad W = \iiint \left\{A\frac{\partial V}{\partial x} + B\frac{\partial V}{\partial y} + C\frac{\partial V}{\partial z}\right\} dx\,dy\,dz$$

sein. Die Integration ist auf den ganzen Magnet zu erstrecken, W giebt dann die potentielle Energie des betrachteten Magnets an, wenn derselbe in das magnetische Feld gebracht ist.

Die Differentialquotienten von V bezeichnen die Componenten der im Felde herrschenden magnetischen Kraft, W ist also durch diese und durch die Componenten der Magnetisirung der einzelnen Elemente des Magnets ausgedrückt.

Bezeichnet man die Componenten der äussern magnetischen Kraft mit α, β, γ, setzt also

$$\alpha = -\frac{\partial V}{\partial x},\ \beta = -\frac{\partial V}{\partial y},\ \gamma = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

so resultirt

$$\text{2b)} \qquad W = -\iiint \{A\alpha + B\beta + C\gamma\}\,dx\,dy\,dz.$$

Eine partielle Integration ergiebt ferner

$$2c)\quad W=\iiint V(Al+Bm+Cn)\,dS-\iiint V\left\{\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right\}dx\,dy\,dz,$$

wo l, m, n die Richtungscosinusse der nach aussen gezogenen Normalen der Oberfläche S des Magnets anzeigen. Einen vierten Ausdruck für W bekommt man endlich, wenn man in der dritten Darstellung dieser Grösse die in Art. 386 gegebenen Formeln für die Flächen- bezüglich Raumdichte der magnetischen Materie des Magnets substituirt, es wird

$$2d)\quad W=\iint V\sigma\,dS+\iiint V\rho\,dx\,dy\,dz.$$

Magnetisches Moment und magnetische Axe eines Magnets.

390. Befindet sich der im obigen betrachtete Magnet in einem Felde, das im ganzen vom Magnete eingenommenen Raum nach Richtung und Grösse der magnetischen Kraft von gleichförmiger Constitution ist, so werden α, β, γ constante Grössen sein. Schreiben wir also

$$1)\quad \iiint A\,dx\,dy\,dz=lK,\quad \iiint B\,dx\,dy\,dz=mK,\quad \iiint C\,dx\,dy\,dz=nK$$

und dehnen die Integrationen über den ganzen vom Magnete eingenommenen Raum aus, so ist

$$2a)\quad W=-K(l\alpha+m\beta+n\gamma).$$

Hier sind l, m, n die Richtungscosinusse der magnetischen Axe des Magnets, K bezeichnet das Moment desselben.

Lässt man ε den Winkel bedeuten, den die Richtung der magnetischen Axe des Magnets mit der der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ bildet, so wird auch

$$2b)\quad W=-K\mathfrak{H}\cos\varepsilon.$$

Beim Erdmagnetismus darf man der eingeführten Annahme folgen, hängen wir also den Magnet so auf, dass er sich wie eine gewöhnliche Compassnadel frei zu bewegen vermag, bezeichnen wir mit φ das Azimut, in welches seine Axe sich einstellt, nennen ϑ die Neigung seiner Axe gegen eine Horizontalebene und lassen $\mathfrak{H}$ die Kraft des Erdmagnetismus bedeuten, wenn sie im Azimut δ und in der Neigung ζ wirkt, so ergiebt sich

$$\alpha=\mathfrak{H}\cos\zeta\cos\delta,\quad \beta=\mathfrak{H}\cos\zeta\sin\delta,\quad \gamma=\mathfrak{H}\sin\zeta;$$
$$l=\cos\vartheta\cos\varphi,\quad m=\cos\vartheta\sin\varphi,\quad n=\sin\vartheta;$$

also

$$W=-K\,\mathfrak{H}\,(\cos\zeta\cos\vartheta\cos(\varphi-\delta)+\sin\zeta\sin\vartheta).$$

Das Moment der Kraft, welche φ durch Drehung des Magnets um eine verticale Axe zu vergrössern strebt, ist

$$-\frac{\partial W}{\partial \varphi} = -K\mathfrak{H}\cos\zeta\cos\vartheta\sin(\varphi-\delta).$$

Ein Magnet unter dem Einfluss eines Pols, bezüglich ein Pol unter dem Einfluss eines Magnets.

391. Liegt ein Einheitspol im Punkte (ξ, η, ζ), so ist sein Potential an der Stelle (x, y, z)

$$V = \left\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$= r^{-1}\left\{1-2\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{r^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

r bezeichnet den Abstand des Pols vom Coordinatenursprung. Durch Entwickelung des Wurzelausdruckes findet man

$$V = \frac{1}{r} + \frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{r^3} + \frac{3(x\xi+y\eta+z\zeta)^2-(x^2+y^2+z^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{2r^5} + \cdots$$
$$= V_0 + V_1 + V_2 + \cdots$$

$V_0, V_1, V_2, \ldots$ sind harmonische Raumfunctionen negativen Grades.

Gehört der Punkt x, y, z einem Magnete an, der sich in dem durch V definirten magnetischen Felde befindet, so ergiebt sich das Gesammtpotential des Einheitspols auf den Magnet, wenn man den in Art. 389 unter 2a) abgeleiteten Ausdruck für W nach x, y, z innerhalb der durch die Grösse des Magnets vorgeschriebenen Grenzen integrirt. r und ξ, η, ζ sind dabei als Constanten anzusehen.

Behält man von V nur die drei Glieder V_0, V_1, V_2 bei und setzt

$$1)\quad lK = \iiint A\,dx\,dy\,dz,\quad mK = \iiint B\,dx\,dy\,dz,\quad nK = \iiint C\,dx\,dy\,dz;$$

$$2)\quad L = \iiint Ax\,dx\,dy\,dz,\quad M = \iiint By\,dx\,dy\,dz,\quad N = \iiint Cz\,dx\,dy\,dz;$$

$$3)\quad P = \iiint (Bz+Cy)\,dx\,dy\,dz,\quad Q = \iiint (Cx+Az)\,dx\,dy\,dz,$$
$$R = \iiint (Ay+Bx)\,dx\,dy\,dz,$$

so wird die potentielle Energie des Magnets, wenn er unter dem Einfluss des in ξ, η, ζ liegenden magnetischen Poles steht,

$$4)\quad W = K\frac{l\xi+m\eta+n\zeta}{r^3}$$
$$+\frac{\xi^2(2L-M-N)+\eta^2(2M-N-L)+\zeta^2(2N-L-M)}{r^5}$$
$$+\frac{3(P\eta\zeta+Q\zeta\xi+R\xi\eta)}{r^5}$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

Man kann übrigens umgekehrt W auch als das Potential des Magnets auf den Punkt (ξ, η, ζ) ansehen.

Mittelpunkt, primäre und secundäre Axen eines Magnets.

392. Der im vorigen Artikel für die potentielle Energie gewonnene Ausdruck lässt sich durch geeignete Wahl des Coordinatensystems beträchtlich vereinfachen.

Verschiebt man das ganze Coordinatensystem parallel mit sich selbst, bis der Coordinatenursprung in den Punkt (x', y', z') fällt, so ändern sich die Ausdrücke für lK, mK, nK gar nicht, dagegen wird

$$\text{a)}\quad L'=L-lKx',\ M'=M-mKy',\ N'=N-nKz';$$

$$\text{b)}\quad P'=P-K(mz'+ny'),\ Q'=Q-K(nx'+lz'),\ R'=R-K(ly'+mx').$$

Ich lege nun die x Axe in Richtung der Axe des Magnets, so dass nach Art. 390

$$1)\quad l=1,\ m=n=0$$

wird, und nehme zum Coordinatenursprung den Punkt

$$2)\quad \left(x'=\frac{2L-M-N}{2K},\ y'=\frac{R}{K},\ z'=\frac{Q}{K}\right).$$

Wir erhalten dann

$$L'=\tfrac{1}{2}(M+N),\ M'=M,\ N'=N,$$
$$P'=P,\ Q'=0,\ R'=0,$$

und das Potential geht über in

$$3\text{a)}\quad W=K\frac{\xi}{r^3}+\frac{\frac{3}{2}(\eta^2-\zeta^2)(M-N)}{r^5}+\frac{3P\eta\zeta}{r^5}+\cdots,$$

oder unter Benutzung der symmetrischen Flächenfunctionen [Art. 140a, 1) und 2)]

$$3\text{b)}\quad W=K\xi r^{-3}+(M-N)\overset{(2)}{\underset{2}{Yc}}\,r^{-3}+\overset{(2)}{\underset{2}{Ys}}\,r^{-3}.$$

Durch die specielle Wahl für den Coordinatenursprung hat das zweite Glied in dem Ausdruck für W seine möglich einfachste Form erhalten. Die Lage des neuen Coordinatenursprungs ist aber nach der Definition seiner Coordinaten lediglich von der Beschaffenheit des Magnets abhängig, der Punkt (x', y', z') steht demnach zu diesem Magnete in unveränderlicher Beziehung. Er heisst der *Magnetische Mittelpunkt* des Magnets.

Die durch den magnetischen Mittelpunkt gehende und in Richtung der magnetischen Axe verlaufende Gerade nennt man die *Magnetische Hauptaxe* des Magnets.

Der Ausdruck für W lässt sich noch weiter durch geeignetes Richten der y und z Axe reduciren. Dreht man nämlich die yz Ebene um die x Axe um einen Winkel ϑ, dessen Grösse durch die Gleichung

$$4)\qquad tg\, 2\vartheta = \frac{P}{M-N}$$

fixirt ist, so verschwindet P völlig und es bleibt

$$3\text{c})\qquad W = K\frac{\xi}{r^3} + \frac{3}{2}\frac{(\eta^2-\zeta^2)(M-N)}{r^5} + \cdots$$

oder

$$3\text{d})\qquad W = K\xi r^{-3} + \overset{(2)}{\underset{2}{Yc}}\, r^{-3} + \cdots$$

Weiter lassen sich die drei ersten Glieder von W nicht mehr vereinfachen.

Laufen die y und z Axe in den ihnen durch die Gleichung 4) vorgeschriebenen Richtungen, so heissen sie die *Magnetischen Nebenaxen* des Magnets.

Die Existenz des magnetischen Mittelpunktes drückt auch noch die Tatsache aus, dass das Flächenintegral des Quadrats aus dem zweiten und dritten Gliede vom magnetischen Potential W ausgedehnt über eine Kugel vom Radius 1 ein Minimum ist.

Schreibt man diese beiden Glieder nach Art. 391, 4)

$$\frac{(\xi^2-\eta^2)(L'-M') + (\eta^2-\zeta^2)(M'-N') + (\zeta^2-\xi^2)(N'-L')}{r^5} + \frac{3(P'\eta\zeta + Q'\zeta\xi + R'\xi\eta)}{r^5}$$

und beachtet, dass Grössen von der Form $(\xi^2-\eta^2)/r^2$ symmetrischen Flächenfunctionen $\overset{(2)}{\underset{2}{Yc}}$ und solche von der Form $\xi\eta/r^2$ den coordinirten symmetrischen Flächenfunctionen $\overset{(2)}{\underset{2}{Ys}}$ proportional sind, und dass demgemäss die

Sätze 6) und 7) des Art. 141 anzuwenden sind, so findet man, dass das betreffende Flächenintegral ein Minimum wird, wenn

$$F = 4(L'^2 + M'^2 + N'^2 - M'N' - N'L' - L'M') + 3(P'^2 + Q'^2 + R'^2)$$

ein Minimum ist.

Man hat also die drei Bedingungsgleichungen $\partial F/\partial x' = \partial F/\partial y' = \partial F/\partial z' = 0$. Unter Benutzung der durch die Gleichungen a) und b) bestimmten Werte der Differentialquotienten der L', M', N'; P', Q', R' resultiren dann die drei Relationen

$$\begin{aligned} 2l\,(2L' - M' - N') + 3n\,Q' + 3m\,R' &= 0, \\ 2m(2M' - N' - L') + 3l\,R' + 3n\,P' &= 0, \\ 2n\,(2N' - L' - M') + 3m\,P' + 3l\,Q' &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich, wenn man $l = 1$, $m = n = 0$ setzt,

$$2L' - M' - N' = 0, \quad P' = Q' = 0,$$

und das sind dieselben Relationen, welche auch aus der Existenz des magnetischen Mittelpunktes resultirten.

Es ist interessant, diese Untersuchung über das Potential eines Magnets mit den entsprechenden Entwickelungen für das Potential einer gravitirenden Masse zu vergleichen. Bei der Aufstellung des Potentials einer gravitirenden Masse gelangt man zu den einfachsten Ausdrücken, wenn man den Coordinatenursprung in den Massenmittelpunkt verlegt und die Coordinatenaxen nach den drei Hauptträgheitsaxen richtet.

Der magnetische Mittelpunkt entspricht in seinen Eigenschaften nicht dem Massenmittelpunkt, diesem ist beim Magnete ein Punkt analog, der in Richtung der Axe im Unendlichen liegt.

Die Grössen L, M, N correspondiren mit den Trägheitsmomenten und die P, Q, R mit den als Trägheitsproducte zu bezeichnenden Quantitäten, doch sind L, M, N nicht notwendig positive Grössen.

Im Falle, dass der magnetische Mittelpunkt den Coordinatenursprung bildet, ist die harmonische Flächenfunction der zweiten Ordnung in der Entwickelung des Potentials eine sectorielle Function [Art. 140a, 2a) und 140c], deren Axen mit der magnetischen Axe zusammenfallen.

Ist der Magnet wie ein Rotationskörper symmetrisch um seine Axe geformt, so verschwinden die die harmonische Flächenfunction zweiter Ordnung enthaltenden Glieder gänzlich.

Bezeichnungen und Festsetzungen.

393. Abgesehen von einigen polaren Gegenden, zeigt ein Magnet auf der ganzen Erdoberfläche mit seinem einen Ende nach Norden oder doch nach einer nördlichen Richtung und mit dem andern Ende nach Süden.

Dem allgemeinen Sprachgebrauch folgend, nennen wir das nach Norden weisende Ende den *Nordpol* und das nach Süden pointirende den *Südpol* des Magnets. Wollen wir einen Magnet in seiner Eigenschaft als Träger magnetischer Flüssigkeit auffassen, so bezeichnen wir seine Enden als boreales bezüglich australes Ende. *Borealer Magnetismus* ist ein gewisses supponirtes Fluidum, das sich namentlich in den nördlichen Gegenden der Erde aufgesammelt hat; *Australer Magnetismus* ist ein vorzugsweise im südlichen Teile der Erde vorwaltendes Fluidum. Demnach ist das Ende eines Magnets, das nach Norden zeigt, sein *Australes* und das, welches nach Süden zeigt, sein *Boreales* Ende. Diese Bezeichnungsweise ist consequenter als die zuerst erwähnte, denn wenn wir von dem Nord- bezüglich Südpol eines Magnets reden, so denken wir dabei nur an die Lage, die der Magnet, wenn er sich frei bewegen kann, in Bezug auf die Erde einnimmt, wir vergleichen ihn aber nicht, wie bei der zweiten Bezeichnungsweise, mit der Erde als einem Magnete.

394. Im Wirkungsgebiet einer magnetischen Kraft, in einem *Magnetischen Felde*, nenne ich die Richtung, nach der das Nordende einer in das Gebiet versetzten Compassnadel hinweist, das *Magnetische Norden*, die dieser entgegengesetzte Richtung das *Magnetische Süden.*

Eine magnetische Kraftlinie soll nach der positiven Richtung verlaufen, wenn sie vom magnetischen Süden nach dem magnetischen Norden geht.

Weiter fixire ich die Richtung der Magnetisirung eines Magnets durch eine von seinem Südende zu seinem Nordende gehende Gerade.

Demgemäss soll das Nordende eines Magnets auch das *Positive*, das Südende das *Negative* Ende desselben heissen.

Wir haben daher australen Magnetismus, der sich am Nordende des Magnets befinden sollte, als positiv, borealen als negativ zu betrachten. Bezeichnet m den numerischen Betrag des australen Magnetismus eines magnetischen Poles, so wird

$$V = \sum \frac{m}{r}$$

das magnetische Potential; die positive Richtung einer magnetischen Kraftlinie zeigt also die Richtung an, nach der V abnimmt.

Cap. II.

Magnetische Kraft und Magnetische Induction.

Allgemeine Methode zur Bestimmung der magnetischen Kraft.

395. In Art. 385 habe ich für das von einem Magnete in einem Punkte hervorgerufene magnetische Potential eine Anzahl von Ausdrücken abgeleitet, die sich numerisch auswerten lassen, wenn die Magnetisirung jeder Stelle des Magnets beschrieben ist. Ich habe auch gezeigt, dass das mathematische Resultat entweder im Sinne einer wirklichen Magnetisirung jedes Teilchens des Magnets gedeutet werden kann, oder seine Interpretation in der Annahme einer teils auf der Oberfläche, teils durch das ganze Innere des Magnets verteilten magnetischen Materie findet.

Die Form des Potentials ist von der Lage des Punktes, für welchen es bestimmt werden soll, unabhängig, sie gilt für innerhalb des Magnets befindliche Punkte ebenso gut, wie für ausserhalb desselben situirte.

Was die magnetische Kraft, welche der Magnet auf einen irgendwo gelegenen Einheitspol ausübt, anbetrifft, so erhält man dieselbe aus dem Potential mit Hilfe ganz derselben Operation des Differenzirens, wie in dem entsprechenden electrischen Problem.

Sind also α, β, γ die Componenten der magnetischen Kraft und bezeichnet V das magnetische Potential, so haben wir

$$\alpha = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Das gilt zunächst solange der angegriffene Punkt ausserhalb des Magnets gelegen ist. Befindet er sich innerhalb desselben, so werden wir so zu verfahren haben, dass wir in dem Magnete da, wo der Punkt liegen soll, durch Entfernung der magnetischen Substanz eine Höhlung herstellen. Der Pol befindet sich dann in einer von magnetischer Materie freien Stelle. Die auf ihn wirkende Kraft des Magnets wird aber im allgemeinen von der Form der Höhlung und von der Neigung ihrer Wände gegen die Magnetisirungsrichtung des

Magnets an der betreffenden Stelle abhängen. Will man also von der auf einen innerhalb eines Magnets gelegenen Punkt von dem Magnete ausgeübten Kraft, ohne über die Grösse, die man im Sinne hat, Zweifel zu lassen, sprechen, so muss man die Form und Orientirung der Höhlung angeben, innerhalb deren die magnetische Kraftwirkung gemessen werden soll. Ist aber Beschaffenheit und Lage der Höhlung specificirt, so darf man den darin befindlichen Pol als ausserhalb der magnetischen Substanz gelegen ansehen und bei der Bestimmung, der ihn angreifenden magnetischen Kraft, den gewöhnlichen Methoden folgen.

396. Ein nach Richtung und Intensität gleichmässig magnetisirter Magnet hat keine Raumverteilung magnetischer Materie, hier ist es gleichgiltig, welche Ausdehnung man der Höhlung verleiht. Bei einem ungleichmässig magnetisirten Magnete besitzt aber im allgemeinen auch das Innere eine Verteilung magnetischer Materie. Durch Herstellung der Höhlung wird dann diese Raumverteilung an einer Stelle des Magnets entfernt. Die Kraftwirkung der aus der Höhlung fortgeschafften magnetischen Raumverteilung ist den wirklichen Dimensionen der Höhlung proportional, sie nimmt also mit Verkleinerung der Höhlung unendlich ab, während die Kraftwirkung der Flächenverteilung der Höhlung im allgemeinen selbst für sehr kleine Höhlungen endlich bleibt. Verleiht man der Höhlung sehr kleine Dimensionen, so kann man also annehmen, dass der Magnet an der betreffenden Stelle nach Intensität und Richtung gleichmässig magnetisirt ist. Der in der Höhlung liegende Punkt wird dann von zwei Kräften angegriffen. Die eine rührt von der Flächenverteilung magnetischer Materie auf der Oberfläche des Magnets und von der Raumverteilung magnetischer Materie in seinem Innern, abzüglich des von der Höhlung eingenommenen Gebietes, her.

Die Componenten α, β, γ dieser Kraftwirkung berechnen sich durch die negativ genommenen Differentialquotienten des Potentials des Magnets auf den in der Höhlung liegenden Pol. Die andere Kraft verdankt der Flächenverteilung auf der Fläche der Höhlung ihre Entstehung.

397. Zur Ableitung der Grösse dieser zweiten Kraft geben wir der Höhlung die Form eines sehr kurzen und sehr dünnen Cylinders, dessen Axe die Richtung der an der betreffenden Stelle herrschenden Magnetisirung hat, und verlegen den Pol in die Mitte der Cylinderaxe.

Die Mantelfläche des Cylinders besitzt, weil die generirenden Linien derselben die Richtung der Magnetisirung haben, keine Flächenverteilung von magnetischer Materie, die Endflächen desselben sind aber, als zur Magnetisirungsrichtung senkrecht stehend, gleichmässig mit magnetischer Materie flächenhaft belegt. Auf der einen Endfläche, der negativen, ist die Flächendichte gleich $+J$, auf der andern, der positiven, gleich $-J$. Die Wirkung, welche die beiden Endflächen des Cylinders auf den Pol ausüben, setzt sich zusammen aus einer Anziehung, welche von der gleichmässigen Belegung der positiven Endfläche ausgeht, und aus einer Abstossung, die

von der gleichmässigen Belegung der negativen Endfläche hervorgebracht wird. Anziehung und Abstossung suchen den Pol nach derselben Richtung zu drängen, ihre Resultante ist

$$R = 4\pi J\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),$$

wenn $2b$ die Länge des Cylinders und a seinen Radius angiebt, und der Pol, wie er soll, in der Mitte der Axe des Cylinders gelegen ist. Die Kraft hängt, wie der für R gegebene Ausdruck lehrt, nicht von den absoluten Dimensionen des Cylinders, sondern von dem Verhältnis, in dem seine Länge zu seiner Dicke steht, ab. Wie klein man also auch die Höhlung machen mag, die von ihrer Flächenverteilung herrührende magnetische Kraftwirkung bleibt im allgemeinen endlich.

Ich betrachte die zwei extremen Fälle.

398. I) Sei die Länge des Cylinders sehr gross im Verhältnis zu seiner Dicke (was natürlich nicht hindert, dass sie an sich noch sehr klein bleibt). Man darf dann R nach Potenzen von a/b entwickeln, und erhält so

$$R = 4\pi J\left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2} - \frac{3}{8}\frac{a^4}{b^4} + \cdots\right).$$

Im Grenzfall, wo b unendlich gross gegen a wird, verschwindet R.

Hat also die Höhlung die Form eines sehr dünnen Cylinders, dessen Axe in Richtung der Magnetisirung fällt, so wird die magnetische Kraft, die der Magnet auf einen in der Axe der Höhlung liegenden Pol ausübt, das heisst, die magnetische Kraft innerhalb dieser Höhlung, durch die Flächenverteilung auf den Endflächen der Höhlung nicht afficirt, ihre Componenten sind also einfach

$$1) \qquad \alpha = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Ich bezeichne die Kraft, die innerhalb einer solchen sehr dünnen, in Richtung der Magnetisirung orientirten Höhlung wirkt, als die *Magnetische Kraft* innerhalb des Magnets. W. Thomson nennt das die *Polare* Definition der magnetischen Kraft. Als Symbol wähle ich für sie, wenn es sich um ihre Vectoreigenschaften handelt, den deutschen Buchstaben $\mathfrak{H}$.

399a. II) Sei zweitens die Länge des Cylinders sehr gering im Verhältnis zu seiner Dicke. Die Entwickelung von R schreitet dann nach Potenzen von b/a fort, und es wird

$$R = 4\pi J\left(1 - \frac{b}{a} + \frac{1}{2}\frac{b^3}{a^3} - \cdots\right).$$

Im Grenzfall, wo b/a eine sehr kleine Grösse ist, erhält man

$$R = 4\pi J.$$

Hat demnach die Höhlung die Form einer sehr dünnen gegen die Richtung der Magnetisirung an der betreffenden Stelle des Magnets senkrecht orientirten Scheibe, so wird ein Einheitspol, der sich in der Mitte dieser Scheibe befindet, ausser von der in Art. 398 definirten magnetischen Kraft des Magnets, durch die magnetische Flächenverteilung auf den Scheibenflächen noch von einer Kraft $4\pi J$ in Richtung der Magnetisirung angegriffen.

J hat die Grössen A, B, C zu Componenten, also findet man für die Wirkung dieser Kraft in Richtung der Coordinatenaxen die Werte

$$4\pi A,\quad 4\pi B,\quad 4\pi C,$$

welche zu den durch 1) definirten Kraftcomponenten α, β, γ zu addiren sind, wenn man die ganze den Pol angreifende Kraft erhalten will.

399b. Ich bezeichne die gesammte in diesem Falle auf den Einheitspol ausgeübte Kraft durch $\mathfrak{B}$ und nenne ihre Componenten a, b, c, dann ist

$$2)\qquad \begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A = -\frac{\partial V}{\partial x} + 4\pi A, \\ b &= \beta + 4\pi B = -\frac{\partial V}{\partial y} + 4\pi B, \\ c &= \gamma + 4\pi C = -\frac{\partial V}{\partial z} + 4\pi C. \end{aligned}$$

Diese auf einen Einheitspol, der sich in der Mitte einer zur Magnetisirungsrichtung senkrechten scheibenförmigen Höhlung befindet, ausgeübte Kraft heisst die *Magnetische Induction* innerhalb des Magnets. W. Thomson nennt das die *Electromagnetische* Definition der Kraft.

Die drei Vectoren, nämlich die Magnetisirung $\mathfrak{J}$, die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ und die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ stehen in der Beziehung

$$3)\qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}.$$

400. Ich führe noch die Ausdrücke für die magnetische Kraftwirkung auf Pole, die in anders geformten Höhlungen liegen, an. Besteht die Höhlung aus einem verlängerten Cylinder, dessen Axe um den Winkel ε gegen die Magnetisirungsrichtung geneigt ist, so ist die von der Flächenverteilung der Höhlung herrührende Kraft gleich $2\pi\mathfrak{J}\sin\varepsilon$, sie wirkt senkrecht zur Axe in der Ebene, welche die Axe und die Magnetisirungsrichtung enthält. Für einen in der Mitte eines kleinen Spaltes, dessen Normale mit der Magnetisirungsrichtung den Winkel ε bildet, liegenden Pol ist die von der Flächenverteilung verursachte Kraft gleich $4\pi\mathfrak{J}\cos\varepsilon$, sie wirkt in Richtung der Normale des Spaltes. Läuft also der Spalt parallel der Magnetisirungsrichtung, so ist die gesammte den Pol angreifende Kraft gleich $\mathfrak{H}$. Steht er senkrecht zu der Magnetisirungsrichtung, so ist die gesammte Kraft gleich der magnetischen Induction $\mathfrak{B}$.

Die Flächenverteilung auf einer kugelförmigen Höhlung bringt im Mittelpunkt derselben eine Kraft, die in Richtung der Magnetisirung mit der Intensität $\frac{4}{3}\pi\mathfrak{J}$ wirkt, hervor.

Linienintegral der magnetischen Kraft.

401. Die in Art. 398 definirte magnetische Kraft ist in ihrer Grösse unabhängig davon, ob der Punkt, den sie angreift, innerhalb oder ausserhalb des Magnets liegt. Das Linienintegral derselben längs einer zwischen zwei Punkten A, B verlaufenden Curve s ist also nach Art. 398, Gleichung 1)

$$L = \int_A^B \left(\alpha \frac{dx}{ds} + \beta \frac{dy}{ds} + \gamma \frac{dz}{ds} \right) ds = V_A - V_B.$$

V_A und V_B bedeuten die in den Endpunkten der Curve s herrschenden Potentialwerte, und können durch die Entwickelungen des Art. 389 in jedem Falle berechnet werden.

Freier Magnetismus innerhalb einer geschlossenen Fläche.

402a. Da zwischen magnetischer Kraft und freiem Magnetismus dieselbe mathematische Beziehung wie zwischen electrischer Kraft und freier Electricität besteht, so können wir die in Art. 77 für das entsprechende electrische Problem gegebenen Entwickelungen auf unsern Fall anwenden.

Wir haben in den daselbst abgeleiteten Formeln für die electrischen Kraftcomponenten X, Y, Z die magnetischen α, β, γ und für die Electricitätsmenge e die algebraische Summe M des innerhalb der Fläche befindlichen freien Magnetismus zu setzen. Demnach wird [Art. 77, 1)]

$$\text{1a)} \qquad \iint (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, dS = 4\pi M.$$

Der freie Magnetismus ist so durch die magnetischen Kraftcomponenten dargestellt; ich leite nun noch einen Ausdruck für denselben ab, in welchem er in Beziehung zu den Magnetisirungscomponenten gesetzt wird.

Da jedes magnetische Partikel zwei Pole besitzt, die beide gleich viel Magnetismus, aber von entgegengesetzter Art enthalten, so ist für jedes Partikel die Summe der Magnetismen gleich Null. Diejenigen Partikel, die sich vollständig innerhalb der Fläche S befinden, tragen also nichts zu der algebraischen Summe M der innerhalb der Fläche S concentrirten freien Magnetismen bei. Der Wert von M hängt nur von den Partikeln ab, die von der Fläche S zerschnitten werden. Es habe nun eines dieser magnetischen Partikel in Richtung seiner Magnetisirung die Länge s und es besitze den Querschnitt k^2. Das Moment dieses kleinen Magnets ist dann gleich ms, und die Intensität seiner Magnetisirung, also das Verhältnis dieses Moments zu dem Volumen des Magnets wird

$$J = \frac{m}{k^2}.$$

Liegt dieser Magnet so, dass seine Magnetisirungsrichtung mit der nach aussen verlaufenden Normale der Fläche S den Winkel ε bildet, und wird er von der Fläche S durch das Flächenelement dS in zwei Teile zerlegt, deren einer – ich nehme an der positive – ausserhalb der Fläche S sich befindet, so ist

$$k^2 = dS \cos\varepsilon.$$

Ich bezeichne mit dM den Beitrag, den der kleine Magnet zum freien, innerhalb S befindlichen Magnetismus liefert, und erhalte

$$dM = -m = -Jk^2 = -J\cos\varepsilon\, dS.$$

Darnach wird

1b) $$M = -\iint J\cos\varepsilon\, dS,$$

wo die Integration die ganze geschlossene Fläche S umfasst. Ersetzt man J und $\cos\varepsilon$ durch ihre Componenten A, B, C, bezüglich l, m, n, so resultirt

1c) $$M = -\iint (lA + mB + nC)\, dS.$$

Flächenintegral der magnetischen Induction.

402b. Als *Magnetische Induction durch eine Fläche S* definire ich den Wert, den das Integral

1a) $$Q = \iint \mathfrak{B}\cos\varepsilon\, dS$$

annimmt, wenn man unter $\mathfrak{B}$ die magnetische Induction an dem Flächenelement dS und unter ε den Winkel, den die Richtung der Induction mit der nach aussen an dS gezogenen Normale bildet, versteht, und wenn die Integration über die ganze Fläche S erstreckt wird. Der Ausdruck gilt für begrenzte wie für geschlossene Flächen. Nach Einführung der Componenten a, b, c für $\mathfrak{B}$ und der Componenten l, m, n für $\cos\varepsilon$ ist auch

1b) $$Q = \iint (la + mb + nc)\, dS.$$

Unter Benutzung der in Art. 399b unter 2) aufgestellten Gleichungen folgt noch der dritte Ausdruck

1c) $$Q = \iint (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, dS + 4\pi \iint (lA + mB + nC)\, dS.$$

403a. Magnetische Induction durch geschlossene Flächen. Beachtet man die in Art. 402a für den freien, innerhalb der Fläche befindlichen

Magnetismus unter 1a) und 1c) aufgestellten Ausdrücke, so reducirt sich die jetzige Gleichung 1c) auf

$$1_1)\qquad Q = 4\pi M - 4\pi M = 0.$$

Die magnetische Induction durch eine geschlossene Fläche ist also gleich Null.

403b. Das durch 1_1) ausgedrückte Resultat besteht unabhängig von der Grösse der Fläche S, confundirt man sie mit der Oberfläche eines Raumelements $dx\,dy\,dz$ und berücksichtigt die bekannte Transformation des Flächenintegrals für Q in ein Raumintegral, so geht der Satz $Q = 0$ über in

$$2)\qquad \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Die Componenten der magnetischen Induction erfüllen also stets die sphondyloidale Bedingung.

403c. Magnetische Induction durch begrenzte Flächen. Aus der eben bewiesenen Eigenschaft, dass nämlich die magnetische Induction sphondyloidal verteilt ist, folgt sofort, dass die magnetische Induction durch eine von einer geschlossenen Curve begrenzte Fläche nicht von der Gestalt der Fläche, sondern nur von der Form und Lage ihrer Begrenzungslinie abhängt.

Demnach muss es möglich sein, die Induction durch eine geschlossene Curve lediglich durch die Natur dieser Curve, ohne Zuhilfenahme irgend welcher durch die Curve begrenzter Flächen zu bestimmen.

Nach der Definition, die wir für die Induction gegeben haben, heisst das, man muss einen Vector $\mathfrak{A}$ finden können, dessen Linienintegral in Bezug auf die betreffende Curve gleich dem Flächenintegral der magnetischen Induction $\mathfrak{B}$ längs einer durch die Curve begrenzten Fläche wird.

Das ist aber sofort geschehen, wenn man von den in Art. 24 niedergelegten Entwickelungen Gebrauch macht

Bestimmt man nämlich die drei Componenten F, G, H von $\mathfrak{A}$ durch die Beziehungen

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y},$$

so wird

$$3)\qquad Q = \int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds.$$

Das Vector-Potential der magnetischen Induction.

404. Die Grösse $\mathfrak{A}$ heisst das *Vector-Potential* der magnetischen Induction.

Ihre Componenten F, G, H sind mit den Componenten a, b, c der magnetischen Induction durch die Gleichungen

$$1)\qquad a=\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z};\quad b=\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x},\quad c=\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}$$

verbunden und lassen sich durch Quadraturen berechnen, wenn neben der Form und der Magnetisirung des Magnets die Lage des Punktes gegeben ist, für den sie gelten sollen.

Vector-Potential eines magnetischen Molekels. Hat man zunächst nur ein im Ursprunge der Coordinaten liegendes magnetisches Molekel, dessen Moment gleich m ist, und dessen Magnetisirungsaxe die Richtungscosinusse λ, μ, ν besitzt, so ist das Potential auf einen um r abstehenden Punkt (x, y, z) nach Art. 387, 1)

$$a)\qquad V=-m\left(\lambda\frac{\partial}{\partial x}+\mu\frac{\partial}{\partial y}+\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r},$$

demnach

$$c=m\left(\lambda\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}+\mu\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}+\nu\frac{\partial^2}{\partial z\partial z}\right)\frac{1}{r}.$$

Nach der Laplaceschen Gleichung ist aber $\nabla^2(1/r)=0$, also auch

$$c=m\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{1}{r}-m\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial}{\partial y}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r},$$

$$b)\qquad b=m\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial}{\partial y}-\lambda\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{r}-m\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{1}{r},$$

$$a=m\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial}{\partial x}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}-m\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial}{\partial x}-\lambda\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{r}.$$

Durch Vergleichung dieser Ausdrücke mit den unter 1) für F, G, H gegebenen Definitionsgleichungen erhält man für diesen Fall

$$F=m\left(\nu\frac{\partial}{\partial y}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=\frac{m}{r^3}(\mu z-\nu y),$$

$$2_1)\qquad G=m\left(\lambda\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{1}{r}=\frac{m}{r^3}(\nu x-\lambda z),$$

$$H=m\left(\mu\frac{\partial}{\partial x}-\lambda\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{r}=\frac{m}{r^3}(\lambda y-\mu x).$$

Daraus folgt noch

$$3_1)\qquad \mathfrak{A}=\frac{m}{r^2}\sin(m, r).$$

Das Vector-Potential eines magnetischen Molekels auf einen magnetischen Einheitspol ist also direct proportional dem magnetischen Moment des Molekels

und dem Sinus des Winkels, den seine Axe mit dem zum Einheitspol führenden Radiusvector bildet, und umgekehrt proportional dem Quadrate seines Abstandes vom Einheitspol. Es steht senkrecht zu der durch die Axe des Molekels und den Radiusvector gelegten Ebene und ist so gerichtet wie der Zeiger einer Uhr, die ein in Richtung der positiven Magnetisirungsaxe schauendes Auge vor sich sieht, wenn er im Laufe der Zeit in eine zu der betreffenden Ebene senkrechte Lage kommt.

Vector-Potential eines Magnets. Bezeichnet man mit A, B, C die Magnetisirungscomponenten im Punkte x, y, z eines Magnets, so sind dem obigen zufolge die Componenten des Vector-Potentials des Magnets in einem um r von seinen einzelnen Partikeln abstehenden Einheitspol ξ, η, ζ

$$F=\iiint\left(B\frac{\partial p}{\partial z}-C\frac{\partial p}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz,$$

$$2)\qquad G=\iiint\left(C\frac{\partial p}{\partial x}-A\frac{\partial p}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

$$H=\iiint\left(A\frac{\partial p}{\partial y}-B\frac{\partial p}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz;$$

$$p=\frac{1}{r}.$$

Die Integrationen erstrecken sich über den ganzen von der Substanz des Magnets eingenommenen Raum.

405. Es lässt sich leicht zeigen, dass man umgekehrt aus den Componenten des Vector-Potentials die der Induction ableiten kann. Man erhält nämlich nach den unter 1) und 2) in Art. 404 gegebenen Gleichungen

$$a=\frac{\partial H}{\partial\eta}-\frac{\partial G}{\partial\zeta}$$

$$=\iiint\left\{A\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial\eta}+\frac{\partial^2 p}{\partial z\,\partial\zeta}\right)-B\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial\eta}-C\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial\zeta}\right\}dx\,dy\,dz.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial\xi},\quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial\eta},\quad \frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial\zeta},$$

demnach

$$a=-\frac{\partial}{\partial\xi}\iiint\left(A\frac{\partial p}{\partial x}+B\frac{\partial p}{\partial y}+C\frac{\partial p}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

$$-\iiint A\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Das dreifache Integral im ersten Gliede repräsentirt, wie aus Art. 385

zu ersehen ist, das Scalar-Potential V des Magnets, das ist das Potential im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Ferner ist

$$\iiint A\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz = -4\pi(A),$$

wenn (A) den Wert des A im Punkte (ξ, η, ζ) bezeichnet.

Liegt der Punkt (ξ, η, ζ) ausserhalb des Magnets, so ist in ihm der Wert von A gleich Null, das zweite Glied fällt dann aus dem Ausdruck für a heraus, es bleibt

$$a = -\frac{\partial V}{\partial \xi}.$$

Befindet sich dagegen (ξ, η, ζ) innerhalb des Magnets, so wird

$$a = -\frac{\partial V}{\partial \xi} + 4\pi(A).$$

$-\partial V/\partial\xi$ ist aber die in Richtung der x Axe verlaufende Componente α der magnetischen Kraft des Magnets, so dass

$$a = \alpha + 4\pi(A)$$

resultirt. Entsprechende Ausdrücke gelten für die andern Componenten b, c der Induction. Sie fallen aber völlig mit den in Art. 399 für sie schon abgeleiteten zusammen.

Unterwirft man das Vector-Potential $\mathfrak{A}$ der in Art. 25 definirten Hamiltonschen Operation ∇, so resultirt

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} &= \nabla \mathfrak{A}\\ &= -\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\partial G}{\partial \eta}+\frac{\partial H}{\partial \zeta}\right)\\ &\quad + i\left(\frac{\partial H}{\partial \eta}-\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)+j\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}-\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)+k\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}-\frac{\partial F}{\partial \eta}\right).\end{aligned}$$

Der scalare Teil dieser Operation verschwindet aber, denn aus den Definitionsgleichungen 1) der F, G, H folgt

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\partial G}{\partial \eta}+\frac{\partial H}{\partial \zeta} = 0, \tag{4}$$

und es bleibt

$$\begin{aligned}\nabla \mathfrak{A} &= i\left(\frac{\partial H}{\partial \eta}-\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)+j\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}-\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)+k\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}-\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\\ &= ia + jb + kc\end{aligned} \tag{5}$$

oder

$$\mathfrak{B} = \nabla \mathfrak{A}.$$

Die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ wird also aus dem Vector-Potential A durch dieselbe Operation ∇ gewonnen wie die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ aus dem Scalar-Potential V. Sie ist nach der Nomenclatur des Art. 25 die Rotation des Vector-Potentials.

Magnetische Inductionslinien und Inductionsröhren.

406. Verschwindet die Normalcomponente der Induction für einen Teil einer Fläche, so findet durch diesen Teil keine magnetische Induction statt.

Flächen, in deren Punkten die Normalcomponente der Induction keinen merkbaren Wert besitzt, für die also die Gleichung

$$1)\qquad la + mb + nc = 0$$

an jeder Stelle erfüllt ist, heissen *Flächen der Nichtinduction.*

Zwei Flächen der Nichtinduction schneiden sich in einer *Inductionslinie.*

Daraus ergeben sich für die Existenz einer Inductionslinie s die Bedingungsgleichungen

$$2)\qquad \frac{1}{a}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\frac{dy}{ds} = \frac{1}{c}\frac{dz}{ds}.$$

Zieht man durch alle Punkte einer geschlossenen Curve Inductionslinien, so bilden diese die Mantelfläche eines röhrenförmigen Raumes, den man als *Inductionsröhre* bezeichnet.

Die Induction hat für alle Querschnitte einer Inductionsröhre einen und denselben Wert. Besitzt sie also an einem Querschnitt den Wert Eins, so ist sie durch die ganze Röhre hindurch gleich Eins, desshalb heisst eine Inductionsröhre, an deren Querschnitten die magnetische Induction von dem numerischen Betrage Eins ist, eine *Einheitsröhre.*

Alles was Faraday*) von magnetischen Kraftlinien und magnetischen Sphondyloiden aussagt, gilt, wenn man es mathematisch auffasst, seiner ganzen Ausdehnung nach für die oben definirten magnetischen Inductionslinien und Inductionsröhren.

Doch sind magnetische Kraft und magnetische Induction, wie wir wissen, im allgemeinen nicht zusammenfallende Begriffe. Ausserhalb eines Magnets sind sie freilich identisch, innerhalb eines solchen, das heisst, innerhalb seiner Substanz, müssen sie aber sorgfältig von einander unterschieden werden.

Bei einem geraden, gleichmässig magnetisirten Stab ist die vom Magnet selbst verursachte Kraftwirkung ausserhalb wie innerhalb desselben vom Nordpol nach dem Südpol oder, wie wir auch sagen, vom positiven nach dem negativen Ende hin gerichtet. Dagegen wirkt die Induction ausserhalb

*) *Exp. Res.*, series XXVIII.

des Magnets entgegengesetzt wie innerhalb desselben, nämlich dort vom positiven zum negativen, hier vom negativen zum positiven Pol. Die Inductionslinien und Inductionsröhren haben also in diesem Falle Rückkehrstellen, sie sind cyklische Configurationen.

Ich habe hier die magnetische Induction rein formal eingeführt, später bei der Behandlung der electromagnetischen Phänomene wird sich aber zeigen, dass sie auch als physikalische Grösse von eminentester Bedeutung ist. Dort wird der Leser mit dem Worte Induction auch bestimmte Vorgänge verbinden lernen, doch bemerke ich hier schon, dass, wenn man ein magnetisches Feld, wie es in Faradays *Res.* 3076 geschieht, durch einen von Ort zu Ort transportirten Draht untersucht, die direct gemessene Grösse nicht die magnetische Kraft, sondern die magnetische Induction ist.

Cap. III.

Magnetische Solenoide und Magnetische Schalen.

Magnetische Solenoide.

Definition eines magnetischen Solenoids.

407a. Wird ein langer dünner Faden einer magnetischen Substanz, etwa ein Draht, an allen Stellen in Richtung seiner Länge, *Longitudinal,* magnetisirt, so heisst das Product eines Querschnitts desselben in die daselbst herrschende mittlere Intensität der Magnetisirung die *Stärke* des Magnets an der betreffenden Stelle. Schneidet man den Faden an der betreffenden Stelle in zwei Teile, ohne dabei seine Magnetisirung zu alteriren, so findet man an den beiden Trennungsflächen, wenn sie nicht mehr aneinanderliegen, magnetische Flächenverteilung von gleicher Grösse, aber entgegengesetztem Zeichen. Die Stärke der Flächenverteilung ist an jeder der beiden Trennungsflächen numerisch gleich der Stärke, die der Magnet im unversehrten Zustande an dem betreffenden Querschnitte besass.

Ein Faden magnetischer Materie, der so magnetisirt ist, dass seine Stärke seiner ganzen Ausdehnung nach in allen Querschnitten eine und dieselbe Grösse besitzt, heisst ein *Magnetisches Solenoid.*

Potential eines Solenoids.

407b. Ich bezeichne mit m die Stärke eines Solenoids, mit ds die Länge eines Elements desselben, mit r den Abstand dieses Elements von einem gegebenen Punkt und nenne ε den Winkel, den der Radiusvector mit der Magnetisirungsaxe des betreffenden Elements einschliesst. Das Potential des Elements hat dann in dem gegebenen Punkte den Wert

$$dV = \frac{m\,ds}{r^2}\cos\varepsilon = \frac{m}{r^2}\frac{dr}{ds}\,ds.$$

Da m überall im Solenoid gleichwertig sein sollte, so giebt eine Integration, die alle Elemente des Solenoids umfasst, das Potential des Solenoids auf den betreffenden Punkt

$$V = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

r_1 ist der Abstand des Punktes von dem positiven, r_2 der von dem negativen Ende des Solenoids.

Denselben Wert würden wir aber auch gefunden haben, wenn wir von vornherein nur die Enden des Solenoids in Betracht gezogen hätten; es hängt also das Potential eines magnetischen Solenoids und demgemäss jeder seiner magnetischen Effecte lediglich von der Stärke und Lage seiner beiden Endpunkte, dagegen gar nicht von seiner Form, die beliebig gekrümmt oder gerade sein darf, ab.

Die Enden eines Solenoids können im strengsten Sinne des Wortes als seine Pole angesehen werden.

Läuft ein magnetisches Solenoid in sich zurück, so fallen seine beiden Enden zusammen und ihre Wirkungen heben sich auf. Ein geschlossenes Solenoid bringt also gar keine magnetische Wirkung hervor, man vermag seine Magnetisirung nicht eher zu entdecken, als bis man ihm an einer Stelle durch Entzweibrechen und Auseinanderziehen zwei getrennte Enden verliehen hat.

Solenoidale Magnetisirung.

407c. Ein Körper ist *Solenoidal magnetisirt*, wenn er sich in lauter Solenoide zerlegen lässt, die entweder geschlossene Curven bilden oder in der Aussenfläche des Magnets ihre Enden finden.

Da die Wirkung eines solchen Magnets nur von der der Enden seiner Solenoide abhängt, so besitzt ein solenoidal magnetisirter Körper von den beiden supponirten Verteilungen magnetischer Materie nur die Flächenverteilung.

Nach Art. 385 müssen die Magnetisirungscomponenten A, B, C in jedem Punkte eines solenoidal magnetisirten Körpers der Bedingung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

genügen.

Potential eines solenoidal magnetisirten Magnets.

408. Das scalare Potential eines Magnets hat nach Art. 385 den Wert

$$V = \iiint \left\{ A\frac{\partial p}{\partial x} + B\frac{\partial p}{\partial y} + C\frac{\partial p}{\partial z} \right\} dx\,dy\,dz,$$

wo p für $1/r$, den reciproken Wert des Abstandes des Elements $dx\,dy\,dz$ der magnetischen Substanz von dem Punkte (ξ, η, ζ), für den das Potential gelten soll, gesetzt ist.

Durch partielle Integration findet sich wie in Art. 385, 4b)

$$V=\iint p\,(Al+Bm+Cn)\,dS-\iiint p\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

wenn l, m, n die Richtungscosinusse der zur Fläche S im Element dS nach aussen gezogenen Normale angeben.

Nach dem vorhergehenden Art. 407c ist aber für einen solenoidal magnetisirten Magnet

$$\text{1)}\qquad \frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0,$$

demnach

$$\text{2a)}\qquad V=\iint p\,(lA+mB+nC)\,dS.$$

Bezeichnet man mit N die Normalcomponente der Magnetisirung des Oberflächenelements dS des Magnets, so wird auch

$$\text{2b)}\qquad V=\iint pN\,dS=\iint\frac{1}{r}\,N\,dS.$$

Das Potential eines solenoidalen Magnets ist also für jeden Punkt des Raumes, er mag innerhalb oder ausserhalb des Magnets liegen, lediglich durch die Magnetisirung der Oberfläche desselben bestimmt, es hängt gar nicht von der Form der Solenoide, in welche der Magnet soll zerlegt werden können, ab.

Complexe Solenoide.

409. Einen longitudal magnetisirten Faden, dessen magnetische Stärke von Querschnitt zu Querschnitt variirt, kann man sich als aus einem Bündel von Solenoiden verschiedener Länge bestehend denken. Die Summe der Stärken aller durch einen bestimmten Querschnitt des Fadens gehenden Solenoide ist dann gleich der Stärke des Fadens in dem betreffenden Querschnitte. Man darf also jeden longitudinal magnetisirten fadenförmigen Körper als ein *Complexes Solenoid* betrachten.

Bezeichnet m die Stärke in einem bei ds liegenden Querschnitt eines complexen Solenoids, so ist das Potential des Solenoids

$$V=\int\frac{m}{r^2}\,\frac{dr}{ds}\,ds.$$

Hier ändert aber m von Querschnitt zu Querschnitt seinen Wert, und man hat

$$V = \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} - \int \frac{1}{r} \frac{dm}{ds} ds.$$

Die Wirkung eines complexen Solenoids setzt sich also aus der Wirkung seiner beiden eventuell verschieden stark magnetisirten Enden und aus der Wirkung der längs des Solenoids mit der Dichte

$$\lambda = -\frac{dm}{ds}$$

verteilten supponirten magnetischen Materie zusammen.

Magnetische Schalen.

Definition einer magnetischen Schale.

410. Wird ein dünner schalenförmiger Körper an allen Stellen in einer zu seiner Begrenzungsfläche normalen Richtung magnetisirt, so bildet er eine einfache oder eine complexe *Magnetische Schale*. Das Product aus der Magnetisirungsintensität in die Dicke der Schale an einer bestimmten Stelle heisst die *Stärke* der magnetischen Schale an der betreffenden Stelle.

Hat die Stärke in der ganzen Ausdehnung der Schale eine und dieselbe Grösse, so ist die Schale *Einfach*; variirt sie von Punkt zu Punkt, so ist sie *Complex*, man kann sich dann die Schale als aus einzelnen übereinander gelagerten und übergreifenden einfachen Schalen zusammengesetzt denken.

Potential einer magnetischen Schale.

411a. Bezeichnet dS das einen Punkt Q umgebende Flächenelement und Φ die in diesem Element herrschende Stärke der Schale, so ist das von diesem Schalenelement in einem um r von ihm abstehenden Punkt P verursachte Potential

$$dV = \Phi \frac{1}{r^2} dS \cos\varepsilon, \tag{1a}$$

wo ε den Winkel angiebt, den der Radiusvector mit der von der positiven Seite der Schale aus zu dS gezogenen Normale bildet.

Ist aber $d\omega$ der körperliche Winkel, unter dem das Flächenelement dS vom Punkte P aus gesehen wird, so hat man

$$r^2 d\omega = dS \cos\varepsilon, \tag{a}$$

demnach auch

$$dV = \Phi\, d\omega. \tag{1b}$$

Das Potential einer einfachen magnetischen Schale ist

2a) $$V = \Phi\omega,$$

also gleich dem Product aus der Stärke der Schale in den körperlichen Winkel, unter dem ihre Kante von dem Punkte, für den das Potential gelten soll, gesehen wird.*)

411 b. Auf anderem Wege gelangt man zu diesem wichtigen Satz, wenn man umgekehrt die potentielle Energie, welche in der Schale, dadurch dass man sie in ein magnetisches Feld bringt, hervorgerufen wird, nach den in Art. 389 gegebenen Anleitungen aufsucht.

Bezeichnet also V das Potential an der Stelle des magnetischen Feldes, wo das Element dS der Schale sich befindet, so ist die in diesem Element verursachte potentielle Energie nach den diesbezüglichen Formeln des citirten Artikels

3) $$dW = \Phi\left(l\frac{\partial V}{\partial x} + m\frac{\partial V}{\partial y} + n\frac{\partial V}{\partial z}\right)dS,$$

also gleich der Stärke der Schale multiplicirt mit dem Flächenintegral von V für das Element dS der Schale.

Summirt man dW für alle Elemente der Schale, so wird

4) $$W = \Phi\iint\left(l\frac{\partial V}{\partial x} + m\frac{\partial V}{\partial y} + n\frac{\partial V}{\partial z}\right)dS.$$

Die auf der Schale durch ihre Existenz im magnetischen Felde hervorgerufene potentielle Energie ist dann gleich der magnetischen Stärke der Schale multiplicirt mit dem über sie erstreckten Flächenintegral der Induction.

Aus Art. 403 wissen wir aber, dass das Flächenintegral der Induction nicht von der Form der Schalenfläche, sondern nur von der ihrer Begrenzung abhängen kann, es hat für alle Schalen, die mit der gegebenen Schale dieselbe Kante besitzen und kein äusseres magnetisches Kraftcentrum einschliessen, einen und denselben Wert.

Ich setze jetzt voraus, dass das magnetische Feld durch die Existenz eines magnetischen Pols von der Stärke m hervorgerufen wird. Das Flächenintegral der magnetischen Induction über eine Schale ist dann, wie man aus Art. 76, 3) ersieht, gleich dem Product aus der Stärke m des Pols in den körperlichen Winkel, den die Kante der Schale im Pole bildet. Die durch die gegenseitige Einwirkung von Pol und Schale verursachte potentielle Energie des Pols auf die Schale wird demnach gleich $\Phi\omega m$. Dieselbe Grösse stellt aber auch umgekehrt nach dem Greenschen Satz (Art. 98, man sehe auch Art. 385) die potentielle Energie der Schale auf den magnetischen Pol dar. Wird also, wie wir angenommen haben, der Pol ein Einheitspol, d. h. $m = 1$, so reducirt sich das Potential der Schale auf ihn auf $\Phi\omega$.

*) Der Satz ist von Gauss entdeckt worden.

412. Geht ein magnetischer Pol von einem auf der negativen Seite der Schale gelegenen Punkt auf irgend einem Wege um die Schale herum zu einem auf der positiven Seite derselben befindlichen und dem Ausgangspunkte sehr nahe gelegenen andern Punkt, so ändert sich der körperliche Winkel, dessen Spitze mit ihm mitwandert, continuirlich und wächst um 4π an. Die vom Pol während seiner Bewegung geleistete Arbeit ist also gleich $4\pi m\Phi$, demgemäss besteht zwischen zwei unendlich benachbarten, aber durch die Schale getrennten Punkten eine Potentialdifferenz von der Grösse $4\pi\Phi$, und das Potential in dem auf der positiven Seite der Schale gelegenen Punkt ist um $4\pi\Phi$ grösser als das in dem auf der negativen Seite derselben befindlichen.

Während also ein Punkt von der negativen Seite zu der positiven durch die Schale durchgeht, ändert sich sein Potential um $4\pi\Phi$.

Diese Aenderung geschieht aber nicht plötzlich, sie wächst ganz continuirlich, auf dem Wege durch die Substanz der Schale, der man ja immer eine gewisse Dicke wird zuschreiben müssen, an. Liegt nämlich der Punkt P innerhalb der Schale, so kann man die Schale durch ein durch ihn gehendes Diaphragma in zwei Lamellen zerteilen. Hat die eine Lamelle die Stärke Φ_1, die andere die Stärke Φ_2, so ist

$$\text{b)} \qquad \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$$

zu setzen, und der Punkt P befindet sich auf der positiven Seite der Lamelle Φ_1 und auf der negativen der Lamelle Φ_2. Das Potential ist also an der von ihm eingenommenen Stelle der Schalensubstanz

$$\text{2b)} \qquad \begin{aligned} V_i &= \omega(\Phi_1 + \Phi_2) - 4\pi\Phi_2 \\ &= \omega\Phi - 4\pi\Phi_2. \end{aligned}$$

Auf der negativen Seite der Schale wird hieraus

$$V_{a-} = \Phi_2(\omega - 4\pi), \quad \Phi_2 = \Phi.$$

Geht der Punkt P von der negativen Seite aus durch die Schale hindurch, so nimmt Φ_2 continuirlich ab, Φ_1 continuirlich zu, ist er auf der positiven Seite derselben angelangt, so hat Φ_2 den Wert Null, Φ_1 den Wert Φ erlangt, und das Potential wird

$$V_{a+} = \omega\Phi_1, \quad \Phi_1 = \Phi.$$

Das Potential einer magnetischen Schale ändert sich also ganz continuirlich.

Das Potential einer geschlossenen Schale ist a u s s e r h a l b derselben überall gleich Null, i n n e r h a l b der Schale wird es also $\pm 4\pi\Phi$ sein, je nachdem die positive Seite der Schale nach innen oder nach aussen gekehrt ist.

Daraus folgt, dass eine geschlossene magnetische Schale weder auf innerhalb noch auf ausserhalb ihrer Fläche gelegene Punkte irgend welche Wirkung auszuüben vermag.

Digression über körperliche Winkel.

413. Ich habe schon gezeigt, dass das Potential einer magnetischen Schale auf einen Punkt P gleich der Stärke der Schale ist, multiplicirt mit dem körperlichen Winkel, unter dem die Kante der Schale von dem betreffenden Punkte P aus gesehen wird. Da wir nun auch in der Theorie der electrischen Ströme uns oft der körperlichen Winkel zu bedienen haben werden, so will ich in dieser Abschweifung auseinander setzen, wie man solche Winkel in jedem Falle zu messen hat.

Definition. Der *Körperliche Winkel einer geschlossenen Curve in einem gegebenen Punkt* wird durch den Inhalt des Flächenstücks gemessen, welches ein von dem gegebenen Punkte ausgehender Fahrstrahl, während er die betreffende Curve beschreibt, aus einer um den gegebenen Punkt mit dem Radius Eins gelegten Kugelfläche ausschneidet. Das Flächenstück ist positiv, bezüglich negativ zu rechnen, je nachdem es zur Linken, bezüglich zur Rechten von dem Wege des Fahrstrahls, wie er vom gegebenen Punkte aus erscheint, liegt.

Die Coordinaten x, y, z eines Punktes der geschlossenen Curve sind periodische Functionen der von einem festen Punkte dieser Curve aus gerechneten Bogenlänge s derselben. So oft s um die ganze Länge der Curve anwächst, erreichen diese Coordinaten wieder ihre ursprünglichen Werte.

Directe Berechnung. Der körperliche Winkel ω der Curve an dem Punkte (ξ, η, ζ) kann nun zunächst direct aus seiner Definition berechnet werden.

Benutzt man nämlich sphärische Coordinaten, deren Pol im Punkte (ξ, η, ζ) liegt, so ist

$$x - \xi = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y - \eta = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z - \zeta = r \cos\vartheta.$$

ϑ giebt die Breite, φ die Länge der Stelle, wo der Fahrstrahl die Kugel schneidet, an. Das auf der Einheitskugel gelegene Flächenstück, also unserer Definition nach der körperliche Winkel der Curve ist dann

$$\text{1a)} \qquad \omega = \int (1 - \cos\vartheta)\, d\varphi = \int d\varphi - \int \cos\vartheta\, d\varphi,$$

oder, wenn man im zweiten Integral rechtwinklige Coordinaten einführt,

$$\text{1b)} \qquad \omega = \int d\varphi - \int_0^s \frac{z - \zeta}{r\,[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]} \left\{ (x - \xi) \frac{dy}{ds} - (y - \eta) \frac{dx}{ds} \right\} ds.$$

Die Integrationen erstrecken sich längs der ganzen Curve s.

Geht die z Axe einmal durch die von der Curve begrenzte Fläche, so ist das erste Glied $\int d\varphi = 2\pi$, trifft sie aber dieselbe gar nicht, so wird $\int d\varphi = 0$.

414. Die eben auseinandergesetzte Methode zur Berechnung körperlicher Winkel involvirt die Wahl von Coordinatenaxen, die ganz willkürlich gelegt werden können, ihre Anwendung hängt also nicht blos von der Form der geschlossenen Curve ab.

Geometrische Darstellung. Ich setze deshalb noch eine andere Methode auseinander, die vom geometrischen Standpunkte gerechtfertigter erscheint und keine Hilfsflächen zu construiren zwingt.

Während der Fahrstrahl von dem gegebenen Punkte aus die geschlossene Curve Punkt für Punkt zeichnet, lassen wir eine durch den gegebenen Punkt gehende Ebene an der geschlossenen Curve so rollen, dass sie in ihren auf einander folgenden Lagen immer als Berührungsebene der Curve erscheint. Zieht man im gegebenen Punkt an die betrachtete Ebene eine Senkrechte von der Länge Eins, so wird deren Endpunkt, während die Ebene auf der Curve rollt, eine andere geschlossene Curve beschreiben, die zur Definition des körperlichen Winkels unserer ursprünglichen Curve dient. Ist nämlich die gesammte Länge dieser zweiten Curve gleich σ, so haben wir

$$\text{1c)} \qquad \omega = 2\pi - \sigma.$$

Die Uebereinstimmung dieser Definition mit der vorher in Art. 413 gegebenen folgt aus dem bekannten Satze, dass das von einer geschlossenen Curve auf einer Kugel vom Radius Eins begrenzte Flächenstück zusammen mit der Länge des Umfangs ihrer Polarcurve numerisch gleich der Länge des Umfangs eines grössten Kreises der Kugel ist.

Die durch die Gleichung 1c) vorgeschriebene Methode lässt sich namentlich bei der Berechnung der körperlichen Winkel geradliniger Figuren mit Vorteil verwenden. Doch führe ich noch eine dritte Methode an, die für uns, die wir nach klarer Auffassung der physikalischen Erscheinungen streben, deshalb geeigneter als die beiden vorangehenden ist, weil sie keine Constructionen erfordert, die nicht unmittelbar aus der physikalischen Bedeutung der Grösse, mit der wir es zu tun haben, fliessen.

415. Physikalische Ableitung. Wir haben also eine geschlossene Curve im Raume und sollen den körperlichen Winkel bestimmen, den sie an einem gegebenen Punkt P bildet.

Betrachten wir den körperlichen Winkel als das Potential einer magnetischen Schale, deren Stärke gleich Eins ist und deren Kante mit der geschlossenen Curve s zusammenfällt, so müssen wir ihn als die Arbeit definiren, die ein magnetischer Einheitspol, während er sich aus der Unendlichkeit bis zum Punkt P bewegt, gegen die magnetische Kraft der Schale leistet. Daraus folgt, dass dieser körperliche Winkel sich durch eine längs der Bahn σ des sich bewegenden Punktes ausgeführte Integration bestimmen lassen wird. Sein Wert muss aber auch aus einer Integration längs der geschlossenen Curve s folgen, daher wird der eigentliche Ausdruck für den körperlichen Winkel in einem Doppelintegral längs der Curve s und längs der Curve σ bestehen.

Liegt nun P in der Unendlichkeit, so ist der körperliche Winkel offenbar gleich Null, die geschlossene Curve s erscheint dann in ihm wie ein Punkt. Je mehr er in die Endlichkeit rückt, desto mehr scheint sich jene Curve, von ihm aus gesehen, zu öffnen. Ihre einzelnen Elemente scheinen sich transversal zu verrücken. Die Entstehung des körperlichen Winkels ist als das Resultat dieser scheinbaren Bewegung der Elemente der Curve s bei der Annäherung des Punktes P aus der Unendlichkeit zu betrachten.

Während der Punkt P sich längs der Strecke $d\sigma$ von P nach P' bewegt, verrückt ein Element $QQ' = ds$ der Curve s seine relative Lage gegen P. Zugleich schiebt sich das QQ' entsprechende Element der auf der Einheitskugel liegenden Linie über ein Flächenstückchen der Kugel, das wir durch die Grösse

$$d\omega = \Pi\, ds\, d\sigma$$

darstellen können.

Zur Bestimmung der Grösse Π kehren wir die Vorgänge um, wir lassen P seinen Ort im Raume behalten und verrücken die Curve s um dasselbe Stück $d\sigma = PP'$, um welches sich früher P bewegt haben sollte, aber in entgegengesetzte Richtung. P kommt dann zu s relativ in dieselbe Lage wie vorher, da s still stand und P sich bewegte.

Während seiner Verrückung beschreibt das Element $QQ' = ds$ der Curve s ein Flächenstück in Form eines Parallelogramms, dessen Seiten parallel QQ' und PP' laufen. Construirt man auf diesem Parallelogramm eine Pyramide, deren Spitze in P liegt, so schneidet ihr Mantel von der Fläche der Einheitskugel das Increment $d\omega$ aus, dessen Grösse wir gerade bestimmen wollen.

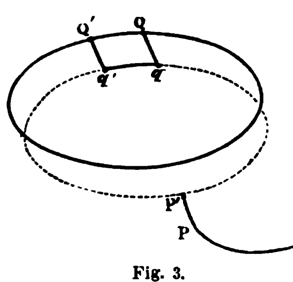


Fig. 3.

Seien ϑ und ϑ' die Winkel, welche ds bezüglich $d\sigma$ mit PQ bilden, und es bezeichne φ den Winkel, den die Ebenen der beiden genannten Winkel mit einander einschliessen. Der Flächeninhalt der Projection des Parallelogramms $ds\, d\sigma$ auf eine zu $PQ = r$ senkrechte Ebene ist dann

$$ds\, d\sigma \sin\vartheta \sin\vartheta' \sin\varphi.$$

Dieselbe Projection ist aber auch gleich $r^2\, d\omega$, also haben wir

$$d\omega = \Pi\, ds\, d\sigma = \frac{1}{r^2} \sin\vartheta \sin\vartheta' \sin\varphi\, ds\, d\sigma.$$

416. Aus der letzten Gleichung des vorhergehenden Artikels folgt

$$\Pi = \frac{1}{r^2} \sin\vartheta \sin\vartheta' \sin\varphi. \tag{2a}$$

Die Functionen der Winkel ϑ, ϑ' und φ lassen sich durch r und seine Derivirten nach s und σ darstellen, denn es ist (Art. 512)

$$\cos\vartheta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \quad \cos\vartheta' = -\frac{\partial r}{\partial \sigma},$$

und

$$\sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\varphi = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \cos(ds, d\sigma)$$

$$= \cos\vartheta\cos\vartheta' - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma} - \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial \sigma}$$

$$= -r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma},$$

somit wird

2b) $$\Pi^2 = \frac{1}{r^4}\left[1 - \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\partial r}{\partial \sigma}\right)^2\right] - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial\sigma}\right)^2.$$

Ein dritter Ausdruck ergiebt sich für Π, wenn man den Inhalt der Pyramide, deren körperlicher Winkel gleich $d\omega$ und deren Axe gleich r ist, in verschiedener Weise ausdrückt. Dieser Inhalt ist nämlich zunächst

$$\frac{1}{3}r^3\,d\omega = \frac{1}{3}r^3\Pi\,ds\,d\sigma.$$

Ferner lässt sich dieser Inhalt nach einem bekannten Satze aus der analytischen Geometrie des Raumes durch die neun Projectionen von r, ds und $d\sigma$ auf die Axen der x, y, z, indem man von ihrer Determinante den dritten Teil nimmt, berechnen. Durch Gleichsetzung bekommt man dann

2c) $$\Pi = \frac{1}{r^3}\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \frac{d\xi}{d\sigma} & \frac{d\eta}{d\sigma} & \frac{d\zeta}{d\sigma} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix}.$$

Der Zweifel, den der zweite unter 2b) gegebene Ausdruck für Π hinsichtlich des Zeichens dieser Grösse noch lässt, existirt beim dritten Ausdruck nicht mehr.

417. Wir haben nunmehr für den Wert des körperlichen Winkels der geschlossenen Curve am gegebenen Punkte P

1d) $$\omega = \iint \Pi\,ds\,d\sigma + \omega_0.$$

Die Integration nach s erstreckt sich über die ganze Curve s, die nach σ dagegen von einem Punkte A dieser Curve bis zu dem Punkte P. ω_0 bezeichnet dann die Grösse des körperlichen Winkels von s bei dem Punkte A. Liegt A unendlich weit von s entfernt, so ist $\omega_0 = 0$ zu setzen.

Der Wert von ω hängt, so lange die von A nach P führende Curve σ nicht durch die magnetische Schale hindurchgeht, nicht von der Form dieser

Curve σ ab. Trennt eine sehr dünne magnetische Schale zwei einander sehr nahe liegende Punkte P, P', so führen die beiden Wege AP und AP' nach entgegengesetzten Seiten der Schale und sie bilden zusammen mit der sehr kurzen Strecke PP' eine geschlossene, die Kante der Schale umfassende Linie. Liegt P auf der positiven, P' auf der negativen Seite der Schale, so wird ω in P um 4π, das heisst um den Flächeninhalt der Einheitskugel grösser als in P' sein.

Geht daher eine geschlossene Curve σ einmal durch die magnetische Schale, oder — was dasselbe ist — bildet sie eine die Kante einmal umschlingende Schleife, so ist das über die beiden Curven s und σ erstreckte Integral

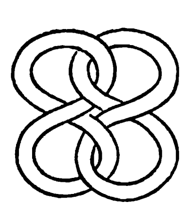
$$1_1) \qquad \iint \Pi\, ds\, d\sigma = 4\pi.$$

Das bezeichnete Doppelintegral ist also vielwertig, es hängt lediglich von der geschlossenen vorgeschriebenen Curve s und der ganz willkürlichen die Punkte A und P verbindenden Curve σ ab, und es hat je nach der Anzahl der Windungen, mit denen die Curve σ die Curve s umgiebt, verschiedene Werte.

Sind zwei Curven σ so gewählt, dass sie in einander übergeführt werden können, ohne die Curve s zu durchschneiden, so hat das betrachtete Integral in beiden Fällen denselben Wert. Durchsetzt aber die zweitgewählte Curve σ bei ihrer Transformation in die erstgewählte die Curve s n mal nach derselben Richtung, so ist der Wert des Integrals im zweiten Fall um $4\pi n$ von dem im ersten Fall geltenden verschieden.

Bilden s und σ zwei geschlossene und nicht mit einander verschlungene Curven, so ist der Wert des Integrals, wenn längs jeder Curve einmal und nur einmal integrirt wird, gleich Null.

Sind die beiden Curven s und σ bei geschlossener Form n mal durch einander nach derselben Richtung geschlungen, so hat das Doppelintegral den Wert $4\pi n$. Die Betonung ist notwendig, denn es können zwei geschlossene Curven — wie das in der beistehenden Figur gezeichnet ist — durch einander alternirend auch nach entgegengesetzten Richtungen so geschlungen sein, dass sie von einander ohne Zerreissung der einen von ihnen nicht getrennt zu werden vermögen. Das Integral ist aber in diesem Falle gleich Null.


Fig. 4.

Gerade seine Entdeckung dieses Integrals, welches die Arbeit bestimmen lehrt, die ein Magnetpol, der sich in Gegenwart eines geschlossenen Stromes längs einer geschlossenen Curve bewegt, leistet, hat Gauss zu Klagen über den geringen Fortschritt, den die Geometrie der Lage seit Leibnitz, Euler und Vandermonde gemacht hat, Veranlassung gegeben. Heutzutage sind aber viele Erfolge auf dem Gebiete dieses Geometrieabschnittes zu verzeichnen, die wir namentlich Riemann, Helmholtz und Listing zu verdanken haben.

Kraftcomponenten einer magnetischen Schale.

418. Ich führe jetzt die einzelnen Integrationen aus und beginne mit der Integration über s.

Benutzt man die dritte unter 2c) gegebene Darstellung für Π und beachtet, dass weder x, y, z noch s von ξ, η, ζ abhängen, so wird

$$\Pi = \frac{d\eta}{d\sigma}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\frac{dz}{ds}\right) - \frac{d\zeta}{d\sigma}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\frac{dy}{ds}\right) + \frac{d\zeta}{d\sigma}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{ds}\right)$$
$$- \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\frac{dz}{ds}\right) + \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\frac{dy}{ds}\right) - \frac{d\eta}{d\sigma}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{ds}\right)$$

oder, wenn man

$$F = \int\frac{1}{r}\frac{dx}{ds}ds, \quad G = \int\frac{1}{r}\frac{dy}{ds}ds, \quad H = \int\frac{1}{r}\frac{dz}{ds}ds$$

setzt,

$$\Pi = \frac{d\eta}{d\sigma}\frac{\partial^2 H}{\partial\xi\partial s} - \frac{d\zeta}{d\sigma}\frac{\partial^2 G}{\partial\xi\partial s} + \frac{d\zeta}{d\sigma}\frac{\partial^2 F}{\partial\eta\partial s} - \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{\partial^2 H}{\partial\eta\partial s} + \frac{d\xi}{d\sigma}\frac{\partial^2 G}{\partial\zeta\partial s} - \frac{d\eta}{d\sigma}\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta\partial s}.$$

Demnach haben wir

$$1) \qquad -\frac{d\omega}{d\sigma} = -\int\Pi\, ds$$
$$= \left(\frac{\partial H}{\partial\eta} - \frac{\partial G}{\partial\zeta}\right)\frac{d\xi}{d\sigma} + \left(\frac{\partial F}{\partial\zeta} - \frac{\partial H}{\partial\xi}\right)\frac{d\eta}{d\sigma} + \left(\frac{\partial G}{\partial\xi} - \frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\frac{d\zeta}{d\sigma}.$$

Die Grösse $-d\omega/d\sigma$ bezeichnet aber das Verhältnis, in welchem ω, also das magnetische Potential der Schale von der Stärke Eins, abnimmt, wenn P sich auf der Curve σ fortbewegt, also stellt der obige Ausdruck für $-d\omega/d\sigma$ die in Richtung $d\sigma$ wirkende magnetische Kraft dar. Lässt man $d\sigma$ nach einander in Richtung der einzelnen Coordinatenaxen fallen, so werden die magnetischen Kraftcomponenten in Richtung dieser Axen

$$2) \qquad \begin{aligned} \alpha &= -\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = \frac{\partial H}{\partial\eta} - \frac{\partial G}{\partial\zeta}, \\ \beta &= -\frac{\partial\omega}{\partial\eta} = \frac{\partial F}{\partial\zeta} - \frac{\partial H}{\partial\xi}, \\ \gamma &= -\frac{\partial\omega}{\partial\zeta} = \frac{\partial G}{\partial\xi} - \frac{\partial F}{\partial\eta}. \end{aligned}$$

Vector-Potential einer magnetischen Schale.

Die Grössen F, G, H sind die Componenten des Vector-Potentials der magnetischen Schale, wenn ihre Stärke gleich Eins angenommen wird.

Unähnlich dem scalaren Potential ω, welches für jeden Punkt eine ganze Reihe von Werten besizt, sind sie überall im Raum vollkommen eindeutig bestimmt.

Man kann dieses Vector-Potential einer magnetischen Schale auf einen Punkt P durch folgende geometrische Construction eruiren.

Man lässt einen Punkt Q längs der Kante der Schale mit einer Geschwindigkeit, die an jeder Stelle seiner Entfernung vom Punkte P numerisch gleich ist, laufen. Man lässt ferner einen zweiten Punkt R vom Punkte A ausgehen und sich mit einer Geschwindigkeit bewegen, die ihn in Richtung der Bahn des Punktes Q hinführt, aber in der Grösse constant gleich Eins ist. Verbindet man, wenn Q gerade einmal die Kante s durchlaufen hat, A mit R, so repräsentirt AR nach Richtung und numerischem Betrage das Vector-Potential der Schale auf den Punkt P.

Potentielle Energie einer magnetischen Schale in einem magnetischen Felde.

419a. Ich habe schon in Art. 411b bemerkt, dass die potentielle Energie einer in einem magnetischen Felde befindlichen Schale

$$M = \Phi \iint \left\{ l \frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial V}{\partial y} + n \frac{\partial V}{\partial z} \right\} dS \tag{1a}$$

ist, wenn l, m, n die Richtungscosinusse der zum Flächenelement dS der positiven Oberfläche S der Schale gezogenen Senkrechten angiebt, und wenn V das Potential des magnetischen Feldes an der Stelle, wo das Element dS liegt, bezeichnet.

Der Factor von Φ, das Doppelintegral, kann aber unter Benutzung der Componenten des Vector-Potentials in ein Linienintegral, längs der Kante s der Schale umgewandelt werden, und man hat

$$M = -\Phi \int \left\{ F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right\} ds, \tag{1b}$$

wo die Integration einmal um die ganze Kante s der Schale herum auszuführen ist. Die Richtung der Integration läuft entgegengesetzt wie der Zeiger einer Uhr, die von der positiven Seite der Schale aus beobachtet wird, die also ihr Zifferblatt der positiven Seite der Schale zukehrt.

Potentielle Energie zweier Schalen auf einander.

419b. Speciell soll das electrische Feld durch die Existenz einer magnetischen Schale S' von der Stärke Φ' hervorgebracht werden. Versetzt man dann eine zweite Schale S von der Stärke Φ in dieses Feld, so wird die potentielle Energie derselben immer noch durch die Gleichung 1b) in

Art. 419a dargestellt; F, G, H hängen aber von der Beschaffenheit der ersten Schale S' und von ihrer Lage relativ zu der zweiten Schale S ab. Nach Art. 404, 2) ist dann, um nur eine der Componenten des Vector-Potentials anzuführen,

$$\text{1a)} \qquad F = \Phi' \iint \left\{ m' \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right) - n' \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} dS',$$

wo l', m', n' der Richtungscosinusse der von der positiven Seite der Schale S' zu dS' gezogenen Normale bezeichnet, x', y', z' sich auf Punkte der Schale S', x, y, z sich auf Punkte der Schale S beziehen und r den Abstand des Elements dS' der Schale S' von dem Element dS der Schale S anzeigt.

Das Flächenintegral lässt sich aber, weil $m'dS' = dx'dz'$, $n'dS' = dx'dy'$ ist, nach bekannten Methoden in ein längs der Kante s' von S' genommenes Linienintegral verwandeln, und man erhält

$$\text{1b)} \qquad \begin{aligned} F &= \Phi' \int \frac{1}{r} \frac{dx'}{ds'} ds', \\ G &= \Phi' \int \frac{1}{r} \frac{dy'}{ds'} ds, \\ H &= \Phi' \int \frac{1}{r} \frac{dz'}{ds'} ds'. \end{aligned}$$

Nach Einsetzung dieser Werte für die Componenten des Vector-Potentials in den Ausdruck 1b) des vorigen Artikels wird die potentielle Energie der Schale S

$$\text{2a)} \qquad M = -\Phi\Phi' \iint \frac{1}{r} \left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} \right) ds\, ds'.$$

Die erste Integration erstreckt sich einmal längs der Cure s', die zweite einmal längs der Curve s.

M ist in Bezug auf s und s' symmetrisch und stellt sowohl die potentielle Energie von S in Gegenwart von S' als die potentielle Energie von S' in Gegenwart von S dar.

Giebt man M das entgegengesetzte Zeichen und setzt die Stärke jeder der beiden Schalen gleich Eins, so heisst M auch das Potential der beiden geschlossenen Curven s und s' auf einander.

In dieser Bedeutung ist M von der grössten Wichtigkeit für die Theorie der electrischen Ströme.

Man hat noch

$$\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} = \cos\varepsilon = \cos(ds, ds'),$$

also für die potentielle Energie der beiden Schalen auf einander

2b) $$M = -\Phi\Phi'\int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds'$$

und für das Potential der beiden Curven s und s' auf einander

3) $$M_1 = \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds'.$$

M_1 hat offenbar die Dimensionen einer Linie.

Lamellare Magnete.

Definition.

420. Ein Magnet, der sich in einfache magnetische Schalen zerlegen lässt, die entweder geschlossene oder durch die Oberfläche des Magnets begrenzte Figuren bilden, hat eine *Lamellare* Construction.

Aus dieser Definition ergiebt sich, dass ein Magnet lamellar magnetisirt ist, wenn seine Magnetisirungscomponenten A, B, C für jeden Punkt (x, y, z) seiner Substanz die ersten Derivirten einer und derselben Function φ von x, y, z sind. Diese Function φ bezeichnet die Summe der Stärken aller Schalen, die ein von einem festen Punkt ausgehender Punkt durchsetzt, wenn er sich auf einem innerhalb der magnetischen Substanz gelegenen, sonst ganz beliebig geformten Weg zu dem Punkte (x, y, z) begiebt. Sie bestimmt völlig die Magnetisirung für jeden Punkt des Magnets und heisst das *Magnetisirungs-Potential.* Man darf aber dieses Magnetisirungs-Potential nicht mit dem *Magnetischen Potential* verwechseln.

Potential eines lamellaren Magnets.

421. Für einen lamellaren Magnet ist also

1) $$A = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Demnach wird das magnetische Potential eines lamellaren Magnets

2a) $$V = \int\int\int \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z} \right\} dx\, dy\, dz,$$

wo p für $1/r$, den reciproken Wert der Entfernung eines Punktes des Magnets von dem Punkte (ξ, η, ζ), für den V gelten soll, gesetzt ist. Nach partieller Integration ergiebt sich

2b) $$V = \int\int \varphi \left\{ l\frac{\partial p}{\partial x} + m\frac{\partial p}{\partial y} + n\frac{\partial p}{\partial z} \right\} dS - \int\int\int \varphi \left\{ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right\} dx\, dy\, dz.$$

Das zweite Integral verschwindet, wenn der Punkt (ξ, η, ζ), auf den das Potential sich bezieht, ausserhalb der magnetischen Substanz liegt, und es wird gleich $4\pi(\varphi)$, d. h. gleich dem 4πfachen des im Punkte (ξ, η, ζ) geltenden Wertes von φ, wenn (ξ, η, ζ) sich innerhalb derselben befindet. Ferner sind im ersten Integral l, m, n die Richtungscosinusse der nach auswärts zur Oberfläche S des Magnets im Element dS gezogenen Normale, bezeichnet also ϑ den Winkel, den diese Normale mit dem Radiusvector r, der von (x, y, z) nach (ξ, η, ζ) gehenden Linie, bildet, so wird

$$l\frac{\partial p}{\partial x} + m\frac{\partial p}{\partial y} + n\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r^2}\cos\vartheta,$$

und

2c) $$V = \iint \varphi \frac{1}{r^2} \cos\vartheta \, dS + 4\pi(\varphi).$$

Die Formel gilt auch für den Fall, wo der Punkt (ξ, η, ζ) ausserhalb der magnetischen Substanz liegt, denn dann ist für ihn selbstverständlich $(\varphi) = 0$.

Geht der Punkt (ξ, η, ζ) durch die Fläche des Magnets, so springt zwar (φ) in dem Ausdrucke seines Potentials von Null bis (φ), aber das Potential selbst bleibt stetig. Bezeichnet man nämlich das in 2c) vertretene Doppelintegral mit Ω_1, wenn (ξ, η, ζ) sich noch gerade innerhalb, und mit Ω_2, wenn (ξ, η, ζ) sich eben ausserhalb des Magnets befindet, so ist, wie sich leicht aus den Betrachtungen des Art. 412 ergiebt,

$$\Omega_2 = \Omega_1 + 4\pi(\varphi),$$

zugleich ist

$$V_1 = \Omega_1 + 4\pi(\varphi)$$
$$V_2 = \Omega_2,$$

also

$$V_2 = V_1.$$

Das Potential eines lamellaren Magnets ändert sich continuirlich beim Durchgang durch seine Oberfläche.

Für die Componenten der Induction des Magnets findet man bei Benutzung der Relation

a) $$\Omega = \iint \varphi \frac{1}{r^2} \cos\vartheta \, dS.$$

3) $$a = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad b = -\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad c = -\frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Vector-Potential eines lamellaren Magnets.

422. Auch das Vector-Potential eines lamellaren Magnets lässt sich bequem umgestalten.

Die x Componente des Vector-Potentials der Induction ist nach Art. 404, 2)

$$1\text{a)} \qquad F = \iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx\, dy\, dz,$$

also nach partieller Integration

$$1\text{b)} \qquad F = \iint \varphi \left(m \frac{\partial p}{\partial z} - n \frac{\partial p}{\partial y} \right) dS,$$

oder auch

$$1\text{c)} \qquad F = \iint p \left(m \frac{\partial \varphi}{\partial z} - n \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dS.$$

Entsprechende Werte haben die beiden anderen Componenten G, H des Vector-Potentials.

Complex-lamellare Magnetisirung.

423. Die Magnetisirung eines Magnets, der sich in complexe Schalen zerlegen lässt, wird als *Complex-lamellar* bezeichnet. Daraus folgt, dass die Magnetisirungslinien eines complex-lamellaren Magnets so verlaufen müssen, dass man in dem Magnete ein System von Flächen zu legen vermag, die sie alle rechtwinklig treffen.

Nun sind die Richtungscosinusse der Magnetisirung bezüglich A/J, B/J, C/J die Existenz solcher Flächen, wird also durch die Existenz der aus der analytischen Geometrie bekannten Gleichung

$$A\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) + B\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) + C\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) = 0$$

bedingt. Für lamellare Magnete, die ein Magnetisirungs-Potential besitzen, wird, wie wir aus Art. 421 wissen, diese Gleichung identisch erfüllt.

Cap. IV.

Inducirte Magnetisirung.

Physikalische Erscheinungen.

Permanente und temporäre Magnetisirung.

424. Ich habe bisher bei der Untersuchung der Wirkungen eines Magnets die Art, wie er in seinen einzelnen Teilchen magnetisirt ist, als mit den andern Bestimmungsstücken vollständig gegeben betrachtet. Daraus erklärt sich, dass bis jetzt noch kein Unterschied zwischen temporärer und permanenter Magnetisirung gemacht worden ist. Nur da, wo ich von den Erscheinungen gesprochen habe, die ein in seine einzelnen Teilchen aufgelöster Magnet bietet, ist, ebenso wie da, wo ein magnetisches Partikel in einem magnetischen Felde ohne Veränderung seiner Magnetisirung verschoben werden sollte, stillschweigend eine permanente Magnetisirung angenommen worden.

Ich bin daher dem Leser noch eine genaue Auseinandersetzung über die Art, wie Körper magnetisirt werden, und wie deren Magnetisirung sich freiwillig oder durch Zwang ändert, schuldig.

Ein Körper, etwa Eisen, kann entweder mit Hilfe des Erdmagnetismus, oder mit Hilfe anderer schon verfertigter Magnete magnetisirt werden. Legt man zum Beispiel einen Eisenstab so hin, dass sein eines Ende nach dem magnetischen Norden hinweist, so wird er durch den Magnetismus der Erde in entgegengesetzter Richtung wie die Erde, also in derselben Richtung wie eine in stabilem Gleichgewicht befindliche Compassnadel magnetisirt. Der Eisenstab wird auch magnetisch, wenn man ihn in ein künstlich hervorgebrachtes magnetisches Feld, etwa zwischen die Pole eines Hufeisenmagnets, bringt.

Entfernt man das Eisenstück aus dem magnetischen Felde, so wird seine Magnetisirung beträchtlich abgeschwächt oder ganz aufgehoben.

Eisen, dessen magnetische Eigenschaften gänzlich von seiner Existenz in einem magnetischen Felde abhängt, dessen Magnetisirung also verschwindet,

so wie man die es magnetisirende Kraft entfernt hat, heisst *Weiches Eisen.* Solches Eisen ist auch im gewöhnlichen Sinne des Wortes weich; es lässt sich biegen und dauernd deformiren, ist demgemäss schwer zu zerbrechen.

Eisen, welches seine magnetischen Eigenschaften zurückbehält, wenn die magnetisirende Kraft aufgehoben wird, heisst *Hartes Eisen.* Hartes Eisen lässt sich nicht so leicht magnetisiren wie weiches, doch kann man es durch Hämmern, oder durch irgend eine andere Operation, die es in Schwingungen versetzt, zwingen, unter dem Einfluss einer magnetischen Kraft, schneller den magnetischen Zustand anzunehmen. Dieselben Processe gestatten auch, ihm schneller den Magnetismus zu entziehen, wenn die magnetisirende Kraft nicht mehr wirkt. Eisen, welches in magnetischem Sinne hart ist, lässt sich auch schwer biegen und leicht brechen.

Man kann durch Hämmern, Strecken, Ziehen und durch plötzliches Abkühlen nach vorangegangener Erhitzung weiches Eisen härten, und durch Glühen und langsames Abkühlen hartes Eisen wieder weich machen.

In derselben Weise wie beim Eisen hat man auch beim Stahl zwischen weichem und hartem Stahl zu unterscheiden. Doch sind die magnetischen und mechanischen Differenzen zwischen weichem und hartem Stahl noch weit stärker markirt, als die zwischen weichem und hartem Eisen. Weicher Stahl lässt sich so leicht magnetisiren und entmagnetisiren wie weiches Eisen, harter Stahl hält aber die Magnetisirung stärker zurück wie hartes Eisen und giebt das beste Material zur Construction permanenter Magnete.

Gusseisen ist zwar stärker mit Kohle versetzt als Stahl, hält aber die Magnetisirung nicht so gut wie dieser zurück.

Ein Körper, dessen magnetische Verteilung durch keine auf ihn einwirkende magnetische Kraft geändert zu werden vermag, kann als *Rigidmagnetisirt* betrachtet werden. Der einzige Körper, von dem man sagen kann, dass er diese Bedingung wirklich erfüllt, ist ein Leitungsdraht, durch den ein unveränderlicher electrischer Strom fliesst. Ein solcher von einem Strom durchflossener Draht zeigt nämlich magnetische Eigenschaften, die durch keine im Felde etwa befindliche magnetische Kraft afficirt werden. Doch komme ich im vierten Teil dieses Werkes noch weitläufig darauf zurück.

Alle wirklichen Magnete, sie mögen aus Magneteisenstein bestehen oder erst künstlich aus gehärtetem Stahl hergestellt sein, werden durch magnetische Kräfte, die man auf sie einwirken lässt, in ihrer Magnetisirung beeinflusst.

Es hat sich für die Wissenschaft als vorteilhaft erwiesen, zwischen permanenter und temporärer Magnetisirung zu unterscheiden.

Eine Magnetisirung ist *Permanent,* wenn sie unabhängig von der Existenz magnetisirender Kräfte besteht, sie ist *Temporär,* wenn sie an die Existenz magnetisirender Kräfte gebunden ist. Ich muss aber bemerken, dass diese Unterscheidung der beiden Magnetisirungsarten nicht aus einer Kenntnis der inneren Natur der magnetisirbaren Substanzen abgeleitet ist; sie bildet nur den Ausdruck einer Hypothese, die man eingeführt hat, um die

Magnetisirungsphänomene dem Calcul unterwerfen zu können. Auf die physikalische Theorie der Magnetisirung werde ich im sechsten Capitel eingehen.

Paramagnetische und Diamagnetische Induction, Magnekrystallkraft.

425. Im Folgenden werden wir uns zunächst lediglich mit der temporären Magnetisirung beschäftigen. Wir werden also Körper voraussetzen, deren innere Beschaffenheit es bedingt, dass die Magnetisirung ihrer einzelnen Teilchen nur von der magnetisirenden Kraft, die die betreffenden Teilchen angreift, bestimmt wird. Die auf ein Teilchen solcher Körper wirkende magnetische Kraft hängt dann zu einem Teil von äusseren Ursachen, zum andern Teil von der temporären Magnetisirung der umliegenden Teilchen ab.

Von einem in dieser Weise durch eine magnetische Kraft magnetisirten Körper sagt man, er sei durch *Induction* magnetisirt, seine Magnetisirung ist dann durch die magnetische Kraft *Inducirt.*

Die Stärke der von einer und derselben magnetisirenden Kraft inducirten Magnetisirung ist für verschiedene Körper von verschiedenem Betrage. Am stärksten wirkt eine magnetische Kraft auf ganz reines und ganz weiches Eisen, hier steigt das Verhältnis der Magnetisirung zur magnetischen Kraft bis auf 32 und selbst bis auf 45.*)

Im weichen Eisen fällt die Richtung der Magnetisirung mit der der magnetisirenden Kraft zusammen. Die Magnetisirung ändert sich hier bei verhältnismässig geringer magnetisirender Kraft dieser näherungsweise proportional. Je mehr aber die magnetisirende Kraft anwächst, desto mehr bleibt die Magnetisirung, wenn sie auch noch verstärkt wird, hinter ihr zurück, und aus Experimenten, die im sechsten Capitel angeführt werden sollen, erhellt, dass die Magnetisirung des Eisens eine gewisse Stärke überhaupt nicht zu überschreiten vermag. Es existirt ein Grenzwert für sie, über den sie, man mag die magnetisirende Kraft noch so weit steigern, nicht erhoben werden kann.

Dem Eisen am nächsten in der Magnetisirbarkeit stehen Nickel und Kobalt, es lassen aber alle Substanzen, wenn man sie nur genügend grossen magnetischen Kräften unterwirft, Anzeichen von Polarität hervortreten.

Substanzen, deren Magnetisirung ebenso gerichtet erscheint wie die magnetisirende Kraft, heissen *Paramagnetisch*, *Ferromagnetisch* oder einfach *Magnetisch*. Substanzen, deren Magnetisirung der magnetisirenden Kraft entgegengerichtet ist, werden als *Diamagnetisch* bezeichnet.

---

*) Thalén, *Nova Acta Reg. Soc. Sc.* Upsala, 1863.

Bei allen diamagnetischen Körpern ist das Verhältnis der Magnetisirung zu der sie hervorbringenden magnetischen Kraft äusserst gering; so beträgt es beim Wismut nur $-\frac{1}{400000}$, und doch ist Wismut die am stärksten diamagnetisirbare Substanz.

Bei deformirten, krystallinischen und organischen Körpern fällt die Richtung der Magnetisirung nicht immer in die Richtung der magnetisirenden Kraft. Man kann dann den Zusammenhang zwischen den auf in der betreffenden Substanz feste Axen bezogenen Componenten der Magnetisirung und denen der magnetisirenden Kraft durch ein System von drei linearen Gleichungen ausdrücken.

Von den neun in diesen Gleichungen auftretenden Coefficienten sind aber, wie sich zeigen wird, nur sechs von einander unabhängig. Die Erscheinungen, die solche Substanzen bieten, werden unter der Bezeichnung *Magnekrystallkraft* zusammengefasst.

Ich werde in Art. 435 näher ausführen, dass ein in einem magnetischen Felde befindlicher Krystall sich stets so zu stellen sucht, dass die Richtung, nach der er am stärksten paramagnetisch ist, bezüglich die, wo er die schwächsten diamagnetischen Eigenschaften zeigt, parallel den Kraftlinien der magnetisirenden Kraft verläuft.

Im folgenden Umriss einer Theorie des inducirten Magnetismus beginne ich mit dem Fall, wo die Magnetisirung in ihrer Stärke proportional der magnetisirenden Kraft abändert und ebenso wie die magnetisirende Kraft oder entgegengesetzt gerichtet ist.

Coefficient der inducirten Magnetisirung.

426. Das Verhältnis der an einer Stelle eines Körpers hervorgebrachten Magnetisirung zu der daselbst wirkenden und in Art. 398 polar definirten magnetischen Kraft heisst der *Coefficient der inducirten Magnetisirung* oder der *Magnetisirungscoefficient.*

Bezeichnet man diesen Coefficient mit $\varkappa$, die Magnetisirung an einer Stelle des Körpers mit $\mathfrak{J}$ und die daselbst herrschende magnetische Kraft mit $\mathfrak{H}$, so bildet die Beziehung

$$\mathfrak{J} = \varkappa \mathfrak{H}$$

die Fundamental-Gleichung in der Theorie des inducirten Magnetismus.

Der Magnetisirungscoefficient ist für Eisen und alle paramagnetischen Substanzen positiv, dagegen für Wismut und alle diamagnetischen Substanzen negativ. Für Eisen hat er etwa den Wert 32, er ist auch noch verhältnismässig gross für Nickel und Kobalt, bei allen andern Substanzen erreicht er aber kaum noch die Grösse 0,00001.

Mathematische Theorie der magnetischen Induction.

Behandlung nach Poisson.

427. Bei der Berechnung der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ für irgend einen Punkt des Körpers haben wir zwei Teile zu unterscheiden, der eine rührt von den inducirenden äussern magnetischen Kräften her, der andere verdankt der Einwirkung der in dem Körper schon inducirten Magnetisirung auf den betreffenden Punkt seine Entstehung. Beide Teile erfüllen die Bedingung, die zur Existenz eines Potentials erforderlich ist.

Sei V das Potential der ausserhalb des betreffenden Körpers vorhandenen Magnetismen und Ω das Potential des in dem Körper inducirten Magnetismus. Das wirkliche Potential beider Agentien zusammen ist

$$U = V + \Omega. \tag{1}$$

Magnetisirung und magnetisirende Kraft. Ich bezeichne ferner mit α, β, γ die in Richtung der Coordinatenaxen wirkenden Componenten der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$, und mit A, B, C die entsprechenden Componenten der Magnetisirung $\mathfrak{J}$.

Die in Art. 426 aufgestellte Fundamentalgleichung ergiebt dann die Beziehungen

$$\begin{aligned} A &= \varkappa\alpha, \\ B &= \varkappa\beta, \\ C &= \varkappa\gamma. \end{aligned} \tag{2}$$

Ein Körper mit constantem Magnetisirungscoefficienten wird stets lamellar und solenoidal magnetisirt. Multiplicirt man diese Gleichungen bezüglich mit dx, dy, dz und addirt die Resultate, so findet sich

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = \varkappa(\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz).$$

Da aber

$$\alpha = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{3}$$

ist, so wird

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = -\varkappa\,dU. \tag{4}$$

Hat also $\varkappa$ in allen Teilen des Körpers einen und denselben Wert, so muss der auf der linken Seite der Gleichung 4) stehende Ausdruck das vollständige Differential einer Function φ sein, und die betreffende Gleichung geht über in

$$d\varphi = -\varkappa\,dU. \tag{5}$$

Demnach erhält man in diesem Falle

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{6}$$

Aus den Entwickelungen des Art. 421 folgt also, dass ein Körper, dessen Magnetisirungscoefficient in der ganzen Ausdehnung seiner Substanz einen und denselben Wert hat, von jeder magnetisirenden Kraft lamellar magnetisirt wird.

Bezeichnet man, wie in Art. 385, mit ρ die Raumdichte des freien in dem Körper inducirten Magnetismus, setzt also

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right),$$

so wird in unserm Falle nach Gleichung 2)

$$\rho = -\varkappa\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right).$$

Nach Art. 77 ist aber

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 4\pi\rho,$$

also

$$(1 + 4\pi\varkappa)\rho = 0,$$

und das kann allgemein nur stattfinden, wenn

$$7) \qquad \rho = 0$$

wird. Aus Art. 407c folgt daraus, dass die Magnetisirung des Körpers solenoidal ist. Also:

Ein Körper, dessen Magnetisirungscoefficient in der ganzen Ausdehnung seiner Substanz einen und denselben Wert besitzt, wird unter dem Einfluss einer magnetischen Kraft zugleich solenoidal und lamellar magnetisirt.

Ein solcher Körper hat in seinem Innern keinen freien Magnetismus. Seine ganze Wirkung resultirt aus der auf seiner Oberfläche verteilten magnetischen Materie.

Nach Art. 385, 5) ist die Flächendichte des auf dem Körper verteilten Magnetismus, wenn l, m, n die Richtungscosinusse der nach dem Innern des Körpers gezogenen Normale bezeichnen,

$$8) \qquad \sigma = -(lA + mB + nC) = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}.$$

Potential. Bezeichnet wie in Gleichung 1) Ω das Potential dieser magnetischen Flächenverteilung, dS ein Element der Oberfläche des Körpers, r den Abstand dieses Elements von einem Punkte P, so ist [Art. 385, 4c)] in dem betreffenden Punkte P

$$9) \qquad \Omega = \iint \frac{\sigma}{r}\, dS.$$

Wir können auf dieses Potential alle in der Electrostatik für das Potential einer electrischen Fläche abgeleiteten Sätze unmittelbar anwenden.

Demnach ist Ω überall endlich und es variirt innerhalb und ausserhalb des Körpers stetig, es springt auch nicht beim Durchgang des Punktes P durch die Oberfläche des Körpers.

Seine Derivirten müssen der Laplaceschen Formel

$$10) \qquad -\nabla^2\Omega = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} = 0$$

genügen.

An der Oberfläche des Körpers muss ferner die charakteristische Gleichung erfüllt sein. Ist also Ω' der Wert von Ω für ausserhalb des Körpers gelegene Punkte, bezeichnet ferner ν die nach innen, ν' die nach aussen gezogene Normale seiner Oberfläche, so ist für jeden Punkt dieser Oberfläche

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} + \frac{\partial\Omega'}{\partial\nu'} = -4\pi\sigma,$$

also in unserm Falle nach Gleichung 8)

$$11a) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\nu} + \frac{\partial\Omega'}{\partial\nu'} = 4\pi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}, \quad = -4\pi\varkappa\frac{\partial U}{\partial\nu}, \quad = -4\pi\varkappa\left(\frac{\partial V}{\partial\nu} + \frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right).$$

Die charakteristische Gleichung geht demnach in unserm Falle über in

$$11b) \qquad (1+4\pi\varkappa)\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} + \frac{\partial\Omega'}{\partial\nu'} + 4\pi\varkappa\frac{\partial V}{\partial\nu} = 0.$$

Problem des inducirten Magnetismus. Darnach reducirt sich die Aufgabe der Bestimmung des Magnetismus, welche in einem homogenen isotropen, von der Oberfläche S begrenzten Körper durch äussere magnetische Kräfte vom Potential V inducirt wird, auf die Auflösung des folgenden mathematischen Problems.

Es sind zwei Functionen Ω und Ω' so zu bestimmen, dass

Ω überall innerhalb der Fläche S endlich ist und stetig verläuft und der Laplaceschen Gleichung

$$\nabla^2\Omega = 0$$

genügt,

Ω' überall ausserhalb der Fläche S endlich ist und stetig verläuft und der Laplaceschen Gleichung

$$\nabla^2\Omega' = 0$$

genügt,

in jedem Punkte der Oberfläche S die beiden Bedingungen

$$\Omega = \Omega',$$

$$(1+4\pi\varkappa)\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} + \frac{\partial\Omega'}{\partial\nu'} + 4\pi\varkappa\frac{\partial V}{\partial\nu} = 0$$

erfüllt sind.

Diese Behandlung des Problems des inducirten Magnetismus rührt von Poisson*) her. Die von ihm benutzte Grösse k ist aber nicht identisch mit unserm von Neumann**) eingeführten $\varkappa$, sie steht mit derselben in der Beziehung

$$4\pi\varkappa(k-1)+3k=0.$$

Behandlung nach Faraday.

428. Man kann dasselbe Problem des inducirten Magnetismus auch noch in anderer Weise unter Benutzung der in Art. 399 nach Faraday definirten magnetischen Induction behandeln.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{B}$ die magnetische Induction, mit $\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft und mit $\mathfrak{J}$ die Magnetisirung, so ist [Art. 399, 3)]

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{J}.$$

Dazu kommt die Gleichung

$$\mathfrak{J}=\varkappa\mathfrak{H}, \tag{1}$$

also wird

$$\mathfrak{B}=(1+4\pi\varkappa)\mathfrak{H}. \tag{2a}$$

Diese Gleichung drückt die Beziehung zwischen magnetischer Kraft und magnetischer Induction bei Körpern aus, deren Magnetisirung nur von der Stärke der sie angreifenden magnetischen Kräfte abhängt. Setzt man

$$1+4\pi\varkappa=\mu, \tag{3}$$

so erhält man

$$\mathfrak{B}=\mu\mathfrak{H}. \tag{2b}$$

μ ist das Verhältnis der magnetischen Induction zu der magnetischen Kraft und kann als die *Magnetische inductive Capacität* der betreffenden Substanz bezeichnet werden. Sie hängt mit dem Magnetisirungscoefficienten durch die Gleichung 3) zusammen.

Im allgemeinen variirt $\varkappa$, also auch μ innerhalb der betreffenden Substanz von Ort zu Ort, es kann sogar auch von der Richtung und Stärke der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ abhängen. In dem von uns zu behandelnden Falle sind aber $\varkappa$ und μ numerische Grössen.

Ich nenne wieder U das aus V, dem Potential der äussern magnetischen Kräfte, und Ω, dem des inducirten Magnetismus, zusammengesetzte Potential, supponire also

$$U=V+\Omega. \tag{4}$$

---

*) *Mémoire de l'Acad. des sciences. T. V.* 1824.

**) S. seine von seinem Sohn 1881 herausgegebenen *Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus* Seite 31, 116.

Die Componenten α, β, γ der magnetischen Kraft sind dann

$$5)\quad \alpha = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

und die Componenten a, b, c der magnetischen Induction

$$6)\quad a = -\mu\frac{\partial U}{\partial x}, \quad b = -\mu\frac{\partial U}{\partial y}, \quad c = -\mu\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Nach Art. 403b ist

$$7)\quad \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0,$$

also muss überall, wo μ constant ist,

$$8)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

werden, U hat demnach innerhalb des von dem Körper eingenommenen Raumes der Laplaceschen Gleichung zu genügen.

Bezeichnet man ferner mit ν, ν' die nach dem Innern bezüglich Aeussern des Körpers in einem Punkte seiner Oberfläche gezogene Normale, mit a, b, c; U die Werthe der Inductionscomponenten und des Gesammtpotentials innerhalb des Körpers, mit a', b', c'; U' die ausserhalb desselben, so wird in Folge der für die magnetische Induction geltenden Continuitätsgleichung für jeden Punkt der Oberfläche des Magnets

$$9)\quad a\frac{dx}{d\nu} + b\frac{dy}{d\nu} + c\frac{dz}{d\nu} + a'\frac{dx}{d\nu'} + b'\frac{dy}{d\nu'} + c'\frac{dz}{d\nu'} = 0,$$

also nach den unter 6) gegebenen Beziehungen

$$10)\quad \mu\frac{\partial U}{\partial \nu} + \mu'\frac{\partial U'}{\partial \nu'} = 0.$$

μ' bezeichnet die inductive Capacität des von dem Körper ausgeschlossenen Raumes, wird also gleich Eins, wenn dieser Raum weder von magnetischer, noch von diamagnetischer Substanz ausgefüllt ist.

Ersetzt man in der Gleichung 10) U durch seinen unter 4) gegebenen Wert, so resultirt genau die von Poisson gefundene in Art. 427 unter 11b) angeführte Gleichung.

Fasst man das Problem des inducirten Magnetismus, wie es zuletzt geschehen ist, als das der Verknüpfung der magnetischen Induction mit der magnetisirenden Kraft, so stimmt es völlig mit dem in Art. 310 behandelten Problem der Leitung von electrischen Strömen durch heterogene Media überein.

In der Tat, die magnetische Kraft wird aus dem magnetischen Potential genau so abgeleitet, wie die electrische Kraft aus dem electrischen Potential.

Ferner ist die magnetische Induction in dem in Art. 12 definirten Sinne eine Stromgrösse, und sie genügt denselben Continuitätsbedingungen, wie der electrische Strom.

Dann entspricht die Abhängigkeit der magnetischen Induction von der magnetischen Kraft ganz genau der Abhängigkeit des electrischen Stromes von der electromotorischen Kraft.

Die Grösse, die in dem jetzigen magnetischen Problem als specifische magnetische inductive Capacität bezeichnet worden ist, hat in dem früher behandelten electrischen Problem ihr Analogon in der specifischen electrischen Leitungsfähigkeit. Sie ist desshalb auch von Thomson in seiner *Theory of Induced Magnetism* (Reprint, 1872 p. 484) als *Permeabilität* des betreffenden Mediums bezeichnet worden.

Wir sind nun in der Lage, die Theorie des inducirten Magnetismus nach Faradays Conceptionen, wie ich sie auffasse, zu entwickeln.

Wirken magnetische Kräfte auf ein magnetisches, neutrales oder diamagnetisches Medium, so bringen sie in demselben eine Erscheinung zu Wege, die hier als magnetische Induction bezeichnet worden ist.

Die magnetische Induction hat Richtung und zählt zu den Stromgrössen, sie genügt ebenso wie der electrische Strom und andere Stromgrössen der Continuitätsbedingung.

In isotropen Medien fällt ihre Richtung mit der der magnetischen Kraft zusammen, und ihre Grösse ist gleich dem Product dieser Kraft in den von uns mit μ bezeichneten Inductionscoefficienten.

Im leeren Raume ist der Inductionscoefficient gleich Eins und der Magnetisirungscoefficient $\varkappa$ gleich Null. In Körpern, die durch Induction magnetisirbar sind, hat er den Wert $1 + 4\pi\varkappa$, er ist bei Paramagneten grösser, bei Diamagneten kleiner als Eins.

Magnetisirung eines Mediums unter dem Einfluss eines umgebenden andern; Umkehrung der Polarität.

429. Seien μ, μ' die Inductionscoefficienten zu entgegengesetzten Seiten einer zwei Medien von einander trennenden Fläche. Bezeichnen dann U, U' die Potentiale in den bezüglichen Medien, so sind die nach der Trennungsfläche derselben hin wirkenden bezüglichen magnetischen Kräfte $\partial U/\partial \nu$, $\partial U'/\partial \nu'$.

Die zur Fläche hin gerichtete magnetische Induction durch ein Element dS der Trennungsfläche hat nach Art. 402a die bezüglichen Werte $\mu dS \partial U/\partial \nu$, $\mu' dS \partial U'/\partial \nu'$ und da die gesammte Strömung durch die Fläche sich auf Null reducirt, so wird, wie wir schon im vorigen Artikel gefunden haben,

$$1)\qquad \mu \frac{\partial U}{\partial \nu} + \mu' \frac{\partial U'}{\partial \nu'} = 0.$$

Wenn aber σ die Flächendichte der auf der Trennungsfläche ausgebreiteten magnetischen Materie angiebt, so muss die charakteristische Bedingung

2) $$\frac{\partial U}{\partial \nu} + \frac{\partial U'}{\partial \nu'} + 4\pi\sigma = 0$$

erfüllt sein, demnach wird

3a) $$\frac{\partial U}{\partial \nu}\left(1 - \frac{\mu}{\mu'}\right) + 4\pi\sigma = 0.$$

Ich setze

4) $$\frac{\sigma}{\frac{\partial U}{\partial \nu}} = \varkappa_1$$

und erhalte

3b) $$4\pi\varkappa_1 = \frac{\mu - \mu'}{\mu'}.$$

$\varkappa_1$, das Verhältnis der Flächenmagnetisirung zu der im äussern Medium wirkenden magnetischen Kraft, ist positiv oder negativ, je nachdem der Inductionscoefficient des äussern Mediums grösser oder kleiner als der des innern ist.

Da ferner

$$1 + 4\pi\varkappa = \mu \text{ und } 1 + 4\pi\varkappa' = \mu'$$

gesetzt ist, so hat man auch

3c) $$\varkappa_1 = \frac{\varkappa - \varkappa'}{1 + 4\pi\varkappa'}.$$

$\varkappa$ und $\varkappa'$ sind die Magnetisirungscoefficienten der beiden Medien, und $\varkappa_1$ ist der Magnetisirungscoefficient des ersten Mediums in Gegenwart des umgebenden zweiten.

Ist $\varkappa'$ kleiner als $\varkappa$, so wird $\varkappa_1$ positiv, demnach die scheinbare Magnetisirung des innern Mediums von demselben Zeichen wie die des äussern, ist aber $\varkappa'$ grösser als $\varkappa$, so wird $\varkappa_1$ negativ, und das innere Medium erscheint entgegengesetzt wie das äussere magnetisirt.

Hängt man zum Beispiel ein Gefäss, welches eine schwache wässrige Lösung eines paramagnetischen Eisensalzes enthält, in ein anderes Gefäss, das mit einer starken Lösung dieses Salzes angefüllt ist, und lässt einen Magnet einwirken, so bewegt sich das Gefäss mit der schwachen Lösung in entgegengesezter Richtung wie eine Magnetnadel, die sich an seiner Stelle befinden würde.

Man kann diese Erscheinung durch die Hypothese erklären, dass zwar die schwache Lösung tatsächlich in Richtung der magnetischen Kraft magnetisirt wird, dass aber die sie umgebende starke Lösung eine noch kräftigere Magnetisirung nach derselben Richtung bekommt. Das Gefäss mit der schwachen Lösung verhält sich dann wie ein schwacher Magnet, der zwischen zwei starken Magneten, die mit ihm nach derselben Richtung magnetisirt sind,

so liegt, dass immer entgegengesetzte Pole einander gegenüber stehen. Der Nordpol des schwachen Magnets zeigt zwar nach derselben Richtung wie der eines der starken Magnete, da er aber gerade mit dem Südpol eines stärkern Magnets in Berührung steht, so befindet sich in seiner Nähe ein Ueberschuss an Südmagnetismus, die den schwachen Nordpol wie ein Südpol erscheinen lässt.

Einige Substanzen zeigen aber auch eine negative Magnetisirung, selbst wenn sie in einem sogenannten Vacuum magnetisirt werden. Setzt man für ein Vacuum $\varkappa = 0$, so wird für diese Substanzen das $\varkappa$ negativ. Man kennt aber keine einzige Substanz, für welche $\varkappa$ negativ und zugleich numerisch grösser als $1/4\pi$ wäre. Die Erfahrung lehrt, dass μ für alle Substanzen positiv ist.

Fassen wir alles zusammen, so ist:

Bei paramagnetischen Substanzen
der Magnetisirungscoefficient positiv,
der Inductionscoefficient positiv und grösser als Eins;

Bei diamagnetischen Substanzen
der Magnetisirungscoefficient negativ und numerisch kleiner als $1/4\pi$,
der Inductionscoefficient positiv und kleiner als Eins.

Die physikalische Theorie der diamagnetischen und paramagnetischen Substanzen werde ich in der Lehre vom Electromagnetismus Art. 831—845 auseinandersetzen.

Grundlängen der Poissonschen Theorie für die magnetische Induction.

430 a. Die mathematische Theorie der magnetischen Induction ist zuerst von Poisson im Jahre 1824 gegeben worden. Die physikalische Hypothese, die er seiner Theorie zu Grunde legte, bestand in der Supposition zweier magnetischer Fluida, einer Supposition, die der mathematischen Behandlung dieselben Vorteile bietet und dem physikalischen Verständnis dieselben Schwierigkeiten bereitet, wie die Annahme zweier electrischer Fluida. Um auch für die Tatsache, dass ein weiches Eisenstück durch Induction zwar magnetisirt werden kann, aber nie von dem einen magnetischen Fluidum mehr als von dem andern aufzunehmen vermag, eine Erklärung zu finden, macht er die Hilfshypothese, dass die Substanz in ihrer Totalität keine der beiden magnetischen Fluida fortzuleiten im Stande ist. Die Fluida sollen vielmehr in gewissen kleinen Teilchen der Substanz enthalten sein, und in ihnen den Kräften gehorchen können, denen die Substanz unterworfen wird. Von den kleinen magnetischen Teilchen der Substanz soll jedes von beiden Fluidis genau gleiche Mengen in sich beherbergen. Innerhalb jedes dieser Teilchen können sich die Fluida mit völliger Freiheit bewegen, es soll aber niemals Fluidum von einem dieser Teilchen zu einem andern überzugehen vermögen.

Nach dieser Theorie ist das Problem der magnetischen Induction von derselben Art, wie das Problem der Stromverteilung, wenn eine Anzahl kleiner beliebig geformter und einander nicht berührender Conductoren in einem völlig isolirenden dielectrischen Medium verstreut sind.

Haben die kleinen magnetischen Partikel verlängerte Formen und sind sie alle gleich gerichtet oder folgen ihre Axen einer Richtung mehr als einer andern, so wird das Medium, dem sie angehören, wie Poisson selbst zeigt, nicht isotrop sein. Um keine unnützen Schwierigkeiten einzuführen, nimmt daher Poisson einerseits an, dass alle magnetischen Partikel kugelförmig sind, und setzt andererseits voraus, dass sie in der Substanz überall in gleicher Menge verstreut sind, so dass jede durch die Substanz gezogene Linie dieselbe Anzahl von magnetischen Partikeln trifft. Die Anzahl aller in einer Volumeinheit der Substanz enthaltenen Partikel bezeichnet er mit der in Art. 427 schon angeführten Grösse k.

Verhältnis der von Poisson, Neumann und Maxwell eingeführten Coefficienten zu einander.

430b. Ich habe schon in dem citirten Art. 427 die Relation, die zwischen der Poissonschen Grösse k und der von uns benutzten Grösse $\varkappa$ besteht, angeführt. Die Ableitung derselben lässt sich leicht mit Hilfe der hervorgehobenen Analogie zwischen dem Problem der magnetischen Induction und dem der electrischen Verteilung in einem in der angegebenen Weise aus nichtleitender Substanz und magnetisch bezüglich electrisch leitenden Kügelchen zusammengesetzten Körper bewerkstelligen.

Hat nämlich das die Kügelchen einschliessende Medium die electrische Leitungsfähigkeit μ_1 und zeigen die Kügelchen selbst die electrische Leitungsfähigkeit μ_2, so ist die Leitungsfähigkeit μ des zusammengesetzten Systems nach Art. 314, 2)

$$\mu = \mu_1 \frac{2\mu_1 + \mu_2 + 2k(\mu_2 - \mu_1)}{2\mu_1 + \mu_2 - k(\mu_2 - \mu_1)}.$$

Setzen wir, wie es sein soll, $\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = \infty$, so wird

$$\mu = \frac{1 + 2k}{1 - k}.$$

Das so bestimmte μ bezeichnet die Leitungsfähigkeit eines Mediums, welches aus einer grossen Anzahl von vollkommen leitenden Kügelchen, die in einer Substanz von der Leitungsfähigkeit Eins ganz gleichmässig verstreut sind, so zusammengesetzt ist, dass das Volumen der in der Volumeinheit enthaltenen Kügelchen gleich k ist.

μ bezeichnet aber auch den Coefficienten der magnetischen Induction für ein Medium, das aus Kügelchen von einer unendlich grossen magnetischen Permeabilität besteht, die gleichmässig in einer Substanz von der

Permeabilität Eins so verstreut sind, dass wiederum das Volumen der in der Volumeinheit enthaltenen Kügelchen gleich k wird.

k ist also der in Art. 430a angeführte *Poissonsche Magnetische Coefficient.*

$\varkappa$ giebt den *Neumannschen Coefficienten der Magnetisirung durch Induction* und ist für mathematische Behandlung geeigneter als der Poissonsche.

μ habe ich den *Coefficienten der Magnetischen Induction* genannt. Die Anwendung dieses Coefficienten bietet insofern Vorteile dar, als sie unmittelbar die Lösung magnetischer Probleme aus der electrischer und thermischer abschreiben lässt.

Zwischen den drei Grössen $k, \varkappa, \mu$ bestehen die folgenden Beziehungen

$$k = \frac{4\pi\varkappa}{4\pi\varkappa + 3}, \tag{1}$$

$$\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}, \tag{2}$$

$$\mu = \frac{1 + 2k}{1 - k}; \tag{3}$$

oder

$$k = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}, \tag{4}$$

$$\varkappa = \frac{3k}{4\pi(1 - k)}, \tag{5}$$

$$\mu = 4\pi\varkappa + 1. \tag{6}$$

Setzt man nach Thaléns*) Untersuchungen für weiches Eisen $\varkappa = 32$, so wird $k = \frac{134}{135}$, und dieser Bruch würde nach Poisson das Verhältnis des Volumens der magnetischen Molekel eines Eisenstückes zu dem Volumen dieses Eisenstückes geben. Es ist nun ganz unmöglich, einen Raum mit gleich grossen Kügelchen so voll zu füllen, dass das Verhältnis ihres Volumens zu dem ganzen Raum so nahe der Einheit wird, wie es der angeführte Bruch verlangt. Ferner ist es auch sehr unwahrscheinlich, dass ein so grosser Teil des von einem Eisenstück eingenommenen Raumes von festen, wie auch gestalteten Molekeln ausgefüllt werden sollte, und das ist einer von den Gründen, die uns dazu führen, die Poissonsche Hypothese über die Constitution der Magnete fallen zu lassen. Die anderen Gründe werden wir im sechsten Capitel kennen lernen. Doch bleibt der Poissonschen Theorie des inducirten Magnetismus ihr voller Wert, denn diese basirt nicht auf seiner Hypothese, sondern auf experimentell eruirten Tatsachen.**)

---

*) *Recherches sur les Propriétés Magnétiques du fer*; Nova Acta, Upsala 1863.

**) Ueber die Verallgemeinerung der Poissonschen Theorie vom inducirten Magnetismus wegen der Abhängigkeit des Magnetisirungs-Coefficienten von der magnetisirenden Kraft s. Kirchhoff, *Gesammelte Abhandlungen* S. 217 ff.

Cap. V.

Behandlung specieller Probleme der magnetischen Induction.

—×—

Magnetische Induction in einer hohlen Kugelschale.

431. Das im Folgenden zu behandelnde Problem der magnetischen Induction in einer hohlen Kugelschale, die unter dem Einfluss irgend welcher magnetisirender Kräfte steht, ist das erste, welches, durch Poisson, eine vollständige Lösung erfahren hat.

Der Einfachheit wegen setze ich voraus, dass die magnetisirenden Kräfte sich in dem von der Kugel ausgeschlossenen Raume befinden. Das Potential V des äussern magnetisirenden Systems lässt sich dann nach harmonischen Raumfunctionen positiven Grades entwickeln, und es wird

$$V = C_0 S_0 + C_1 S_1 r + C_2 S_2 r^2 + \cdots + C_i S_i r^i,$$

wo r den Abstand des Punktes, für den das Potential der magnetisirenden Kräfte den Wert V haben soll, von dem Mittelpunkt der Kugel angiebt, S_i eine harmonische Flächenfunction der $i$ten Ordnung ist und C eine Constante bezeichnet.

Diese Entwickelung für V bildet eine convergente Reihe, wenn der Punkt, auf den das Potential sich bezieht, dem Mittelpunkte der Kugelschale näher liegt als der nächste magnetisirende Magnet, sie gilt also zufolge unserer Annahme über die Lage des magnetisirenden Systems für alle innerhalb und auf der Schale befindlichen Punkte.

Ich bezeichne mit a_2 den äussern und mit a_1 den innern Radius der Schale und nenne Ω das Potential des in der Schale durch die magnetisirenden Kräfte inducirten Magnetismus.

Ω wird im allgemeinen innerhalb der Schale eine andere Form als in derselben, und dort eine andere als ausserhalb derselben haben. Ich entwickele für die drei bezeichneten Räume Ω nach Kugelfunctionen positiven und negativen Grades, die darin vertretenen harmonischen Flächenfunctionen S

müssen von demselben Typus, wie die in der Entwickelung von V vorkommenden sein, und man hat allgemein, wenn Ω_1, Ω_2, Ω_3 die Potentiale der inducirten Magnetisirung innerhalb, bezüglich in, bezüglich ausserhalb der Schale angeben,

$$\Omega_1 = \Sigma_0 \left\{ A_{1i} S_i r^i + B_{1i} S_i r^{-(i+1)} \right\},$$

$$\Omega_2 = \Sigma_0 \left\{ A_{2i} S_i r^i + B_{2i} S_i r^{-(i+1)} \right\},$$

$$\Omega_3 = \Sigma_0 \left\{ A_{3i} S_i r^i + B_{3i} S_i r^{-(i+1)} \right\}.$$

Das Potential Ω ist den Bedingungen unterworfen, dass es

1) im ganzen Raume der Laplaceschen Gleichung genügt,
2) überall endlich ist,
3) in der Unendlichkeit verschwindet,
4) im ganzen Raume stetig verläuft,
5) für $r = a_1$, also auf der innern Grenzfläche der Schale, die Gleichung

$$(1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \Omega_2}{\partial r} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} + 4\pi\varkappa\frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

und für $r = a_2$, also auf der äusseren Grenzfläche der Schale, die Gleichung

$$-(1+4\pi\varkappa)\frac{\partial \Omega_2}{\partial r} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial r} - 4\pi\varkappa\frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

erfüllt ist.

Der ersten Bedingung ist durch die Entwickelung nach Kugelfunctionen genügt.

Zufolge der zweiten Bedingung ist allgemein

a) $$B_{1i} = 0.$$

Die dritte Bedingung wird erfüllt, wenn

b) $$A_{3i} = 0$$

ist.

Nach der vierten Bedingung wird für jeden Wert des i

c) $$(A_{1i} - A_{2i})\, a_1^{2i+1} - B_{2i} = 0,$$

d) $$A_{2i} a_2^{2i+1} + B_{2i} - B_{3i} = 0.$$

Endlich giebt die fünfte Bedingung die beiden Gleichungen:

e) $(1+4\pi\varkappa)\left(i A_{2i} a_1^{2i+1} - (i+1) B_{2i}\right) - i A_{1i} a_1^{2i+1} + 4\pi\varkappa i C_i a_1^{2i+1} = 0,$

f) $(1+4\pi\varkappa)\left(i A_{2i} a_2^{2i+1} - (i+1) B_{2i}\right) + (i+1) B_{3i} + 4\pi\varkappa i C_i a_2^{2i+1} = 0.$

Durch diese sechs Gleichungssysteme a) bis f) sind alle in Ω vertretenen sechs Constantensysteme bestimmt.

Man hat

1) $$\Omega_1 = \Sigma_0 A_{1i} S_i r^i,$$

2) $$\Omega_2 = \Sigma_0 \{ A_{2i} S_i r^i + B_{2i} S_i r^{-(i+1)} \},$$

3) $$\Omega_3 = \Sigma_0 B_{3i} S_i r^{-(i+1)},$$

und darin ist, wenn

4) $$\left[(1 + 4\pi\varkappa)(2i+1)^2 + (4\pi\varkappa)^2 i(i+1)\left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right)\right]^{-1} = N_i$$

gesetzt wird,

5) $$A_{1i} = -(4\pi\varkappa)^2 i(i+1)\left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right) N_i C_i,$$

6) $$A_{2i} = -4\pi\varkappa i\left[2i + 1 + 4\pi\varkappa(i+1)\left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right)\right] N_i C_i,$$

7) $$B_{2i} = 4\pi\varkappa i(2i+1) a_1^{2i+1} N_i C_i,$$

8) $$B_{3i} = -4\pi\varkappa i\{2i + 1 + 4\pi\varkappa(i+1)\}(a_2^{2i+1} - a_1^{2i+1}) N_i C_i.$$

Damit ist das Potential, welches von dem durch das gegebene magnetische System in der Kugelschale inducirten Magnetismus herrührt, völlig bestimmt.

Da $1 + 4\pi\varkappa$, wie bemerkt, für keine bis jetzt bekannte Substanz einen kleineren Wert als Null hat, so ist N_i stets positiv, die Constanten A_{1i} haben also negative Werte. Die magnetisirte Schale wirkt deshalb auf einen von ihr eingeschlossenen Punkt entgegengesetzt, wie die magnetisirenden äussern Kräfte, gleichgiltig, ob sie aus paramagnetischer oder diamagnetischer Substanz besteht.

Das gesammte Potential hat den Wert

$$U = V + \Omega,$$

ist also innerhalb der Schale

9) $$U_1 = \Sigma_0 (C_i + A_{1i}) S_i r^i = (1 + 4\pi\varkappa) \Sigma_0 (2i+1)^2 N_i C_i S_i r^i.$$

432. Hat $\varkappa$, wie beim weichen Eisen, einen verhältnismässig grossen Wert, so wird $C_i + A_{1i}$ relativ klein gegen C_i, und es wirkt innerhalb der Schale eine im Verhältnis zu den äussern magnetischen Kräften nur geringe magnetische Kraft, wenn nicht die Schale zugleich eine sehr geringe Dicke besitzt.

Diese Folgerung aus der Theorie ist von W. Thomson bei der Construction seines Marine-Galvanometers benutzt worden. Er schloss ein Galvanometer in eine Röhre von weichem Eisen ein und machte dadurch seine Angaben verhältnismässig unabhängig von äussern magnetischen Kräften.

433. Für die Praxis ist das erste Glied der Entwickelung des Potentials am wichtigsten, also der Fall von Bedeutung, wo die äussern magnetischen Agentien so verteilt sind, dass nur C_1 einen von Null verschiedenen Wert hat. Setzt man aber $i = 1$, so wird

$$4_1)\qquad N_1 = \left[9(1+4\pi\varkappa) + 2(4\pi\varkappa)^2\left(1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)\right]^{-1};$$

$$5_1)\qquad A_{11} = -2(4\pi\varkappa)^2\left(1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)N_1 C_1,$$

$$6_1)\qquad A_{21} = -4\pi\varkappa\left[3+2(4\pi\varkappa)\left(1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)\right]N_1 C_1,$$

$$7_1)\qquad B_{21} = 3(4\pi\varkappa)\,a_1^3 N_1 C_1,$$

$$8_1)\qquad B_{31} = -4\pi\varkappa\,(3+2(4\pi\varkappa))(a_2^3-a_1^3)\,N_1 C_1.$$

Die innerhalb der Schale wirkende magnetische Kraft ist dann überall von derselben Grösse und hat den Wert

$$10_1)\qquad A = C_1 + A_{11} = \frac{9(1+4\pi\varkappa)}{9(1+4\pi\varkappa)+2(4\pi\varkappa)^2\left(1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)}\,C_1.$$

Die vorstehende Gleichung lässt sich zur Bestimmung des Magnetisirungscoefficienten verwenden, wenn man die innerhalb der Schale herrschende magnetische Kraft A und die äussere inducirende magnetische Kraft C_1 zu messen vermag.

Für eine solche Bestimmung fällt die Wahl der Dicke der Schale am geeignetsten gemäss der Gleichung

$$1-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \frac{9}{2}\,\frac{1+4\pi\varkappa}{(4\pi\varkappa)^2}$$

aus. Die Kraftwirkung A innerhalb der Schale ist dann halb so gross, wie die Kraftwirkung C_1 der inducirenden äussern Kräfte.

Beim Eisen liegt $\varkappa$ zwischen 20 und 30, demnach wird man bei Benutzung der angegebenen Methode zur Bestimmung seines Magnetisirungscoefficienten der Schale eine Dicke von etwa einem halben Hundertteil ihres Radius verleihen.

Doch ist diese Methode nur für Substanzen verwendbar, die einen grossen Magnetisirungscoefficienten haben, weil nur bei diesen, wie schon bemerkt, A einen gegen C_1 genügend grossen Wert erreicht.

Für eine Vollkugel, die in ihrem Centrum eine nur sehr kleine Höhlung aufweist, wird

$$4_2)\qquad N_1 = \{9(1+4\pi\varkappa)+2(4\pi\varkappa)^2\}^{-1} = \frac{1}{(3+4\pi\varkappa)(3+8\pi\varkappa)},$$

$$5_2)\qquad A_1 = -\frac{2(4\pi\varkappa)^2}{(3+4\pi\varkappa)(3+8\pi\varkappa)}C_1,$$

$$6_2)\qquad A_2 = -\frac{4\pi\varkappa}{3+4\pi\varkappa}C_1,$$

$$7_2)\qquad B_2 = 0,$$

$$8_2)\qquad B_3 = -\frac{4\pi\varkappa}{(3+4\pi\varkappa)}C_1 a_2^3.$$

Zu denselben allgemeinen und speciellen Formeln wären wir auch gelangt, wenn wir die Lösung unseres magnetischen Problems aus der des entsprechenden in Art. 313b behandelten electrokinematischen abgeschrieben hätten. Es wären aber die dort mit k_1 und k_2 bezeichneten Grössen mit einander durch die Gleichung $k_1 = (1+4\pi\varkappa)k_2$ zu verbinden und für die dort benutzten Symbole A_1 und A_2 die $C_1 + A_1$, bezüglich $C_1 + A_2$ zu setzen gewesen.

434. Ich habe für die Lösung des entsprechenden Problems in einem zweidimensionalen Gebiete auf der Tafel XVI. eine graphische Darstellung gegeben. Die Figur, deren Kopf nach Norden, deren rechte Seite nach Osten gerichtet sein soll, repräsentirt die Störungen, die hervorgerufen werden, wenn man in ein gleichförmiges magnetisches Feld einen transversal magnetisirten Cylinder in stabiler Gleichgewichtslage, also mit der Nordseite nach Norden versetzt. Die gestörten Inductionslinien gehen vom Cylindermantel aus, krümmen sich in seiner Nähe sehr stark und verlaufen in weiterer Entfernung von demselben fast horizontal. Die Niveaulinien schneiden die Inductionslinien senkrecht und repräsentiren die Durchschnitte der Niveauflächen mit der senkrecht zum Cylinder gelegten Ebene der Zeichnung. Eine der Niveauflächen, in der Figur durch eine gestrichelte Curve markirt, ist cylindrisch und läuft dem magnetischen Cylinder parallel. Die punktirte Zeichnung dient zu Versinnbildlichung des Verlaufs der Inductions- und Niveaulinien innerhalb der Substanz eines solchen Cylinders. Der grosse aus Punkten zusammengesetzte Kreis repräsentirt den Querschnitt eines aus paramagnetischer Substanz hergestellten Cylinders. Die darin befindlichen horizontalen, ebenfalls punktirten Linien sind die innern Inductionslinien, sie hören da auf, wo die äussern Inductionslinien beginnen. Die punktirten verticalen Linien repräsentiren die Durchschnitte der innern Niveauflächen mit der Ebene der Zeichnung. Man bemerkt, dass innerhalb des Cylinders die Inductionslinien einander näher und die Niveaulinien von einander entfernter als ausserhalb desselben gezogen sind. Das bedeutet in Faradays Ausdrucksweise, dass der paramagnetische Cylinder die Inductionslinien besser als das umgebende Medium leiten soll.

Die beschriebene Figur kann auch noch für andere Verhältnisse angepasst werden.

Liegt zum Beispiel der transversal magnetisirte Cylinder in seiner labilen Gleichgewichtslage, so sind die vertical verlaufenden Linien die Inductionslinien, die horizontal verlaufenden die Niveaulinien.

Dieselbe Vertauschung der Inductionslinien mit den Niveaulinien tritt ein, wenn der grosse punktirte Kreis den Querschnitt eines diamagnetischen Cylinders darstellt. Hier werden innerhalb der Substanz die Inductionslinien aus einander gedrängt und die Niveaulinien mehr zusammengezogen, da die Substanz für die magnetische Induction eine geringere Permeabilität als das umgebende Medium besitzt.

Eine gleichförmig magnetisirte krystallinische Kugel in einem gleichförmigen magnetischen Felde.

435. Bezeichnet man mit α, β, γ die Componenten der magnetischen Kraft und mit A, B, C die der Magnetisirung an einer Stelle eines unter ihrem Einflusse stehenden Körpers, so sind die allgemeinsten linearen Beziehungen, die sich zwischen ihnen aufstellen lassen,

$$1)\qquad \begin{aligned} A &= r_1\alpha + p_3\beta + q_2\gamma, \\ B &= q_3\alpha + r_2\beta + p_1\gamma, \\ C &= p_2\alpha + q_1\beta + r_3\gamma. \end{aligned}$$

Die neun Grössen r, p, q repräsentiren die neun Coefficienten der Magnetisirung.

Ich nehme an, dass die aufgestellten Gleichungen für die Magnetisirung der Substanz einer Kugel vom Radius a gelten, und dass diese Kugel überall zu derselben Stärke und nach derselben Richtung magnetisirt ist. A, B, C sollen ihre Magnetisirungscomponenten sein.

Ich nehme ferner an, dass auch die äussere magnetisirende Kraft überall mit derselben Stärke und nach derselben Richtung wirkt.

Bezeichnen X, Y, Z die Componenten der magnetisirenden Kraft, so wird ihr Potential

$$2)\qquad V = -(Xx + Yy + Zz).$$

Das Potential Ω' der magnetisirten Kugel auf ausserhalb ihrer Oberfläche gelegene Punkte (x, y, z) ist nach Art. 391, 4)

$$3)\qquad \Omega' = \frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{r^3}(Ax + By + Cz)$$

und das auf innerhalb derselben befindliche Punkte nach der Theorie der Kugelfunctionen

$$4)\qquad \Omega = \frac{4\pi}{3}(Ax + By + Cz).$$

Das Gesammtpotential ist also innerhalb der Kugel gleich

$$5)\qquad U = V + \Omega = x\left(\frac{4\pi}{3}A - X\right) + y\left(\frac{4\pi}{3}B - Y\right) + z\left(\frac{4\pi}{3}C - Z\right).$$

Demnach wird

$$6)\qquad \begin{aligned} \alpha &= X - \frac{4\pi}{3}A, \\ \beta &= Y - \frac{4\pi}{3}B, \\ \gamma &= Z - \frac{4\pi}{3}C. \end{aligned}$$

Setzt man die so bestimmten Werte für die Kraftcomponenten in das Gleichungssystem für die Magnetisirungscoefficienten ein, so resultirt

$$7)\qquad \begin{aligned} \left(1 + \frac{4}{3}\pi r_1\right)A + \frac{4\pi}{3}p_3\,B + \frac{4\pi}{3}q_2\,C &= r_1 X + p_3 Y + q_2 Z, \\ \frac{4\pi}{3}q_3\,A + \left(1 + \frac{4\pi}{3}r_2\right)B + \frac{4\pi}{3}p_1\,C &= q_3 X + r_2 Y + p_1 Z, \\ \frac{4\pi}{3}p_2\,A + \frac{4\pi}{3}q_1\,B + \left(1 + \frac{4\pi}{3}r_3\right)C &= p_2 X + q_1 Y + r_3 Z. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach A, B, C ergiebt für die Magnetisirungscomponenten die Werte

$$8a)\qquad \begin{aligned} A &= r_1' X + p_3' Y + q_2' Z, \\ B &= q_3' X + r_2' Y + p_1' Z, \\ C &= p_2' X + q_1' Y + r_3' Z, \end{aligned}$$

und darin ist

$$9)\qquad \begin{aligned} D' r_1' &= r_1 + \frac{4}{3}\pi(r_3 r_1 - p_2 q_2 + r_1 r_2 - p_3 q_3) + \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 D, \\ D' p_1' &= p_1 - \frac{4}{3}\pi(q_2 q_3 - p_1 r_1), \\ D' q_1' &= q_1 - \frac{4}{3}\pi(p_2 p_3 - q_1 r_1). \end{aligned}$$

Die r_2', p_2', q_2'; r_3', p_3', q_3' resultiren durch cyklische Vertauschung der Zahlenindices.

D bezeichnet die Determinante der auf der rechten Seite der Gleichungen 7) stehenden Coefficienten, D' die der auf der linken Seite derselben befindlichen.

Die neuen Coefficienten p', q', r' bilden nur dann ein symmetrisches System (Art. 297), wenn die alten Coefficienten p, q, r es tun, wenn also $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3$ wird.

436. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass bei einem conservativen System p', q', r' wirklich ein symmetrisches System zusammensetzen.

Die Kräfte α, β, γ, welche die einzelnen Teile der Kugel angreifen, werden derselben nicht blos eine Translation, sondern auch eine Rotationsbewegung zu erteilen suchen. Das Moment der Kräftepaare, welche die Elemente der Kugel um die x Achse von der y zur z Axe drehen, ist

$$L=\iiint\left\{y\frac{J}{r}\left(Z-\frac{4}{3}\pi C\right)-z\frac{J}{r}\left(Y-\frac{4}{3}\pi B\right)\right\}dx\,dy\,dz,$$

wo J die Magnetisirung anzeigt, und die Integration sich auf alle Punkte der Kugel erstreckt. Beachtet man aber, dass $zJ/r=C$, $yJ/r=B$ ist und dass X, Y, Z; A, B, C von den Coordinaten nicht abhängen sollten, so erhält man

$$L=\{ZB-YC\}\int dx\,dy\,dz$$

oder

10a) $$L=\frac{4}{3}\pi a^3\{ZB-YC\}$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3\{p_1'Z^2-q_1'Y^2+(r_2'-r_3')YZ+X(q_3'Z-p_2'Y)\}.$$

Ich hänge die Kugel so auf, dass die x Componente der magnetischen Kraft verschwindet, und die gesammte magnetische Kraft F in der yz Ebene unter dem Neigungswinkel ϑ gegen die y Axe wirkt. Es ist dann

$$X=0,\quad Y=F\cos\vartheta,\quad Z=F\sin\vartheta.$$

Die Arbeit, welche geleistet wird, während die Kugel unter Constanthaltung der magnetischen Kraft sich um den Winkel $d\vartheta$ dreht, ist gleich $L\,d\vartheta$, somit hat diese Arbeit für jede vollständige Revolution den Wert

$$W=\int_0^{2\pi}L\,d\vartheta=\frac{2}{3}\pi^2a^3F^2(p_1'-q_1').$$

Diese Arbeit muss aber für jede vollständige Revolution verschwinden, denn sonst würde die Kugel während ihrer Herumdrehung um ihre Axe, eine unerschöpfliche Energiequelle bilden. Demnach wird $p_1'=q_1'$ zu setzen sein. Da ganz dieselben Betrachtungen für die Drehungen um die andern Axen gelten, so haben wir allgemein

11) $$p_1'=q_1',\ p_2'=q_2',\ p_3'=q_3'.$$

Das Gleichungssystem unter 8) ist also symmetrisch, woraus sich ergiebt, dass auch

12) $$p_1=q_1,\ p_2=q_2,\ p_3=q_3$$

ist, mithin die Gleichungssysteme unter 1) und 7) ebenfalls symmetrisch sein müssen.

Verlegt man das Coordinatensystem in das System der Hauptaxen der Magnetisirung, so verschwinden die p und q, es wird

8b)
$$A = \frac{r_1}{1 + \frac{4}{3}\pi r_1} X,$$
$$B = \frac{r_2}{1 + \frac{4}{3}\pi r_2} Y,$$
$$C = \frac{r_3}{1 + \frac{4}{3}\pi r_3} Z.$$

Das Moment, welches die Kugel um die x Axe so zu drehen sucht, dass die y Axe sich in die z Axe verlegt, ist dann

10b)
$$L = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{r_2 - r_3}{(1 + \frac{4}{3}\pi r_2)(1 + \frac{4}{3}\pi r_3)} YZ$$

oder, wenn man wieder

$$Y = F\cos\vartheta, \ Z = F\sin\vartheta$$

setzt,

10c)
$$L = \frac{2}{3}\pi a^3 \frac{r_2 - r_3}{(1 + \frac{4}{3}\pi r_2)(1 + \frac{4}{3}\pi r_3)} F^2 \sin 2\vartheta.$$

Die Erfahrung lehrt, dass in den meisten Fällen die Magnetisirungscoefficienten in den verschiedenen Richtungen nur wenig von einander abweichen. Ist also r der mittlere Magnetisirungscoefficient einer solchen krystallinischen Kugel, so hat man auch

10_1)
$$L = \frac{2}{3}\pi a^3 \frac{r_2 - r_3}{(1 + \frac{4}{3}\pi r)^2} F^2 \sin 2\vartheta.$$

Die magnetische Kraft sucht stets die Axe des grössten Magnetisirungscoefficienten bezüglich die des kleinsten Diamagnetisirungscoefficienten ihrer Wirkungsrichtung parallel zu stellen.

Ich habe den entsprechenden Fall im zweidimensionalen Gebiete in der auf Tafel XVII. gegebenen Figur graphisch dargestellt.

Die Zeichnung ist unter der Annahme ausgeführt, dass das Kopfende nach Norden, die rechte Seite nach Osten zeigt. Sie repräsentirt die Störung, die ein transversal magnetisirter Cylinder in der sonst gleichmässigen Verteilung der Kraftlinien und Niveauflächen eines gleichmässigen magnetischen Feldes hervorbringt, wenn man ihn senkrecht zur Ebene der Zeichnung mit seiner Nordseite nach Osten legt. Die resultirende Kraft sucht den Cylinder um seine Axe von Osten nach Norden zu drehen. Die punktirte Zeichnung soll die Niveau- und Inductionslinien innerhalb der

Substanz eines gleichmässig magnetisirten krystallinischen Cylinders versinnbildlichen. Der grosse punktirte Kreis stellt den Querschnitt eines Cylinders dar, der aus einer krystallinischen Substanz so geschnitten ist, dass er in Richtung von Nord-Ost nach Süd-West einen grössern Magnetisirungscoefficienten aufweist als in Richtung von Nord-West nach Süd-Ost. Die innerhalb dieses Kreises verlaufenden punktirten geraden Linien sind die Inductionslinien bezüglich Niveaulinien. Man sieht, dass die beiden Liniensysteme sich in dem Falle einer krystallinischen Substanz nicht rechtwinklig schneiden. Uebrigens sucht auch hier die resultirende magnetische Kraft den Cylinder von Osten nach Norden zu drehen.

Poissons Methode zur Bestimmung des Potentials eines gleichmässig magnetisirten Körpers.

437. Die Auffindung des magnetischen Potentials eines gleichmässig magnetisirten irgend wie geformten Körpers ist von Poisson zuerst in wahrhaft ingeniöser Weise auf die Auffindung des Gravitationspotentials desselben Körpers reducirt worden.

Er beweist nämlich, dass $-\partial V/\partial x$ das magnetische Potential eines in Richtung der x Axe mit der Intensität $J = \rho$ gleichmässig magnetisirten Körpers angiebt, wenn V das unter der Annahme einer gleichförmigen materiellen Dichtigkeit ρ berechnete Gravitationspotential desselben Körpers bedeutet.

Ist V ein solches Gravitationspotential, so zeigt die Grösse $-(\partial V/\partial x)\,\delta x$ die Zunahme des Wertes, die V für irgend einen Punkte (x, y, z) erfährt, falls man den Körper um die Strecke $-\delta x$ in Richtung der x Axe bewegt. Wir stellen uns jetzt vor, dass der Körper in seiner neuen Lage nicht mehr die Dichtigkeit ρ sondern die $-\rho$ besitzt, und denken uns, dass er gleichzeitig in seinen beiden Lagen existirt. Mit andern Worten, es sollen zwei gravitirende, einander zum Teil durchdringende, genau gleichgeformte Körper vorhanden sein, deren entsprechende Elemente von einander um die Strecke $-\delta x$ abstehen, der eine Körper soll die Dichtigkeit ρ, der andere die $-\rho$ besitzen. Das Gravitationspotential beider Körper zusammengenommen ist dann gleich $-(\partial V/\partial x)\,\delta x$.

In einem Volumelement δv des ersten Körpers ist die Substanzmenge $\rho\delta v$ vorhanden, das diesem Volumelement entsprechende und von ihm um $-\delta x$ abstehende Volumelement δv des zweiten Körpers hat die Substanzmenge $-\rho\delta v$ concentrirt. Die Wirkung dieser beiden Volumelemente auf irgend einen Punkt, muss also genau dieselbe wie die eines kleinen Magnets von der Stärke $\rho\delta v$ und der Länge δx sein.

Ein solcher Magnet hat aber die Intensität (man sehe deren in Art. 384 gegebene Definition) $\rho\delta x$, demnach stellt $-(\partial V/\partial x)\delta x$ das magnetische Potential eines mit der Intensität $\rho\delta x$ in Richtung von x magnetisirten

Körpers; $-\partial V/\partial x$ giebt das Potential dieses Körpers, wenn er zur Intensität ρ magnetisirt ist.

Man kann diesem Potential auch noch eine etwas andere Bedeutung verleihen.

Der Körper sollte durch die Strecke $-\delta x$ verschoben und gleichzeitig auf die Dichtigkeit $-\rho$ reducirt werden. Nach Ausführung dieser Operation hat der Teil des Raumes, der von dem Körper in seinen beiden Lagen zugleich ausgefüllt wird, die Dichtigkeit Null, denn die beiden gleichen und entgegengesetzten Dichtigkeiten vernichten gegenseitig ihre gravitirenden Wirkungen. Wirksam bleibt also nur eine Schale, die auf dem einen Teile von positiver, auf dem andern von negativer Materie ausgefüllt wird, und dieser Schale verdankt das citirte Potential seine Entstehung. An der Stelle, wo die nach aussen gezogene Normale der Schale mit der x Axe einen Winkel ε bildet, hat die Schale die Dicke $\delta x \cos\varepsilon$, und da sie daselbst die Dichtigkeit ρ besitzt, so ist die Flächendichte der Belegung, die das Potential $-(\partial V/\partial x)\,\delta x$ verursacht, gleich $\rho\,\delta x \cos\varepsilon$, daher die der Belegung, welche das Potential $-(\partial V/\partial x)$ hervorruft, gleich $\rho \cos\varepsilon$.

So kann man für jeden gleichmässig und nach einer Richtung magnetisirten Körper das magnetische Potential bestimmen, wenn man das Gravitationspotential desselben überall gleich dicht gedachten Körpers aufzufinden versteht.

Wenn aber ein Körper durch Induction ganz gleichmässig nach Richtung und Intensität magnetisirt ist, so darf in seinem Innern die magnetisirende Kraft weder in der Richtung noch in der Grösse von Punkt zu Punkt variiren.

Nun setzt sich die gesammte innerhalb des Körpers wirkende magnetische Kraft aus zwei Teilen zusammen; der eine Teil verdankt äussern Ursachen seine Entstehung, der zweite rührt von der Wirkung des in dem Körper inducirten Magnetismus her. Der erste Teil sollte constant sein und in seiner Wirkungsrichtung nicht abändern, also muss auch der zweite Teil denselben Bedingungen gehorchen.

Die auseinandergesetzte Methode führt demnach nur in dem Falle zu der Lösung eines magnetischen Problems, wenn der Körper so gestaltet ist, dass $\partial V/\partial \nu$ innerhalb seiner Substanz eine lineare Function der Coordinaten ist, das heisst, wenn sein Gravitations-Potential durch eine quadratische Function derselben dargestellt wird.

Der einzige bekannte Fall aber, in dem das Potential eines Körpers in seinem Innern wie eine quadratische Function der Coordinaten seiner Elemente variirt, ist der, wo der Körper von einer **vollständigen** Fläche zweiten Grades begrenzt wird. Von Körpern, die von einer **vollständigen** Fläche zweiten Grades eingeschlossen werden, hat nur das Ellipsoid einen endlichen Inhalt, wir werden also die auseinandergesetzte Methode auf das Ellipsoid zu beschränken haben.

Ein Ellipsoid in einem gleichmässigen magnetischen Felde.

438 a. Dreiaxiges Ellipsoid. Sei

a) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoids.

Ich bezeichne mit Φ_0 das bestimmte Integral

b) $$\Phi_0=\int_0^\infty\frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a^2+\varphi^2)(b^2+\varphi^2)(c^2+\varphi^2)}}$$

und setze

c) $$L=4\pi abc\frac{\partial\Phi_0}{\partial a^2},\quad M=4\pi abc\frac{\partial\Phi_0}{\partial b^2},\quad N=4\pi abc\frac{\partial\Phi_0}{\partial c^2}.$$

Dann hat das Gravitationspotential des Ellipsoids auf einen seiner Substanz angehörenden Punkt (x, y, z) den Wert*)

d) $$V_0=-\frac{\rho}{2}(Lx^2+My^2+Nz^2)+\text{Const.}$$

Ist das Ellipsoid mit der Intensität J gleichmässig nach einer Richtung magnetisirt, die mit den Coordinatenaxen Winkel einschliesst, deren Cosinusse die bezüglichen Werte l, m, n besitzen, so sind die Magnetisirungscomponenten

$$A=Jl,\quad B=Jm,\quad C=Jn,$$

demnach das Potential der Magnetisirung des Ellipsoids auf innerhalb seiner Substanz gelegene Punkte x, y, z

1) $$\Omega=-J(Llx+Mmy+Nnz).$$

Bezeichnen ferner X, Y, Z die Componenten der äussern magnetisirenden Kraft $\mathfrak{H}$, so haben wir für das Potential dieser Kraft auf denselben Punkt x, y, z

2) $$V=-(Xx+Yy+Zz),$$

also für das gesammte Potential des magnetischen Feldes

3) $$\begin{aligned}U=V+\Omega&=-[(X+JLl)x+(Y+JMmy)+(Z+JNn)z]\\&=-[(X+LA)x+(Y+MB)y+(Z+NC)z]\end{aligned}$$

die Componenten der wirklichen magnetisirenden Kraft werden

4) $$\Xi=X+AL,\quad \mathrm{H}=Y+BM,\quad \mathrm{Z}=Z+CN.$$

Zwischen den Componenten der Magnetisirung und denen der magnetisirenden Kraft bestehen im allgemeinen drei lineare homogene Gleichungen

*) Thomson und Tait, *Theoretische Physik* § 522.

mit neun Coefficienten. Von den neun Coefficienten müssen aber sechs zu drei Paaren zusammen fallen, wenn (s. Art. 436) dem Principe der Erhaltung der Energie nicht widersprochen werden soll. Wir haben also noch

$$
\begin{aligned}
A &= \varkappa_1\ (X + AL) + \varkappa_3'(Y + BM) + \varkappa_2'(Z + CN),\\
B &= \varkappa_3'(X + AL) + \varkappa_2\ (Y + BM) + \varkappa_1'(Z + CN),\\
C &= \varkappa_2'(X + AL) + \varkappa_1'(Y + BM) + \varkappa_3\ (Z + CN).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Daraus lassen sich die Grössen A, B, C als lineare Functionen der gegebenen Componenten X, Y, Z der äussern magnetischen Kraft berechnen, wodurch dann auch die Componenten der gesammten magnetisirenden Kraft nach Gleichung 4) bestimmbar werden.

Das Potential auf ausserhalb des Ellipsoids gelegene Punkte ergiebt sich durch Addition des Potentials des in seiner Magnetisirung durch das Obige völlig bestimmten Ellipsoids zu dem Potential der äussern magnetischen Kräfte.*)

Für die Praxis ist allein der Fall von Wichtigkeit, wo

$$\varkappa_1' = \varkappa_2' = \varkappa_3' = 0$$

ist. Wir haben dann

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\varkappa_1}{1 - \varkappa_1 L} X,\\
B &= \frac{\varkappa_2}{1 - \varkappa_2 M} Y,\\
C &= \frac{\varkappa_3}{1 - \varkappa_3 N} Z.
\end{aligned}
\tag{5_1}
$$

Hängt man das Ellipsoid so auf, dass es um seine xAxe rotiren kann, so ist das Drehungsmoment, das die magnetische Kraft auf dasselbe ausübt,

$$D = \frac{4}{3}\pi abc\,(BZ - CY) = \frac{4}{3}\pi abc\,YZ\frac{\varkappa_2 - \varkappa_3 + \varkappa_2\varkappa_3(M - N)}{(1 - \varkappa_2 M)(1 - \varkappa_3 N)}. \tag{6}$$

Im Falle dass $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ klein sind, wird dieses Drehungsmoment namentlich von der krystallinischen Structur der Substanz, aus der das Ellipsoid geschnitten ist, abhängen, und wenig durch die besondere ellipsoidische Form, die man der Substanz gegeben hat, bestimmt werden. Haben aber $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ wie beim Eisen beträchtliche Werte, so wird die Drehung des Ellipsoids vornehmlich durch seine Gestalt als Ellipsoid bestimmt. Die lange Axe wird sich den Kraftlinien parallel zu stellen suchen.

Uebrigens wird auch ein Ellipsoid aus diamagnetischer isotroper Substanz, wenn es sich in einem starken, gleichmässigen magnetischen Felde befindet, so gedreht, dass seine lange Axe den magnetischen Kraftlinien parallel läuft.

---

*) F. Neumann in dem in Art. 427 citirten Werke § 24.

438 b. Abgeplattetes Rotationsellipsoid. Sind in dem Ellipsoid die beiden grössern Axen einander gleich, etwa

$$b = c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}},$$

so hat man

$$L = -2\pi \frac{a^3}{1 - e^2} \int_0^\infty \frac{d(\varphi^2)}{\left(\frac{a^2}{1 - e^2} + \varphi^2\right)(a^2 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Ausführung des Integrals bietet keine Schwierigkeit, wenn man von der Substitution $a^2 + \varphi^2 = \omega^2$ Gebrauch macht. Man erhält

$$L = -4\pi \frac{a^3}{1 - e^2} \frac{1}{b^3 e^3} \left(\frac{be}{a} - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{a}{be}\right)$$

$$= -4\pi \frac{a}{be^3}\left(\frac{be}{a} - \operatorname{arctg} \frac{be}{a}\right),$$

oder wenn man für b/a den Wert $(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}$ einsetzt und beachtet, dass $\operatorname{arctg} e\,(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} = \arcsin e$ ist,

$$L = -4\pi \left(\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e\right).$$

Entsprechend findet man

$$M = N = -2\pi \left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1 - e^2}{e^2}\right).$$

Ist das Ellipsoid so platt, dass a gegen b und c fast verschwindet, so wird

$$L = -4\pi,$$

$$M = N = -\pi^2 \frac{a}{c}.$$

438 c. Verlängertes Rotationsellipsoid. Für ein verlängertes Rotationsellipsoid ist

$$a = b = c\sqrt{1 - e^2}$$

zu setzen.

Demnach wird

$$L = M = -2\pi \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1 - e^2}{2e^3} \log \frac{1 + e}{1 - e}\right),$$

$$N = -4\pi \left(\frac{1}{e^2} - 1\right)\left(\frac{1}{2e} \log \frac{1 + e}{1 - e} - 1\right).$$

Bei der Kugel ist $e = 0$, also

$$L = M = N = -\frac{4}{3}\pi.$$

Für ein sehr grosses c geht das Ellipsoid in einen elliptischen Cylinder mit abgerundeten Enden über, es wird

$$L = M = -2\pi,$$

$$N = -4\pi\frac{a^2}{c^2}\left(\log\frac{2c}{a} - 1\right).$$

Das erweiterte Problem der Magnetisirung eines Rotationsellipsoids, wenn es unter dem Einfluss beliebig verteilter magnetischer Kräfte steht, ist von F. Neumann*) untersucht worden.

Geeignete Körperformen zur Bestimmung der Magnetisirungscoefficienten und zur Herstellung permanenter Magnete.

438 d. Ich ziehe aus den bisherigen Rechnungsresultaten eine Reihe von Schlüssen, die für die Praxis von Wichtigkeit sind.

I. Wenn der Magnetisirungscoefficient $\varkappa$ einen numerisch verhältnismässig geringen positiven oder negativen Wert besitzt, so ist die durch eine magnetische Kraft inducirte Magnetisirung eines Körpers fast unabhängig von seiner Gestalt und nahezu gleich der magnetischen Kraft multiplicirt mit dem Magnetisirungscoefficienten $\varkappa$.

II. Besitzt dagegen $\varkappa$ einen verhältnismässig grossen positiven Wert, so hängt die Magnetisirung des betreffenden Körpers vornehmlich von seiner Gestalt und wenig von dem wirklichen Betrage des $\varkappa$ ab. Das gilt aber nicht mehr, wenn eine Kraft in der Längsrichtung eines Körpers wirkt, und dieser so stark verlängt ist, dass die früher mit $N\varkappa$ bezeichnete Grösse noch hinreichend klein ausfällt.

III. Aus den am Ende des Art. 438b abgeleiteten Formeln erhellt ferner, dass die Magnetisirung eines abgeplatteten Ellipsoids, wenn es in Richtung seiner kürzesten Axe von einer magnetischen Kraft angegriffen wird, für den Fall, dass $\varkappa = -1/4\pi$ ist, um so stärker wird, je mehr das Ellipsoid sich abplattet und schliesslich bei einer Scheibe einen unendlich grossen Wert erreicht. Die Annahme, dass bei irgend einer Substanz $\varkappa$ wirklich auf den Wert $-1/4\pi$ zu sinken vermag, führt also zu einer Absurdität, ich habe auch schon in Art. 429 erwähnt, dass man in der Tat bis jetzt noch keine Substanz kennt, bei der $\varkappa$ auch nur annähernd so tief sänke.

Aus diesen unter I. bis III. angeführten Ergebnissen der Theorie lässt sich eine Anzahl wichtiger Gesichtspunkte für das Verfahren, das man

*) Crelles Journal Bd. 37 (1847).

bei der Bestimmung der Magnetisirungscoefficienten einzuschlagen hat, ableiten.

Ist der Magnetisirungscoefficient bei einer Substanz zu bestimmen, von der man von vornherein weiss, dass sie nur schwach durch eine verhältnismässig schon bedeutende Kraft magnetisirt wird, so darf man die Substanz in jedwede Form bringen. Hiernach ist die Wahl der Form bei allen diamagnetischen Medien und nicht minder bei allen paramagnetischen ausser bei Eisen, Nickel und Kobalt dem Ermessen des Experimentators anheimgestellt.

Für die Bestimmung des Magnetisirungscoefficienten einer Substanz, die wie Eisen, Nickel und Kobalt von einer magnetischen Kraft intensiv angegriffen wird, ist aber nicht jede Gestalt gleich vorteilhaft. Man wird namentlich vermeiden müssen, der Substanz die Form einer Kugel oder eines abgeflachten Körpers zu verleihen. Beispielsweise ist bei einer Kugel das Verhältnis der Magnetisirung A zu der magnetisirenden Kraft X, also die Grösse $\varkappa/(1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa)$ gleich $1/4{,}22$ für $\varkappa = 30$ und gleich $1/4{,}19$ für $\varkappa = \infty$.

Grossen Veränderungen der Magnetisirungsconstante entsprechen also nur geringe Veränderungen des Verhältnisses der Magnetisirung zu der magnetischen Kraft. Desshalb sind schon kleine Fehler, die man bei der Beobachtung der magnetisirenden Kraft und der Magnetisirung macht, im Stande, die Bestimmung des Magnetisirungscoefficienten sehr stark zu verfälschen.

Sehr geeignet sind dagegen in diesem Falle die langgestreckten Körperformen. Aus Beobachtungen, die man etwa an einem verlängerten Ellipsoid anstellt, wird man $\varkappa$ um so sicherer ableiten können, je kleiner man die Grösse N, also je länger man seine Polaraxe im Verhältnis zu seinen Aequatorealaxen wählt.

Für stark verlängerte Ellipsoide ist nach Art. 438 c

$$\varkappa = \frac{1}{4\pi \frac{a^2}{c^2}\left(1 - \log\frac{2c}{a}\right) + \frac{Z}{C}},$$

wo c die Polaraxe, a eine der als gleich vorausgesetzten Aequatorealaxen angiebt. Da die im Nenner stehende Correction von Z/C relativ klein ist, so wird man dem Körper nicht genau die Gestalt eines Ellipsoids zu geben brauchen, man wird eben so gut einen langen Draht oder einen langen Stab anwenden können. Doch muss ich hervorheben, dass die Unabhängigkeit von der Gestalt, in die man bei Anwendung verlängerter Formen zur Bestimmung des Magnetisirungscoefficienten gelangt, nur so lange stattfindet, als die Grösse $N\varkappa$ gegen Eins wirklich klein ist. Die Verteilung des Magnetismus auf einem Cylinder mit abgeflachten Enden ist nämlich nicht dieselbe wie die auf einem verlängerten Ellipsoid, beim Cylinder drängt der freie Magnetismus verhältnismässig stärker den Enden zu, als bei dem verlängerten Ellipsoid.

Ich erwähne das deshalb, weil in seinem electrischen Verhalten ein Cylinder, wie aus den Erörterungen des Art. 152 hervorgeht, in der Tat mit einem verlängerten Ellipsoid vergleichbar ist.

Eine weitere Folgerung aus den obigen Resultaten ist die, dass ein Körper zu einem weit stärkern permanenten Moment magnetisirt werden kann, wenn man ihm eine verlängerte, als wenn man ihm eine verbreiterte Gestalt verleiht.

Magnetisirt man nämlich eine Scheibe normal zu ihrer Oberfläche zur Intensität J und überlässt sie sich selbst, so werden ihre innern Teilchen von einer demagnetisirenden Kraft angegriffen, deren Grösse $4\pi J$ beträgt.

Bei einem transversal magnetisirten Cylinder beträgt die demagnetisirende Kraft $2\pi J$.

Magnetisirt man ferner eine Scheibe vom Radius a und der Dicke $2c$ transversal, also in Richtung ihrer Radien, so wird die demagnetisirende Kraft $\pi^2 a J/c$.

Magnetisirt man endlich ein langes Ellipsoid von der Länge $2c$ und der Dicke $2a$ longitudinal, so wird die demagnetisirende Kraft gleich $4\pi a^2 J (\log 2c/a)/c^2$. Von allen angeführten Fällen wirkt beim longitudinal magnetisirten langen Ellipsoid die geringste demagnetisirende Kraft.

Will man also einer Substanz eine möglichst bleibende Magnetisirung erteilen, so bringt man sie am besten in die Form eines langen Stabes und magnetisirt sie longitudinal

Magnetische Verteilung auf einem Cylinder.

439. Das allgemeine Problem der Verteilung des Magnetismus in einem Cylinder, der von irgend wie angeordneten, nach irgend welchen Gesetzen wirkenden magnetischen Kräften angegriffen wird, ist nur für einen unendlich langen Cylinder von Kirchhoff[1]) gelöst worden. Für den Fall, dass die magnetischen Kräfte nach der Richtung der Axe des Cylinders überall mit gleicher Stärke wirken, existirt eine in der 17. Section seines *Essay* von Green veröffentlichte Untersuchung, die sich auch auf Cylinder von endlicher Länge erstreckt. Die Greensche Untersuchung ist nicht überall mit der nötigen Strenge geführt, das Endresultat derselben repräsentirt aber wahrscheinlich angenähert die wirkliche Magnetisirung für den so wichtigen Fall eines endlichen Cylinderstückes. Es genügt sicher für den Uebergang von Cylindern, deren Magnetisirungsconstante sehr gross ist, zu Cylindern, deren Magnetisirungsconstante einen nur kleinen Betrag erreicht, es ist aber ganz unbrauchbar für Cylinder mit negativen Magnetisirungscoefficienten, also für diamagnetische Cylinder.

---

[1]) Crelles *Journal für reine und angewandte Mathematik* Bd. 48 (1854) oder *Gesammelte Abhandlungen* Seite 193 ff.

Green findet nämlich für die Liniendichte λ des freien Magnetismus an einer um x von der Mitte des Cylinders entfernten Stelle den Ausdruck

$$1)\qquad \lambda = \pi \varkappa X p a \frac{e^{\frac{px}{a}} - e^{-\frac{px}{a}}}{e^{\frac{pl}{a}} + e^{-\frac{pl}{a}}}.$$

$2l$ bezeichnet die Länge, $2a$ den Durchmesser des Cylinders und p bedeutet eine aus der Gleichung

$$2)\qquad 0{,}231863 - 2\log p + 2p = \frac{1}{\pi \varkappa p^2}$$

folgende Zahl.

Ich lasse eine Tafel der zusammengehörigen Werte p und $\varkappa$ folgen

p	$\varkappa$	p	$\varkappa$
0,00	∞	0.07	11.802
0.01	336,4	0.08	9.137
0.02	62,02	0.09	7.517
0.03	48,416	0.10	6.319
0.04	29,475	1.00	0.1427
0.05	20,185	10.00	0.0002
0.06	14,794	∞	0.0000
		imaginär	negativ

Für einen Cylinder, dessen Länge sehr gross im Verhältnis zu seiner Dicke ist, beträgt die gesammte Menge an freiem Magnetismus auf jeder Hälfte desselben

$$3)\qquad M = \pi^2 a \varkappa X.$$

Davon befindet sich auf der ebenen Grenzfläche einer Cylinderhälfte die Menge

$$4)\qquad \mathrm{M} = \tfrac{1}{2} p M.$$

Der Abstand des Massenmittelpunktes der gesammten magnetischen Materie M von dem Ende der betreffenden Cylinderhälfte findet sich zu

$$5)\qquad \xi = \frac{a}{p}.$$

Hat der Cylinder eine sehr geringe Magnetisirungsfähigkeit, so wird p sehr gross, also ξ nahezu gleich Null. Der gesammte freie Magnetismus befindet sich dann auf den Endflächen des Cylinders. Wächst $\varkappa$, so nimmt p ab, und demgemäss breitet sich der freie Magnetismus immer weiter auf dem Cylinder aus. Wird $\varkappa$ unendlich gross, so verteilt sich der freie Magnetismus auf dem Cylinder in ähnlicher Weise, wie die Electricität auf einem Conductor, der sich in einem gleichmässigen electrischen Felde be-

findet. Die an einer Stelle vorhandene Menge Magnetismus ist dann proportional dem Abstand dieser Stelle von dem mittlern Querschnitt des Cylinders.

Bewegungstendenz schwach magnetischer, bezüglich diamagnetischer Körper in einem magnetischen Felde.

440. Abgesehen vom Eisen, Nickel und Kobalt, haben alle Substanzen eine so geringe Magnetisirbarkeit, dass der in einem Körper inducirte Magnetismus in nur sehr geringem Grade die in einem magnetischen Felde wirkenden magnetischen Kräfte zu alteriren vermag. In erster Annäherung darf man also annehmen, dass die wirkliche, innerhalb eines Körpers wirkende magnetische Kraft ebenso gross ist, wie wenn der Körper gar nicht vorhanden wäre. Man erhält dann für die Magnetisirung an einer Stelle der Oberfläche des betreffenden Körpers in erster Approximation den Wert $\varkappa \partial V/\partial \nu$, wenn $\partial V/\partial \nu$ das Verhältnis angiebt, in dem das Potential der äussern magnetischen Kräfte anwächst, wenn man auf der nach dem Innern des Körpers gezogenen Normale um die Strecke $\partial \nu$ fortgeht. Mit dieser ersten näherungsweise bestimmten Verteilung des freien Magnetismus auf dem Körper kann man dann eine zweite Annäherung für das wirkliche Potential berechnen, damit wieder sich noch mehr der Kenntnis der wirklichen Verteilung des Magnetismus nähern u. s. f.

Bleiben wir bei der ersten Näherung stehen, so wird die mechanische Energie der angenommenen magnetischen Vertheilung

$$E = \frac{1}{2}\iint \varkappa V \frac{\partial V}{\partial \nu} dS.$$

Die Integration erstreckt sich auf die ganze Oberfläche des Körpers.

Es ist aber nach Art. 100 das auf der rechten Seite stehende Flächenintegral gleich einem Raumintegral, und zwar wird

$$E = -\frac{1}{2}\iiint \varkappa \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\,dy\,dz,$$

oder wenn man mit R die resultirende magnetische Kraft des Feldes bezeichnet

$$E = -\frac{1}{2}\iiint \varkappa R^2\,dx\,dy\,dz,$$

wo die Integration sich auf alle Elemente des Körpers bezieht.

Bedeutet aber X die mechanische in Richtung der x Axe wirkende Kraft, so ist die von der magnetischen Kraft während der Verschiebung des Körpers um die Strecke δx in Richtung der x Axe geleistete Arbeit gleich $X\delta x$. Ferner besteht zufolge des Princips der Erhaltung der Energie die Beziehung

$$\int X\,\delta x + E = \text{const.}$$

Damit wird

$$X = -\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\iiint \varkappa R^2 dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\iiint \varkappa \frac{\partial R^2}{\partial x} dx\,dy\,dz.$$

Die magnetische Kraft greift also den Körper so an, wie wenn er von Orten niederern Wertes von R^2 zu Orten höhern Wertes von R^2 sich mit einer Kraft zu bewegen strebte, deren Grösse auf die Volumeinheit bezogen, gleich

$$R_1 = \frac{1}{2}\varkappa\frac{\partial R^2}{\partial x}$$

ist.

Ist $\varkappa$ negativ, der Körper also diamagnetisch, so treibt ihn, wie schon Faraday experimentell gefunden hat, diese Kraft von stärker magnetischen Orten zu schwächer magnetischen Orten, und damit hängen die meisten an Diamagneten beobachtbaren Erscheinungen zusammen.

Schiffsmagnetismus.

441. Fast jeder Teil unserer Wissenschaft vom Magnetismus findet in der Schifffahrt seine Anwendung. Die Richtkraft, die der Erdmagnetismus auf die Compassnadel ausübt, bietet, wenn Sonne und Sterne durch Wolken bedeckt sind, dem Schiffer die einzige Möglichkeit, den Lauf seines Schiffes zu bestimmen. Die Declination, die die Compassnadel aus dem astronomischen Meridian erfährt, schien zwar zuerst den Gebrauch des Compasses beträchtlich zu erschweren und die Benutzung seiner Angaben in der Nautik zu verhindern. Seitdem aber die jahrelange Erfahrung die Construction magnetischer Karten ermöglicht hat, dient sogar die Declination selbst zur Bestimmung der Stelle auf dem Weltmeere, wo das betreffende Schiff sich befindet. Der Schiffer kann so die äusserst schwierige astronomische Längenbestimmung für den Ort seines Schiffes umgehen, denn wenn er die Breite seines Ortes kennt und die Declination seiner Compassnadel gehörig bestimmt hat, so hat er nur auf seiner Karte die Stelle aufzusuchen, wo sein Breitenkreis die Curve schneidet, welche alle Orte der Erde, die dieselbe Declination, wie die von ihm gefundene, aufweisen, verbindet.

Neuerdings hat man aber angefangen, im Schiffsbau so grosse Massen von Eisen zu verwenden, dass man die Compassnadel überhaupt nicht mehr verwenden kann, wenn man den ihre Angaben störenden Einfluss des als magnetischer Körper zu betrachtenden Schiffes nicht mit in Rechnung ziehen mag.

Dazu muss man, streng genommen, die magnetische Verteilung, die der Erdmagnetismus in den Eisenteilen des Schiffes hervorruft, kennen. Eine vollständige Berechnung dieser Verteilung ist für so beliebig gestaltete Körper, selbst wenn diese nicht, wie das tatsächlich der Fall ist, in jeder Hinsicht mechanisch deformirt und aus ihrem natürlichen Zustande heraus-

gerissen wären, äusserst schwer zu bewerkstelligen. Man kann aber, wenn man von der folgenden Ueberlegung Gebrauch macht, das Problem sehr wesentlich vereinfachen.

Zunächst hängt man die Compassnadel mit ihrem Centrum auf einen fixen Punkt des Schiffes und so weit von allen Eisenteilen auf, dass sie für sich keine merkliche Magnetisirung irgendwo im Schiffe inducirt.

Ferner giebt man der Nadel so geringe Dimensionen, dass man die Wirkung der magnetischen Kraft des Schiffes als längs der ganzen Nadel sich gleichbleibend ansehen darf.

Was ferner das auf dem Schiffe verwendete Eisen anbetrifft, so hat man

1) Hartes Eisen, das permanent und unabhängig vom Erdmagnetismus in derselben Weise magnetisirt bleibt.
2) Weiches Eisen, dessen Magnetisirung durch die Erde oder durch andere Magnete inducirt ist.

Streng genommen wird auch das härteste Eisen nicht blos Magnetismus aufzunehmen, sondern auch zu verlieren im Stande sein und sein sogenannter permanenter Magnetismus durch verschiedene Umstände variiren.

Auf der andern Seite vermag auch das weichste Eisen immer noch einen Teil des inducirten Magnetismus zurückzuhalten, und wird demgemäss auch da, wo keine inducirende Kraft existirt, residuellen Magnetismus aufweisen.

Die wirklichen magnetischen Eigenschaften des Eisens lassen sich nicht durch die naheliegende Hypothese, dass es aus streng weichem und aus streng hartem Eisen besteht, erklären. Man hat aber auf dem Wege der Erfahrung gefunden, dass man bei der Berechnung der Einwirkung des Schiffsmagnetismus auf die Compassnadel, wenn die Teile des Schiffes nicht gerade durch einen besondern Sturm in einen Zwangszustand versetzt sind, von der ideellen Supposition, dass Eisen nur weich oder nur hart sein kann, Gebrauch machen darf.

Die Gleichungen, auf denen die Berechnung der Correction der Angaben einer Compassnadel unter gegebenen Verhältnissen basirt, sind von Poisson in dem fünften Bande der *Mémoires de l'Institut* p. 533 (1824) aufgestellt worden.

Hinsichtlich des in den weichen Eisenteilen inducirten Magnetismus geht Poisson von der einzigen Annahme aus, dass die Componenten $X' Y' Z'$ der die Nadel störenden Kraft dieses inducirten Magnetismus in demselben Verhältnis abändern wie die Componenten der den Magnetismus der weichen Eisenteile inducirenden äussern Kraft.

Diese Annahme setzt voraus, dass die in weichem Eisen inducirte Magnetisirung proportional der magnetisirenden äussern Kraft variirt, das trifft zwar bei bedeutenden magnetisirenden Kräften nicht zu, darf aber bei magnetisirenden Kräften, deren Wirkung — wie das in der Praxis fast immer der Fall ist — so gross wie die des Erdmagnetismus ist, unbeanstandet als richtig angesehen werden.

Bringt also eine magnetische Kraft von der Stärke Eins vermittelst der weichen Eisenteile des Schiffes auf die Nadel eine störende Kraft hervor, deren nach den Axen der Coordinaten x, y, z genommenen Componenten die bezüglichen Werte a, d, g besitzen, so steigen die Componenten dieser störenden Kraft auf bezüglich aX, dX, gX, falls die äussere magnetische Kraft in ihrer Stärke von Eins auf X erhöht wird. Und diese Behauptung trifft in der Praxis hinlänglich sicher zu.

Ich lege das Axensystem der Coordinaten so in dem Schiffe fest, dass die x Axe nach dem Schiffshaupt, die y Axe nach der Steuerbordseite, die z Axe nach dem Kiel hinweist, bezeichne mit X, Y, Z die auf dieses Axensystem bezogenen Componenten der erdmagnetischen Kraft und mit X', Y', Z' die Componenten der die Lage der Nadel bestimmenden und durch die combinirte Wirkung des Erd- und Schiffsmagnetismus entstehenden Kraft, dann ist

$$
\begin{aligned}
X' &= X + aX + bY + cZ + P, \\
Y' &= Y + dX + eY + fZ + Q, \qquad (1) \\
Z' &= Z + gX + hY + kZ + R.
\end{aligned}
$$

Darin bedeuten $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ neun von der Masse, der Anordnung und der inductiven Capacität des auf und an dem Schiffe befindlichen weichen Eisens abhängige Grössen.

P, Q, R sind für das betreffende Schiff constante, durch seine permanente Magnetisirung bestimmte Grössen.

Es ist klar, dass die obigen Gleichungen genügend allgemein gehalten sind, wenn die magnetische Induction in linearer Abhängigkeit von der magnetischen Kraft steht, denn sie sagen nicht mehr und nicht weniger aus, als dass ein Vector in der allgemeinsten linearen Abhängigkeit von einem andern Vector steht.

Da man ferner, wie wir bald sehen werden, durch geeignete Anordnung der Eisenteile jeden der in den angeführten Gleichungen vertretenen Coefficienten unabhängig von allen andern abändern kann, so haben jene Gleichungen auch nicht zu allgemeine Form.

Sie sind unter den gemachten Annahmen notwendig und hinreichend zur Darstellung aller die Compassnadel betreffenden Erscheinungen.

Die Wirkung, welche die einzelnen Eisenteile auf die Compassnadel ausüben, hängt namentlich von ihrer Lage ab. Lässt man zum Beispiel einen langen dünnen Stab von einer magnetisirenden Kraft in Richtung seiner Axe, also longitudinal angreifen, so erhält er zwei Pole, deren bezügliche Stärken gleich dem Product aus dem Querschnitt des Stabes, seiner inductiven Capacität und der magnetisirenden Kraft ist. Hält man ihn dagegen quer zur magnetisirenden Kraft, so wird er so schwach magnetisirt, dass er schon in der Entfernung weniger Durchmesser keine merkliche Wirkung mehr auszuüben vermag.

Ich werde nun zeigen, wie die einzelnen in dem citirten Gleichungssysteme vertretenen Coefficienten entstehen.

Legt man einen langen dünnen Eisenstab vom Querschnitt A und der Capacität $\varkappa$ in der Richtung von der Nadel zur Kopfseite des Schiffes so hin, dass ein Pol sich in der positiven Entfernung x von der Nadel befindet, so ist die Kraft, die dieser Pol auf die Nadel ausübt, $F = A\varkappa\, X/x^2$, indem man also $A = ax^2/\varkappa$ macht, wird diese Kraft gleich aX. Giebt man dem Stab eine so grosse Länge, dass immer nur die Wirkung eines seiner Pole in Betracht kommen kann, so vermag man den Coefficienten a auf jeden verlangten Wert zu bringen.

Ich lege dann einen zweiten, sehr langen Stab aus demselben Material und vom Querschnitt B parallel zur yAxe, also von der Nadel zur Steuerbordseite, so hin, dass sein Pol von der Nadel wieder um x absteht. Die Kraftwirkung dieses Pols — und wenn wir den Stab so lang nehmen, dass sein anderer Pol die Nadel überhaupt nicht alterirt — die des Stabes, ist dann $B\varkappa\, Y/x^2$, oder indem man $bx^2/\varkappa = B$ setzt, auch gleich bY.

Der zweite Stab lässt also den Coefficienten b entstehen.

Analog giebt ein dritter langer Eisenstab vom Querschnitt C, den man von der Nadel nach dem Kiel so placirt, dass sein Pol von der Stärke $C\varkappa Z$ um dieselbe Grösse x von der Nadel entfernt ist, falls man $cx^2/\varkappa = C$ setzt, Veranlassung zur Entstehung der Kraft cZ.

Die Coefficienten d, e, f lassen sich in derselben Weise durch drei lange dünne Eisenstäbe, die von einem von der Nadel nach der Steuerbordseite zu gelegenen und von ihr um y abstehenden Punkt ausgehen und in die bezüglichen Richtungen Compassnadel, -Schiffskopf, -Steuerbordseite, -Kiel verlaufen, hervorbringen.

Endlich entstehen die drei Coefficienten g, h, k, wenn man drei lange dünne Eisenstäbe von einem zwischen Nadel und Kiel gelegenen um z von der Nadel entfernten Punkt ausgehen und in dieselben bezüglichen Richtungen wie die andern Stäbe verlaufen lässt.

Sind $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ die Querschnitte der Stäbe, so werden die Kraftwirkungen derselben auf die Nadel bezüglich

$$aX,\ bY,\ cZ,\ dX,\ eY,\ fZ,\ gX,\ hY,\ kZ,$$

wenn man

$$2)\qquad \begin{aligned} &a = \frac{A\varkappa}{x^2},\ b = \frac{B\varkappa}{x^2},\ c = \frac{C\varkappa}{x^2},\ d = \frac{D\varkappa}{y^2},\ e = \frac{E\varkappa}{y^2},\\ &f = \frac{F\varkappa}{y^2},\ g = \frac{G\varkappa}{z^2},\ h = \frac{H\varkappa}{z^2},\ k = \frac{K\varkappa}{z^2} \end{aligned}$$

setzt. Da nun die Querschnitte der Stäbe unabhängig von einander und ganz beliebig variirt werden können, so wird man auch durch geeignete Wahl derselben jeden der neun Coefficienten $a, \ldots k$ beliebig und ganz unabhängig von allen andern abzuändern vermögen.

Die drei Grössen P, Q, R sind einfach die Componenten der Einwirkung der permanent magnetisirten Eisenteile des Schiffes zusammen mit der des durch diese permanenten Magnete in den weichen Eisenteilen inducirten Magnetismus auf die Compassnadel.

Der Leser findet in dem von der englischen Admiralität herausgegebenen *Manual of the Deviation of the Compass* eine von Archibald Smith durchgeführte vollständige Discussion der unter 1) aufgestellten Hauptgleichungen und eine Auseinandersetzung über die Beziehung zwischen dem durch die gestörte Compassnadel und dem durch die ungestörte angezeigten Lauf eines Schiffes.

Dort ist auch eine sehr wirksame Methode zur Verfolgung des Problems gegeben.

Man zieht von einem festen Punkte aus eine Linie, welche die Grösse und Richtung der Horizontalcomponente der die Nadel in einer bestimmten Lage des Schiffes wirklich angreifenden magnetischen Kraft darstellt. Dreht man das Schiff um sich herum, so dass sein Kopf nach einander in verschiedene Azimute gelangt, so beschreibt das Ende jener Linie eine Curve, deren Punkte den verschiedenen Azimuten, nach denen das Schiff gerichtet ist, entsprechen.

Die Curve lehrt die magnetische, die Nadel angreifende Kraft nach Grösse und Richtung aus dem magnetischen Curs des Schiffes abzuleiten und heisst *Dygogramm.*

Es giebt zwei Methoden, das Dygogramm zu ziehen. Nach der einen zeichnet man die Curve auf einer Ebene, die im Raume fest liegt, während das Schiff sich um sich selbst herumdreht. Nach der andern ist die Ebene der Zeichnung im Schiffe fixirt.

Das nach der ersten Methode gezeichnete Dygogramm ist die *Limaçon von Pascal*, das nach der zweiten Methode angefertigte ist eine Ellipse. Hinsichtlich der Art, wie diese Curven gezeichnet und gebraucht werden, und hinsichtlich mehrerer für den Mathematiker interessanter, für den Schiffer wichtiger Theoreme verweise ich den Leser auf das citirte, von der englischen Admiralität herausgegebene Werk.*)

*) Siehe noch über den Compassdienst auf Schiffen, sowie über die üblichsten Formen der magnetischen Schiffsinstrumente das von der deutschen Admiralität edirte Werk *Nautisches Handbuch.*

Ferner *Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie*, 1881, Heft V. S. 255 ff.

Cap. VI.

Webers Theorie der magnetischen Induction.

Webers Hypothese von der Constitution der Magnete.

442a. Nach Poisson soll das Magnetisiren eines Körpers in einem in jedem Molekel stattfindenden Scheiden der beiden magnetischen Fluida von einander bestehen. Wem der Ausdruck ‚magnetisches Fluidum' Bedenken erregt, kann auch sagen, dass das Magnetisiren darin besteht, dass jedes Molekel des betreffenden Körpers ein Magnet wird.

Im Gegensatz dazu nimmt Weber an, dass die Molekel eines magnetisirbaren Körpers von vornherein Magnete sind, selbst ehe man den Körper einer magnetisirenden Kraft unterworfen hat. Doch sollen selbst in kleinen Teilen des Körpers, wenn er sich in seinem gewöhnlichen Zustande befindet, die positiven Richtungen der magnetischen Axen der einzelnen Molekel ganz gleichmässig nach allen Richtungen verteilt sein. Der Körper als solcher kann desshalb keine magnetischen Eigenschaften aufweisen.

Wird dann der Körper von einer magnetisirenden Kraft angegriffen, so strebt diese seine Molekel so zu drehen, dass die Axen derselben alle eine Richtung annehmen, der Körper wird zum Magnet.

Bestätigung durch die Existenz einer Grenze für die Magnetisirung.

442b. Reicht die Stärke der magnetisirenden Kraft dazu aus, die Axen aller Molekel einander parallel zu legen, so hat der betreffende Körper den höchsten Grad seiner Magnetisirung erreicht, und kann keine intensiveren magnetischen Eigenschaften mehr annehmen, wenn man die Stärke der magnetisirenden Kraft auch noch so sehr steigert. Die Webersche Theorie ergiebt also die Notwendigkeit der Existenz einer Grenze für die Magnetisirung der Körper, und kann nur aufrecht erhalten werden, wenn auch die Erfahrung eine solche Grenze erkennen lässt. In der Tat lehren die

Experimente von Joule*), J. Müller**), v. Waltenhofen***) u. a., dass die Magnetisirbarkeit des Eisens an einen Grenzwert gebunden ist.

Am unzweideutigsten wird die Existenz einer solchen Grenze durch die Versuche von Beetz †) über die electrolytische Ablagerung von Eisen unter dem Einfluss einer magnetisirenden Kraft dargelegt.

Der genannte Physiker firniste einen Silberdraht und zog auf seiner Mantelfläche einen feinen, den Firnis in seiner Längsrichtung ganz durchsetzenden Strich. Dann legte er den Draht in eine electrolytische Zelle, die eine Eisensalzlösung enthielt, und stellte die Zelle in einem magnetischen Felde so hin, dass der auf dem Silberdraht angebrachte feine Riss in die Richtung einer magnetishen Kraftlinie fiel. Indem er durch den Draht als Kathode einen die Zelle durchsetzenden Strom ableitete, lagerte sich Eisen in den feinen Riss, wo das Silber frei aus dem Firnis hervorsah, Molekel nach Molekel ab und bildete einen dünnen Eisenfaden. Eine darauf folgende magnetische Untersuchung des Eisenfadens ergab für denselben ein im Verhältnis zu seiner Masse sehr grosses magnetisches Moment. Liess Beetz den Faden von einer sehr bedeutenden magnetischen Kraft in derselben Richtung wie vorher angreifen, so wuchs die temporäre Magnetisirung des Fadens nur noch sehr wenig an, die permanente änderte sich überhaupt nicht. Wirkte dagegen die neue magnetische Kraft entgegengesetzt wie die erste, so wurde der Eisenfaden mit einem Male in einen Zustand versetzt, in dem er sich genau so verhielt, wie gewöhnliches Eisen, wenn es unter dem Einfluss einer magnetisirenden Kraft steht.

Die Webersche Hypothese, nach der während der Entstehung des Eisenfadens die Axen der Molekel unter dem Einfluss der magnetischen Kraft, bei ihrer Ablagerung alle sich in dieselbe Richtung stellen, stimmt also sehr gut zu den beobachteten Tatsachen.

Setzt man die Electrolyse nach Bildung des feinen Eisenfadens noch weiter fort, so zeigt das nachträglich abgelagerte Eisen eine stetig abnehmende Magnetisirung.

Wahrscheinlich werden die Axen dieser den schon vorhandenen Eisenmolekeln sich anlagernden spätern Molekel durch die Wirkung jener aus den magnetischen Kraftlinien herausgelenkt. Näherungsweise Parallelität der Axen der einzelnen Eisenmolekel würde sich demnach nur in dem Falle finden, wo der sich ablagernde Faden sehr dünn ausfällt.

Sind die Eisenmolekel, wie Weber voraussetzt, von vornherein Magnete, so wird eine magnetische Kraft, die sie bei ihrer electrolytischen Ablagerung einander parallel zu legen vermag, gleichzeitig in dem abgelagerten Faden die stärkste Magnetisirung, deren derselbe überhaupt fähig ist, hervorbringen.

---

*) *Annals of Electricity* (1839), IV. p. 131; *Phil. Mag.* series IV., vol. II. p. 316.
**) *Pogg. Ann.* Bd. 79, 82.
***) *Pogg. Ann.* Bd. 137.
†) *Pogg. Ann.* Bd. 111.

Wenn dagegen die Eisenmolekel nicht von vornherein schon fertige Magnete sind, sondern nur die Fähigkeit besitzen, unter dem Einfluss einer magnetisirenden Kraft zu Magneten zu werden, so muss die Magnetisirung des Eisenfadens in derselben Weise wie die eines gewöhnlichen Eisenstückes von der Grösse der magnetischen Kraft, die während seiner Entstehung wirkt, abhängen. Die von Beetz erhaltenen Resultate sprechen der zweiten Alternative die Berechtigung ab.

Webers Ableitung der Beziehung zwischen der magnetisirenden Kraft und der Magnetisirung eines weichen Körpers.

443 a. Ich nehme nun mit Weber an, dass in jeder Volumeinheit des Eisens n magnetische Molekel vorhanden sind, deren jedes das magnetische Moment m besitzt. Hätten die Achsen dieser Molekel alle eine und dieselbe Richtung, so wäre das Moment der Volumeinheit

$$M = nm, \tag{1}$$

und die Grösse M würde das höchste von dem Eisenstück erreichbare magnetische Moment darstellen.

Verteilung der Molekelaxen im unmagnetischen Zustande. In dem unmagnetischen Zustand des gewöhnlichen Eisens sollen nach Weber die Axen der Molekel nach allen möglichen Seiten in demselben Maasse gerichtet sein.

Um diese Hypothese in mathematische Form zu bringen, denken wir uns innerhalb der Substanz des Eisenstückes eine Kugel gelegt und von deren Centrum Radien nach allen Richtungen gezogen, denen die Axen der n Molekel folgen. Die Verteilung der Enden dieser Radien auf der Kugelfläche giebt dann eine Vorstellung von der Verteilung der Axen der Molekel im Raume.

Ist das Eisenstück unmagnetisch, so finden sich auf gleich grossen Stücken der Kugel gleich viel Radienenden, wo die Stücke auch auf der Kugel liegen mögen.

Die Anzahl aller Molekel, deren Axen mit der x Axe einen unterhalb α liegenden Winkel bilden, ist also

$$n_\alpha = \frac{n}{2}\left(1 - \cos\alpha\right).$$

Demnach wird die Anzahl der Molekel, deren Axen gegen die x Axe Stellungswinkel von der Grösse α bis zu der $\alpha + d\alpha$ aufweisen,

$$n_{d\alpha} = \frac{n}{2}\sin\alpha\, d\alpha.$$

Diesem Gesetze folgt die Anordnung der Molekel in einem Eisenstück, das sich noch niemals in einem magnetischen Zustande befunden hat.

443b. Verteilung der Molekelaxen im magnetischen Zustande. Ich gehe zu dem Fall über, wo der Körper von einer magnetischen Kraft in Richtung der x Axe angegriffen wird, und betrachte das Verhalten eines Molekels, dessen Axe gegen die x Axe um den Winkel α geneigt ist.

Könnte das betreffende Molekel sich völlig frei drehen, so würde es seine Axe der x Axe parallel legen. Die kleinste magnetische Kraft würde dann, falls alle Molekel des Körpers keinen Widerstand bei ihrer Drehung zu überwinden hätten, genügen, um dem Körper den höchsten Grad von Magnetisirung, dessen er überhaupt fähig ist, zu verleihen.

Das ist nun in der Tat nicht der Fall, die Molekel stellen sich nicht parallel der magnetisirenden Kraft. Der Grund dafür liegt entweder darin, dass jedes Molekel des Körpers an sich einer Kraft unterworfen ist, die es in seiner einmal eingenommenen Lage zu erhalten sucht, oder er ist in der entsprechenden Wirkung der Kräfte, die alle Molekel auf einander ausüben, zu suchen.

Weber geht von der ersten Alternative als der einfachern aus. Er setzt also voraus, dass jedes Molekel, wenn es aus seiner einmal eingenommenen Lage durch eine magnetische Kraft X abgelenkt wird, sich in dieselbe mit einer Kraft zurück zu begeben strebt, wie wenn es von einer magnetischen in seiner ursprünglichen Axenrichtung wirkenden Kraft D zurückgedreht würde.

Die tatsächliche Lage der Axe des Molekels fällt also in die Richtung der aus X und D resultirenden Kraft.

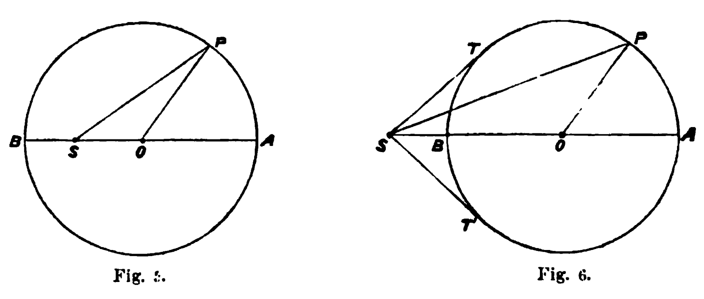


Fig. 5. Fig. 6.

Sei in den Figuren 5 und 6 der Kreis APB der Querschnitt einer Kugel, deren Radius auf irgend einer Scala die zurückdrehende Kraft D repräsentirt. Ich fixire die Axenrichtung eines Molekels, das sich in seiner Anfangslage befindet, durch die Richtung OP und stelle die magnetisirende in Richtung von S nach O wirkende Kraft X auf derselben Scala, auf der D gemessen ist, durch SO dar.

Wirken auf das Molekel gleichzeitig beide Kräfte X und D nach SO bezüglich OP, so wird seine Axe sich in der Richtung SP der Resultante dieser beiden Kräfte legen.

Da die Axen der Molekel des Körpers in seinem ursprünglichen Zustande gleichmässig alle möglichen Richtungen einnehmen sollten, so wird P ohne

Auswahl durch jeden Punkt der Kugel repräsentirt werden. Ist also, wie die Construction der Figur 5 voraussetzt, X kleiner als D, so wird SP, die schliessliche Axenrichtung eines Molekels, zwar jede beliebige Richtung einnehmen können, aber es werden mehr Molekel ihre Axen nach A als nach B hin drehen.

Wenn dagegen wie in der Figur 6 die Kraft X grösser als D ausfällt, so werden die Axenrichtungen der Molekel von der die Kugel berührenden Kegelfläche STT' eingefasst.

Wir haben also die beiden Fälle $X < D$ und $X > D$ von einander zu unterscheiden und getrennt zu betrachten.

Ich führe die folgenden Bezeichnungen ein:

Sei die ursprüngliche Neigung der Axe eines Molekels gegen die x Axe $\alpha = AOP$,

sei diese Neigung, wenn das Molekel unter dem Einfluss der beiden Kräfte X und D steht, $\vartheta = ASP$,

$\beta = SPO$ bezeichne den Ablenkungswinkel,

$X = SO$ „ die magnetisirende Kraft,

$D = OP$ „ die das Molekel in seine ursprüngliche Lage zurücktreibende Kraft,

$R = SP$ gebe die Resultante von X und D,

m sei gleich dem magnetischen Moment des Molekels.

Das Moment des durch X hervorgerufenen statischen Kräftepaares, welches die Ablenkung ϑ zu verringern sucht, ist

$$mL = mX \sin\vartheta, \tag{1}$$

das des durch D hervorgerufenen statischen Kräftepaares, welches ϑ zu vergrössern strebt, hat den Wert

$$mL' = mD \sin\beta = mD \sin(\alpha - \vartheta). \tag{2}$$

Die beiden Momente müssen einander, wenn das Molekel sich in die Richtung SP gelegt hat, gleich sein, demnach wird*)

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{D \sin\alpha}{X + D\cos\alpha}. \tag{3}$$

Inducirtes Moment. Diese Gleichung gestattet die neue Axenrichtung des betreffenden Molekels zu bestimmen, wenn man ausser seiner urspünglichen Axenrichtung die beiden Kräfte X und D kennt. Durch die Kraftwirkung X erhalten die Molekel die Tendenz, ihre Axen mehr oder weniger nach einer Richtung hin zu neigen, der Körper, dem sie angehören, wird demzufolge magnetisch. Die Stärke seiner Magnetisirung wird berechnet, indem man die in Richtung von x fallenden Componenten der magnetischen Momente seiner Molekel addirt.

*) Weber, *Electrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über Diamagnetismus*, p. 566 ff.

Für das betrachtete Molekel, dessen Axe nach ihrer Drehung gegen x um ϑ geneigt ist, hat die bezeichnete Componente des magnetischen Moments den Wert

$$d'J = m\cos\vartheta$$

und genau denselben Wert besitzt sie bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung für alle Molekel, deren Axen ursprünglich gegen die x Axe um Winkel zwischen α und $\alpha + d\alpha$ geneigt waren. Die x Componente des magnetischen Moments all dieser Molekel ist demnach nach Art. 443a

$$dJ = m\frac{n}{2}\cos\vartheta\sin\alpha\, d\alpha.$$

Die Componenten aller Molekel erhält man durch Integration über α von 0 bis π unter Berücksichtigung, dass ϑ eine Function von α ist.

Die Magnetisirung des betreffenden Körpers wird hiernach

$$J = \int_0^\pi \frac{mn}{2}\cos\vartheta\sin\alpha\, d\alpha.$$

Drückt man ϑ und α durch R aus, so wird

$$R\,dR = XDd(\cos\alpha),$$

$$\cos\vartheta = \frac{X + D\cos\alpha}{R} = \frac{R^2 + X^2 - D^2}{2RX},$$

also

$$J = -\int \frac{mn}{4}\frac{R^2 + X^2 - D^2}{X^2 D}\, dR.$$

Die Integrationsgrenzen sind für

$$X < D, \quad R = D + X, \; R = D - X;$$
$$X > D, \quad R = X + D, \; R = X - D;$$

und da das allgemeine Integral den Wert

$$-\frac{mn}{12}\frac{R}{X^2 D}(R^2 + 3X^2 - 3D^2) + C$$

besitzt, so wird für

$$\begin{aligned}
&X = 0, && J = 0,\\
&X < D, && J = \frac{2}{3}\frac{mn}{D}X,\\
4)\quad &X = D, && J = \frac{2}{3}mn,\\
&X > D, && J = mn\left(1 - \frac{1}{3}\frac{D^2}{X^2}\right),\\
&X = \infty, && J = mn.
\end{aligned}$$

Diese aus der Weberschen Theorie fliessenden Formeln drücken das Gesetz, nach welchem die Magnetisirung eines Körpers von der magnetisirenden Kraft bestimmt wird, aus.

Steigt die magnetisirende Kraft von 0 bis D an, so wächst die Magnetisirung proportional der magnetisirenden Kraft von 0 bis $2mnX/3D$ an, bei $X = D$ erreicht die Magnetisirung zwei Drittel des Wertes, den sie überhaupt zu erlangen vermag. Steigt die magnetisirende Kraft über D hinaus noch weiter an, so nimmt die Magnetisirung immer langsamer zu und erhält ihren Grenzwert mn erst, wenn die magnetisirende Kraft unendlich gross geworden ist.

Die beistehende Figur 7 stellt die durch die durchgeführten Rechnungen

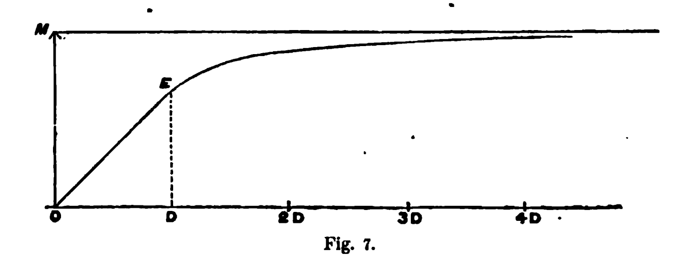


Fig. 7.

bestimmte Curve $J = f(X)$ dar. Die horizontale, von der Linken zur Rechten als positiv genommene Linie ist die Axe der X, die verticale die der J. Die Magnetisirungscurve geht von O aus, ist bis zum Punkte $X = D$, $J = 2mn/3$ gerade, krümmt sich dann und nähert sich asymptotisch der in der Höhe $J = mn$ über der X Axe dieser parallel gezogenen Geraden.

Die von Weber selbst an Eisen angestellten Versuche haben Resultate ergeben, welche mit seiner Theorie im Einklange stehen. Es ist aber wahrscheinlich, dass der Wert der Kraft D nicht für alle Molekel des Körpers denselben Betrag hat, und dann wird wohl der Uebergang der von O bis E reichenden Geraden in die von E bis ins Unendliche verlaufende krumme Linie nicht so plötzlich geschehen, wie bei der Zeichnung der vorstehenden Figur angenommen worden ist.

Maxwells Theorie des remanenten Magnetismus.

444. Hypothese. Die oben auseinandergesetzte Webersche Theorie der magnetischen Induction gilt nur für magnetisch wirklich weiche Körper, sie giebt keine Rechenschaft von dem in allen Substanzen auftretenden remanenten Magnetismus. Es schien mir daher wünschenswert, eine weitere Hypothese über die Bedingungen, unter denen die Gleichgewichtslagen der Molekel eines Körpers durch eine magnetische Kraft dauernd verändert werden können, zu machen und die Consequenzen derselben zu verfolgen.

Ich nehme an, dass die Axe eines magnetischen Molekels, wenn die dasselbe angreifende Kraft entfernt wird, so lange in ihre frühere Lage zurückkehrt, als die durch die Kraft hervorgebrachte Ablenkung β derselben einen gewissen Wert β_0 nicht überschreitet, dass sie dagegen dauernd um den Winkel $\beta - \beta_0$ abgelenkt bleibt, wenn die das Molekel angreifende Kraft sie über den Winkel β_0 hinaus gedreht hat.

Diese Annahme über das Gesetz, dem die Ablenkungen der Molekel folgen sollen, ist nicht als Ausfluss einer exacten Kenntnis der innern Structur der Körper anzusehen. Ich habe sie bei der Unwissenheit, in der wir uns über den wahren Sachverhalt befinden, nur deshalb eingeführt, um der Einbildungskraft des Lesers bei der folgenden Erweiterung der Weberschen Speculationen zu Hilfe zu kommen.

Inducirte Magnetisirung. Ich setze

$$L = D \sin \beta_0.$$

Ein Molekel wird dann durch eine Kraft, deren Drehungsmoment kleiner als mL ist, nicht für immer aus seiner Gleichgewichtslage abgelenkt, es kehrt, sowie die Kraft zu wirken aufhört, in seine frühere Gleichgewichtslage zurück. Dagegen wird das Molekel eine permanente Deflexion erhalten, wenn es von einer Kraft mit einem Drehungsmoment angegriffen wird, welches mL übersteigt.

Ich beschreibe wieder eine Kugel, deren Centrum in O liegt und deren Radius die Grösse $OL = L$ hat.

So lange X die Grösse L nicht übersteigt, ist die Magnetisirung des Körpers temporär, es gelten für sie alle im vorigen Artikel erhaltenen Resultate. So wie aber X einen grössern Wert als L erhält, wird die Magnetisirung permanent, und die frühern Formeln ändern sich.

Nehmen wir zunächst den in Figur 8 repräsentirten Fall, wo also $OL = L < OS = X < OP = D$ ist. Wir legen durch S alle Strahlen, welche die Kugel (L) berühren und die Kugel (D) schneiden, und erhalten

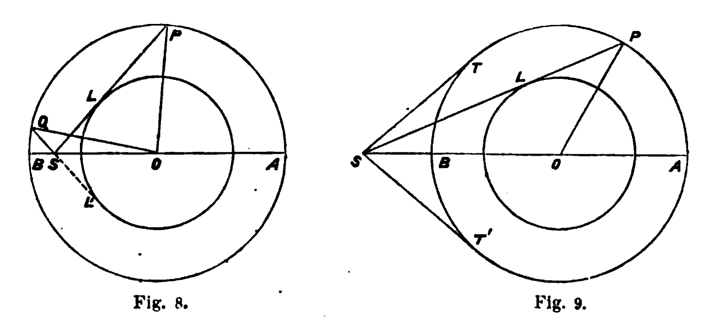


Fig. 8. Fig. 9.

zwei coaxiale Kegel, deren Spitzen in S liegen, und von denen der eine die Kugel (L) in Punkten L berührt, die Kugel (D) in Punkten P schneidet,

der andere die Kugel (L) gar nicht, die Kugel (D) in Punkten Q trifft. Der Winkel SPO ist gleich β_0. Alle Molekel, deren Axenrichtungen ursprünglich mit der Axe BOA einen kleinern Winkel als AOP oder BOQ bilden, werden durch die Kraft X um einen Winkel abgelenkt, der einen geringern Wert als β_0 besitzt, ihre Deflexion ist also an die Existenz der Kraft X gebunden und hört gänzlich auf, wenn diese verschwindet. Dagegen werden die Molekel, deren Axenrichtungen ursprünglich in dem von den Strahlen OP und OQ eingefassten Raum liegen, nach der Richtung SP um Winkel β abgelenkt, die grösser als β_0 sind. Hört die Kraft zu wirken auf, so gehen diese Molekel nicht in ihre frühere Gleichgewichtslage zurück. Der Teil der Kraft D, der sie um den Winkel $\beta - \beta_0$ zurück drehen würde, wirkt nicht mehr, es bleibt nur der Teil, der sie um β_0 zurückdreht. Somit behalten diese Molekel eine permanente Ablenkung von der Grösse $\beta - \beta_0$, sie legen ihre Axen alle so lange die Kraft X wirkt, in die Richtung SP, und wenn diese zu wirken aufhört, in die Richtung OP.

Bezeichnet man mit $\vartheta_1, \vartheta, \vartheta_2$ die Neigung, die die Axe eines Molekels gegen die Axe BOA erhält, je nachdem sie ursprünglich in der Ecke AOP, POQ oder QOB lag, so werden ϑ_1 und ϑ_2 genau so wie in Art. 443a bestimmt, ϑ ist aber für alle betreffenden Molekel gleich PSO. Ich setze

$$OL = L, \quad OS = X, \quad OP = D, \quad SP = R,$$
$$AOP = \alpha_0, \quad AOQ = \alpha_1, \quad SPO = \beta_0, \quad PSO = \vartheta_0.$$

Dann ist noch

$$BOQ = \pi - \alpha_1, \quad QSB = \vartheta_0, \quad SQO = \beta_0;$$

a) $$\alpha_0 = \vartheta_0 + \beta_0, \quad \alpha_1 = \pi - (\vartheta_0 - \beta_0), \quad BOQ = \vartheta_0 - \beta_0;$$
ferner

b) $$\sin\vartheta_0 = \frac{L}{X}, \quad \sin\beta_0 = \frac{L}{D};$$

c) $$SP = \frac{DX}{L}\sin(\vartheta_0 + \beta_0),$$

d) $$SQ = \frac{DX}{L}\sin(\vartheta_0 - \beta_0).$$

Das Moment des magnetisirten Körpers berechnet sich genau so wie im vorangehenden Artikel. Man hat also

$$J = \int_0^{\alpha_0} \frac{mn}{2}\cos\vartheta_1 \sin\alpha\, d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\pi} \frac{mn}{2}\cos\vartheta_2 \sin\alpha\, d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{mn}{2}\cos\vartheta \sin\alpha\, d\alpha.$$

In den beiden ersten Integralen sind ϑ_1 und ϑ_2 wie in Art 443b aus der daselbst unter 3) gegebenen Gleichung zu berechnen, in dem dritten Integral ist ϑ constant gleich ϑ_0. Wenn nun $X < L$ ist, so bleiben die

Resultate des vorhergehenden Artikels ungeändert. Ist dagegen $D > X > L$, so wird

$$-J = \left[\frac{mnR}{12X^2D}(R^2+3X^2-3D^2)\right]_{D+X}^{SP} + \left[\frac{mnR}{12X^2D}(R^2+3X^2-3D^2)\right]_{SQ}^{D-X}$$
$$-\frac{mn}{2}\cos\vartheta_0(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1).$$

Die beiden ersten Glieder haben nur einen temporären Wert und ergeben zunächst

$$-J_1 = -\frac{2}{3}\frac{mn}{D}X + \frac{mn}{12X^2D}\left\{(3X^2-3D^2)(SP-SQ)+SP^3-SQ^3\right\}.$$

Darin ist nach b), c) und d)

$$SP - SQ = \frac{2DX}{L}\cos\vartheta_0\sin\beta_0 = 2X\sqrt{1-\frac{L^2}{X^2}},$$
$$SP^3 - SQ^3 = \frac{2D^3X^3}{L^3}\cos\vartheta_0\sin\beta_0\,(3\sin^2\vartheta_0\cos^2\beta_0+\cos^2\vartheta_0\sin^2\beta_0)$$
$$= 2X(X^2+3D^2-4L^2)\sqrt{1-\frac{L^2}{X^2}}.$$

Hiernach wird

$$J_1 = \frac{2}{3}\frac{mn}{D}X - \frac{2}{3}\frac{mn}{D}X\left(1-\frac{L^2}{X^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Weiter haben wir

$$-J_2 = \frac{mn}{2}\cos\vartheta_0(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0),$$

also

$$J_2 = \frac{2mn}{2}\left(1-\frac{L^2}{X^2}\right)\sqrt{1-\frac{L^2}{D^2}}.$$

Wenn ferner wie in Fig. 9 $L < D < X$ ist, so haben wir

$$J = \int_0^{\alpha_0}\frac{mn}{2}\cos\vartheta\sin\alpha\,d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\pi}\frac{mn}{2}\cos\vartheta_0\sin\alpha\,d\alpha.$$

Das erste Integral stellt die Magnetisirung der Molekel dar, die nach Aufhören der Kraftwirkung keine Magnetisirung mehr haben, sein Wert ist

$$J_1 = \frac{mn}{6X^2D}\left\{(X+D)^2(2X-D)-(\xi^{\frac{1}{2}}+\delta^{\frac{1}{2}})(2\xi-\delta+\xi^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}})\right\},$$

wo

$$\xi = X^2-L^2,\quad \delta = D^2-L^2$$

gesetzt ist.

Das zweite Integral giebt die Magnetisirung der Molekel, welche nach Entfernung der magnetisirenden Kraft remanenten Magnetismus zeigen, und ist

$$J_2 = \frac{mn}{2} \cos\vartheta_0 (\cos\alpha_0 + 1) = \frac{mn}{6X^2D}\left\{3\xi^{\frac{1}{2}} XD + 3\xi\delta^{\frac{1}{2}} - 3\xi^{\frac{1}{2}}L^2\right\}.$$

Fasst man alle bisher erlangten Resultate zusammen, so hat man*) für

$$X = 0 : J = 0;$$

$$X < L : J = \frac{2}{3} M \frac{X}{D};$$

$$X = L : J = \frac{2}{3} M \frac{L}{D};$$

$$D > X > L : J = \frac{2}{3} M \frac{X}{D} + M\left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right)\left(\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{X^2}{D^2} - \frac{L^2}{D^2}}\right);$$

$$D = X > L : J = \frac{2}{3} M + \frac{1}{3} M \left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}};$$

$$D < X > L : J = M\left(1 - \frac{1}{3}\frac{D^2}{X^2}\right) + M\left\{\frac{D^2}{6X^2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right) + \frac{X}{3D}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right) - \frac{L}{6X}\left(\frac{L}{X}\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} + \frac{L}{D}\sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right)\right\}.$$

$$X = \infty : J = M.$$

Die Formeln sind so geschrieben, dass die Weberschen Terme von den andern (Maxwellschen) sich abscheiden.

So lange X kleiner als L ist, folgt die Magnetisirung dem Weberschen Gesetze, nimmt also der magnetisirenden Kraft proportional zu. Uebersteigt aber X den Wert des L, so verringert sich die Anzahl der Molekel, die

---

*) Der Herausgeber der zweiten engl. Auflage, Herr Niven, macht an dieser Stelle darauf aufmerksam, dass bei Maxwell in der letzten Formel ($L < D < X$) fälschlich $D/6X$ statt $D^2/6X^2$ steht. Ich habe die ganze Rechnung nochmals controlirt und dasselbe wie Herr Niven gefunden. Um dem Leser eine eventuelle Nachrechnung zu erleichtern, ist die Ableitung der Maxwellschen Formeln etwas weitläufiger durchgeführt. Der Uebers.

nur temporär magnetisirt werden, und die Magnetisirung nimmt rascher als die magnetisirende Kraft zu. Später hört das rasche Ansteigen der Magnetisirung auf, die Magnetisirung nähert sich asymptotisch der Grenze M, die sie für $X=\infty$ erreicht.

445. Remanente Magnetisirung. Hört die Kraft X zu wirken auf, so tritt der Körper in den unmagnetischen Zustand zurück, wenn $X<L$ war. Wenn dagegen die magnetisirende Kraft einen grössern Wert als L hatte, so zeigt der Körper auch nach Verschwinden derselben noch einen remanenten Magnetismus.

Die Grösse dieses remanenten Magnetismus J' ist leicht zu berechnen, wenn man bemerkt, dass die Molekel, deren Axen in der Ecke POQ liegen, nach Aufhören der Kraftwirkung X sich so richten, dass ihre Axen alle der Linie OP parallel verlaufen und dass alle andern Molekel in ihre frühern Lagen zurückkehren. Demnach ist

für $X<D$

$$J'=\frac{mn}{2}\left\{\int_0^{\alpha_0}\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha+\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\cos\alpha_0\sin\alpha\,d\alpha+\int_{\alpha_1}^{\pi}\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha\right\}$$

$$=\frac{mn}{4}\left\{\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\right\}^2,$$

für $X>D$

$$J'=\frac{mn}{2}\left\{\int_0^{\alpha_0}\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha+\int_{\alpha_0}^{\pi}\cos\alpha_0\sin\alpha\,d\alpha\right\}=\frac{m}{4}\left\{1+\cos\alpha_0\right\}^2.$$

Also haben wir

$$X<L:\ J'=0,$$
$$X=L:\ J'=0,$$
$$D>X>L:\ J'=M\left(1-\frac{L^2}{D^2}\right)\left(1-\frac{L^2}{X^2}\right);$$
$$D=X>L:\ J'=M\left(1-\frac{L^2}{D^2}\right)^2;$$
$$D<X>L:\ J'=\frac{M}{4}\left(1-\frac{L^2}{XD}+\sqrt{1-\frac{L^2}{D^2}}\sqrt{1-\frac{L^2}{X^2}}\right)^2;$$
$$X=\infty:\ J'=\frac{M}{4}\left(1+\sqrt{1-\frac{L^2}{D^2}}\right)^2.$$

Um über den Verlauf der Curven $J=f(X)$, $J'=\varphi(X)$ einen Ueberblick zu erhalten, setze ich speciell

$$M=1000,\quad L=3,\quad D=5$$

und habe die folgende Tabelle:

Magnetisirende Kraft.	Temporäre Magnetisirung.	Remanente Magnetisirung.
X	J	J'
0	0	0
1	133	0
2	267	0
3	400	0
4	729	280
5	837	410
6	887	485
7	917	537
8	936	574
9	949	602
10	959	626
∞	1000	810

Die beistehende Figur 10 stellt den Verlauf dieser Zahlen graphisch dar. Die Abscissen sind die Grössen X, die Ordinaten die Grössen J bezüglich J'.

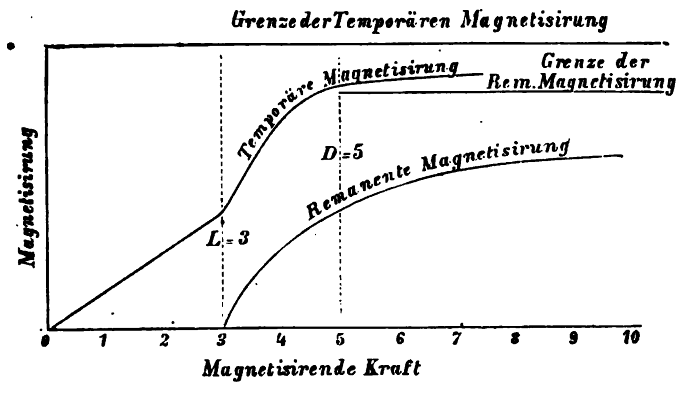


Fig. 10.

Die Curve, welche die Magnetisirung während der Wirkungsdauer der Kraft X darstellt, geht vom Punkte O aus, steigt erst bis $X = L = 3$, $J = 400$ gerade an, krümmt sich dann, indem sie bis $X = D = 5$, $J = 837$ noch steiler in die Höhe geht, und verläuft dann asymptotisch gegen die obere Grenze 1000 der Magnetisirung.

Die zweite Curve, die die Abhängigkeit des remanenten Magnetismus J' von der vorangegangenen magnetisirenden Kraft anzeigt, beginnt bei $X = L = 3$,

$J' = 0$ und nähert sich asymptotisch der Grenze 810, die der remanenten Magnetisirung gesteckt ist.

Doch gelten die hier für die Stärke des remanenten Magnetismus abgeleiteten Ausdrücke nur unter der Bedingung, dass der im Körper verteilte Magnetismus keine auf die Molekel wirkende demagnetisirende Kraft ausübt, wenn die äussere Kraft entfernt ist. Sie werden also nur bei langen, verhältnismässig dünnen, longitudinal magnetisirten Körpern Anwendung finden können. Bei dicken kurzen Körpern wird der remanente Magnetismus durch die Reaction des freien Magnetismus vermindert.

So gestaltete Körper verhalten sich also so, wie wenn sie nach Entfernung der magnetisirenden Kraft von einer dieser entgegen wirkenden äussern Kraft angegriffen würden.

446. Wiederholte Magnetisirung und Entmagnetisirung. Man darf den wissenschaftlichen Wert einer Theorie wie die eben auseinandergesetzte nicht nach ihrer etwaigen Uebereinstimmung mit gewissen numerisch beobachtbaren Tatsachen beurteilen. Denn einerseits beruht sie auf vielen ad hoc eingeführten Hypothesen, und andererseits können die Ausdrücke, die sie liefert, durch die in ihnen vertretenen Constanten den Tatsachen angepasst werden.

Hat sie überhaupt einen Wert, so beruht dieser namentlich darin, dass sie uns eine Vorstellung von dem, was in einem Eisenstück während es magnetisirt wird, vorgeht, verschafft. Ich will aber die Theorie auf die Concordanz der Erscheinungen, die sie voraussagt, mit der Erfahrung prüfen.

Wir untersuchen den Fall, wo ein Eisenstück erst einer magnetisirenden Kraft X_0 und nach Aufhören dieser einer andern X_1 unterworfen wird. Wirkt X_1 nach derselben Richtung wie X_0, so wird es den durch X_0 hervorgerufenen remanenten Magnetismus entweder ganz ungeändert lassen, oder vermehren.

Das erstere findet statt, wenn X_1 kleiner als X_0 ist, denn dann wird X_1 keine weitern Molekel in die Classe der permanent verdrehten Molekel einführen, die remanente Magnetisirung wird also nach Aufhören der Kraft X_1 ebenso gross sein, wie nach Aufhören der Kraft X_0. Das zweite trifft ein, wenn X_1 grösser als X_0 ausfällt, die remanente Magnetisirung nach Aufhören der Kraft X_1 ist dann ebenso gross, wie wenn die Kraft X_0 gar nicht gewirkt hätte.

Im zweiten Fall, wo X_1 in entgegengesetzter Richtung wie X_0 wirkt, setze ich

$$X_0 = L \operatorname{cosec} \vartheta_0, \quad X_1 = - L \operatorname{cosec} \vartheta_1.$$

ϑ_1 nimmt mit wachsendem X_1 an Grösse ab. Die Molekel, welche zuerst von der Kraft X_1 eine permanente Ablenkung erleiden, sind diejenigen, welche durch die Kraft X_0 schon eine solche erhalten haben, also diejenigen, die mit der Axe BOA nach Aufhören der Kraft X_0 den Winkel $\alpha_0 = \beta_0 + \vartheta_0$ bilden. Die permanente Ablenkung derselben und damit die Demagnetisirung

des Körpers greift Platz, wenn X_1 so stark angewachsen ist, dass $\vartheta_1 - \beta_0$ kleiner als $\vartheta_0 + \beta_0$ geworden ist, sie beginnt also, wenn ϑ_1 den Wert $\vartheta_0 + 2\beta_0$ erreicht hat. Da dann $X_1 = - L \operatorname{cosec}(\vartheta_0 + 2\beta_0)$ ist, so fängt die Demagnetisirung schon an, wenn X_1 numerisch noch kleiner als X_0 ist.

Sind die Grössen D und L für alle Molekel von demselben Betrage, so genügt schon der geringste numerische Zuwachs, den man X_1 über den Grenzwert $L \operatorname{cosec}(\vartheta_0 + 2\beta_0)$ erteilt, um die Axen der genannten durch die Kraft X_0 permanent abgelenkten Molekel aus der Neigung $\vartheta_0 + \beta_0$ gegen die Axe OA in die Neigung $\vartheta_1 + \beta_0$ gegen die entgegengesetzte Richtung, OB, zu verlegen.

So plötzlich greift nun freilich tatsächlich die Demagnetisirung, wenn die demagnetisirende Kraft eine gewisse Grenze überschreitet, nicht Platz, doch geschieht das immerhin so schnell, dass die obige theoretische Folgerung nicht ganz ungerechtfertigt erscheint.

Ich setze jetzt voraus, dass die Kraft X_1 auf eine solche Höhe gebracht ist, dass das Eisenstück gerade vollständig demagnetisirt wird.

Ein derart demagnetisirtes Eisenstück verhält sich nun keineswegs wie ein Eisenstück, welches überhaupt nicht magnetisirt gewesen ist. In diesem herrscht in den Axenlagen keine Richtung vor der andern vor, in jenen dagegen haben wir hinsichtlich der Axenlagen drei Gruppen von Molekeln zu unterscheiden.

1) Die erste Gruppe umfasst alle Molekel, deren Axen in dem Kegelraum, dessen Halbwinkel gleich $AOP = \vartheta_0 + \beta_0 = \vartheta_1 - \beta_0$ ist, gelegen sind; ihre Axen verlaufen ganz indifferent nach allen möglichen Richtungen im Raume.

2) Zur zweiten Gruppe gehören die Molekel, deren Axen in dem Kegel, dessen Halbwinkel gleich $QOB = \vartheta_0 - \beta_0 = \vartheta_1 - 3\beta_0$ ist, liegen, auch ihre Axen sind ganz gleichmässig nach allen Richtungen des Raumes verteilt.

3) In die dritte Gruppe endlich fallen alle andern Molekel, ihre Axen liegen in dem von den genannten Kegeln ausgeschlossenen Raum und bilden mit der negativen Axe OB Winkel von der Grösse $\vartheta_1 + \beta_0 = \vartheta_0 + 3\beta_0$.

Von den drei genannten Gruppen verschwindet die zweite, wenn die magnetisirende Kraft X_0 grösser als D gewesen ist, die erste, wenn X_1 numerisch grösser als D ausfällt.

In einem demagnetisirten Eisenstück sind also jedenfalls die Axen der Molekel anders als in einem von vornherein unmagnetischen Eisenstück verteilt.

Der Unterschied zwischen einem demagnetisirten und einem unmagnetischen Eisenstück zeigt sich sofort, wenn man eine dritte magnetisirende Kraft X_2 einführt.

Auf das unmagnetische Stück wirkt sie wie die Kraft X_0.

Beim demagnetisirten bringt sie den ersten permanenten Effect in der dritten Gruppe von Molekeln hervor, deren Axen gegen die negative Axe OB um $\vartheta_1 + \beta_0$ geneigt sind.

Wirkt X_2 wie X_1 in der negativen Richtung, so beginnt ihre permanente Einwirkung, wenn $\vartheta_2 + \beta_0$ unter $\vartheta_1 + \beta_0$ herabzusinken anfängt, also $\vartheta_2 = \vartheta_1$ wird, das heisst, wenn X_2 einen numerisch grössern Wert als X_1 erreicht. Wirkt dagegen X_2 wie X_0 in der positiven Richtung, so beginnt die permanente Magnetisirung des Eisens, wenn $\vartheta_2 - \beta_0$ kleiner als $\vartheta_1 + \beta_0$, also $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \beta_0$ wird, X_2 ist dann numerisch kleiner als X_1.

Fassen wir alles zusammen, so folgt aus der durchgeführten Theorie:

> Wenn ein Eisenstück durch eine Kraft X_0 magnetisirt worden ist, so kann sein remanenter Magnetismus nur noch durch eine grössere magnetisirende Kraft vermehrt werden.
>
> Durch eine Kraft, welche weniger stark als die magnetisirende Kraft wirkt, kann der remanente Magnetismus verringert werden, wenn man sie als demagnetisirende Kraft in entgegengesetzter Richtung wie die magnetisirende wirken lässt.
>
> Ist das Eisenstück durch die Gegenwirkung einer Kraft X_1 völlig demagnetisirt, so kann es in Richtung der demagnetisirenden Kraft nur dann magnetisirt werden, wenn man es einer magnetisirenden Kraft von grösserer Stärke, als die demagnetisirende gewesen ist, unterwirft. Zum Beginn der remanenten Remagnetisirung des Eisenstückes nach der ursprünglichen Richtung braucht man dagegen keine so grosse Kraft wie X_1.

Diese Folgerungen stehen mit den von Ritchie*), Jacobi**), Marianini***), Joule†) u. A. beobachteten Verhältnissen im Einklange††).

Eine ausserordentlich vollständige Auseinandersetzung über das Verhalten von Eisen und Stahl gegen magnetisirende Kräfte und gegen mechanischen Zwang hat Wiedemann in seinem Werk über Galvanismus gegeben. In einer eingehenden Vergleichung der Effecte, die Magnetisirung einerseits und Torsion andererseits hervorbringt, zeigt er, dass man die Erkenntnis, die wir aus den Experimenten über temporäre und permanente Torsion hinsichtlich der Elasticität und Plasticität der Körper gewonnen haben, mit gleichem Erfolg zur Aufklärung der Erscheinungen bei der temporären und permanenten Magnetisirung von Eisen und Stahl verwenden kann.

---

*) *Phil. Mag.* 1833.

**) *Pogg. Ann.* 1834.

***) *Ann. de chimie et de physique* 1846.

†) *Phil. Trans.* 1855 p. 287.

††) F. Auerbach hat in Wiedemanns *Annalen für Physik und Chemie* Bd. 11 (1880) p. 382 ff. eine allgemeine Uebersicht über die bisher aufgestellten Theorieen des inducirten Magnetismus, freilich mit Uebergehung der Maxwellschen, gegeben. Anm. d. Uebers.

Wirkung einer Deformation auf die Magnetisirung eines Körpers.

447. Dehnt man einen harten Eisenstab während der Magnetisirung aus, so wächst, wie Matteucci*) aus Versuchen gefunden und Wertheim bestätigt hat, seine temporäre Magnetisirung an. Dagegen bewirkt bei weichem Eisen eine Dehnung während der Magnetisirung eine Verringerung des temporären Magnetismus.

Der permanente Magnetismus eines Eisenstabes wird grösser, wenn man ihn dehnt und kleiner, wenn man ihn durch eine Druckkraft in einen comprimirten Zustand versetzt.

Magnetisirt man also ein Eisenstück nach einer Richtung und dehnt es nach einer andern Richtung aus, so nähert sich die Richtung der Magnetisirung der Richtung der Ausdehnung. Comprimirt man dagegen das Eisenstück, so sucht sich die Magnetisirung senkrecht zur Compressionsrichtung zu stellen.

Daraus lässt sich eine Erklärung für eine bekannte von Wiedemann beobachtete Erscheinung ableiten. Lässt man einen Strom durch einen vertical aufgehängten Draht von oben nach unten fliessen, so wird jedes Teilchen des Drahtes, wie wir noch sehen werden, horizontal so magnetisirt, dass das zur Linken liegende Ende einen Nordpol aufweist. Wiedemann

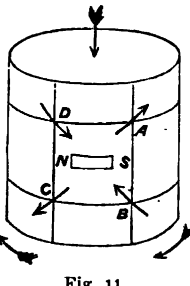


Fig. 11.

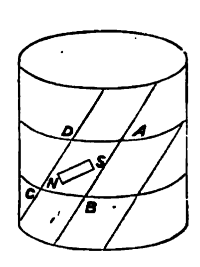


Fig. 12.

tordirte nun den Draht, während derselbe von einem electrischen Strom durchflossen wurde, oder auch nachdem der Strom schon verschwunden war, wie die beistehende Figur 11 zeigt, in Richtung einer rechtsdrehenden Schraube und fand dann, dass das untere Ende desselben einen Nordpol zeigte.

Während man den Draht in der angegebenen Weise drillt, wird ein Stück $ABCD$ desselben in der Diagonale CA ausgedehnt und in der Diagonale DB comprimirt, es nimmt die in der Figur 12 angegebene Gestalt an. Demnach wird die Magnetisirung sich der Richtung AC nähern

*) *Ann. de chimie et de physique* 1858.

und von der Richtung DB entfernen, und infolge dessen muss — wie aus der Figur 12 unmittelbar zu ersehen ist — das untere Ende des Drahtes zum Nordpol, das obere zum Südpol werden.

Aenderung der Dimensionen eines Körpers durch Magnetisirung.

448. Im Jahre 1842 fand Joule*), dass ein Eisenstab sich verlängert, wenn man ihn durch einen Strom, der eine ihn umgebende Spirale durchfliesst, magnetisirt. Später**) zeigte er, indem er den Stab in eine mit Wasser gefüllte Glasröhre stellte, dass diese Verlängerung mit keiner Volumveränderung verbunden war. Der Stab musste sich also während er sich verlängerte in seinen Querdimensionen verkürzen.

Endlich verwandelte er eine eiserne Röhre, indem er durch das Innere derselben längs der Axe einen Strom fliessen liess, den er ausserhalb ihrer Mantelfläche zur Electricitätsquelle zurückleitete, in ein geschlossenes magnetisches Solenoid, mit einer zur Axe senkrechten Magnetisirungsrichtung. Die Röhre zeigte sich in ihrer Längsrichtung verkürzt.

Ferner fand er, dass die Magnetisirung einen longitudinal gepressten Eisenstab zu verlängern, dagegen einen gedehnten, wenn die Zugkraft eine bedeutende Stärke hatte, zu verkürzen strebte.

Die Verkürzung trat bei einem Draht von 5 mm Durchmesser ein, wenn er durch ein Gewicht von 270 kg gespannt war.

Bei einem harten Stahldraht brachte die Magnetisirung sowohl, wenn er comprimirt, als auch wenn er dilatirt wurde, stets eine Verkürzung hervor. Doch war die Längenänderung an die Existenz der magnetisirenden Kraft gebunden, sie verschwand, wenn diese zu wirken aufhörte. Die remanente Magnetisirung afficirte also den Draht nicht.

Die Verlängerung der comprimirten Eisendrähte nahm in den Jouleschen Experimenten näherungsweise proportional dem Quadrat der wirklichen Magnetisirung zu, der erste Effect eines demagnetisirenden Stromes bestand also in einer Verkürzung.

Die Verkürzung eines gespannten Eisendrahtes oder eines Stahldrahtes variirte dagegen wie das Product aus der Magnetisirung und der magnetisirenden Stromstärke.

Magnetisirt man einen vertical aufgehängten Draht durch gegen seine Längsrichtung normal gerichtete Ströme so, dass sein oberes Ende einen Südpol aufweist und lässt ihn dann von einem Strome von oben nach unten durchfliessen, so tordirt sich, wie Wiedemann gefunden hat, das untere Ende desselben, wenn es frei ist, in Richtung der Zeiger einer Uhr, die

*) Sturgeons *Ann. of Elec.*, Vol. VIII. p. 219.
**) *Phil. Mag.* 1847.

mit dem Zifferblatt nach oben gelegt ist. Der erste magnetisirende Strom hat die einzelnen Teilchen so zu richten gesucht, dass ihre Nordpole nach unten weisen, der zweite Strom strebt nun, diese Teilchen so zu drehen, dass ihre Nordpole zur Linken liegen. Folgen die Teilchen dieser Drehung, so wird (s. Fig. 11, 12) die Richtung AC sich zu verlängern, die Richtung BD dagegen zu verkürzen streben, und das entspricht den Resultaten, die Joule aus seinen Versuchen abgeleitet hat, dass nämlich ein Draht durch eine magnetisirende Kraft in Richtung ihrer Wirkung gedehnt und senkrecht dazu verkürzt wird.*)

Weitere Entwickelungen über die Theorie der Magnetisirung sollen in den Artt. 832 bis 845 gegeben werden.

---

*) Der Leser, dem diese, der Aufgabe der Buches entsprechend, kurz gehaltenen Auseinandersetzungen aus einem an experimentellen Material so reichen Gebiet nicht genügen, sei namentlich auf das grosse Wiedemannsche Werk über Galvanismus verwiesen. Der Uebers.

Cap. VII.

Magnetische Messungen.

—x—

Allgemeine Einrichtung der magnetischen Apparate.

449. Die Hauptaufgaben, die die magnetischen Messungen zu lösen haben, bestehen in der Bestimmung der magnetischen Axe und des magnetischen Moments eines Magnets, in der Auffindung der Richtung, nach der eine magnetische Kraft wirkt, und der Stärke, mit der sie bestimmte Punkte angreift.

Da man magnetische Messungen in der Nähe der Erdoberfläche anstellt, so unterliegen die Magnete sowohl der Kraft der Schwere als der des Erdmagnetismus. Zur Herstellung von Magneten bedient man sich des Stahls, ihr Magnetismus wird also in einem gegebenen Moment zum Teil permanent, zum Teil temporär inducirt sein. Der permanente Magnetismus wird durch Temperaturänderungen, durch starke Induction und durch heftige, erschütternde Stürme verändert; der temporäre Magnetismus variirt mit jeder Variation der äussern inducirenden Kraft.

Am besten lässt sich die Wirkung, die eine Kraft auf einen Magnet ausübt, beobachten, wenn man dem Magnet gestattet, sich frei um eine verticale Axe zu bewegen. Beim gewöhnlichen Compass lässt man deshalb den Magnet auf einem senkrecht gestellten, oben zugespitzten Stift balanciren; je feiner dabei die Spitze des Stiftes hergestellt wird, um so weniger Reibung hat der Magnet bei einer eventuellen Drehung um dieselbe zu überwinden. Bei Beobachtungen, die grössere Exactheit verlangen, hängt man den Magnet an einem völlig torsionsfreien Seidenfaden auf. Trägt ein Faden das Gesammtgewicht des Magnets nicht, so legt man mehrere Fäden aneinander, sorgt aber, dass ein Faden nicht mehr Gewicht zu tragen hat, als der andere. Das Torsionsmoment eines solchen Fadens ist weit geringer, als das eines gleich starken metallenen Drahtes und lässt sich durch Beobachtung des Azimuts des Magnets leicht berechnen. Die Reibung, die ein auf einer Spitze balancirender Magnet bei seiner Bewegung erfährt, ist viel schwieriger zu bestimmen.

Der Faden wird an ein Ansatzstück befestigt, das sich durch eine in einer festen Mutter laufende Schraube auf und nieder bewegen lässt. Während seiner verticalen Verschiebung darf der Faden keine seitliche Translation erleiden. Man verfährt daher auch so — siehe die beistehende Figur 13 — dass man den Faden auf eine horizontal gelegte Schraube aufwickelt, durch Drehen der Schraube rollt sich der Faden ab oder auf, ohne aus seiner Verticallinie herauszutreten.

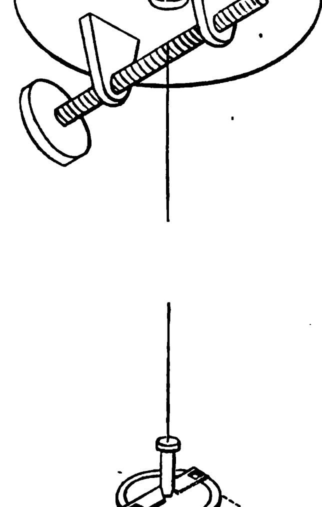


Fig. 13.

An seinem unteren Ende trägt der Faden vermittelst eines Ansatzstückes einen kleinen geteilten Kreis, den *Torsionskreis*, und einen mit einem Index versehenen Bügel. Man richtet den Bügel so ein, dass der Index auf einen bestimmten Strich des Torsionskreises hinweist, und dass der Magnet in ihn horizontal (d. h. mit horizontal gerichteter magnetischer Axe) eingelegt werden kann.

Die Torsion des Fadens lässt sich dadurch bestimmen, dass man in den Bügel einen Körper von der Schwere des später zu benutzenden Magnets legt und die Lage des Index gegen die Teilung des Torsionskreises markirt.

Der Magnet besteht aus einem hart angelassenen Stahlstück, dem man nach Gauss und Weber eine die grösste Querdimension mindestens acht mal überragende Längsdimension verleiht. Das starke Ueberwiegen der Länge über Breite und Höhe soll gegen etwaige sonst eintretende Aenderung in der Richtung der magnetischen Axe schützen. Kommt es namentlich auf prompte Bewegung an, so muss man den Magnet kürzer nehmen, und da, wo man plötzliche Aenderungen einer magnetischen Kraft nachzuweisen hat, wird es sich sogar empfehlen*), einen Stab transversal zu magnetisiren und vertical aufzuhängen.

450. An den Magnet bringt man eine Einrichtung an, mittelst deren man seine Lage gegen eine durch den Faden gehende Verticalebene zu jeder Zeit bestimmen kann. Für gewöhnliche Zwecke lässt man den Magnet in oder über der Ebene eines geteilten Kreises schwingen und giebt seinen Enden eine spitze Form. Zur Vermeidung der Parallaxe bei der Ablesung richtet man den Blick in eine Ebene, die durch den Aufhängungsfaden und das betreffende spitze Ende des Magnets geht.

*) Joule, *Proc. Phil. Soc., Manchester* 1864, No. 29.

Bei genauern Beobachtungen befestigt man an ein Ende des Magnets einen Spiegel, den man so justirt, dass seine Normale tunlichst in die Richtung der magnetischen Axe des Magnets fällt. Die Beobachtung der Lage des Magnets geschieht in noch anzugebender Weise mit Fernrohr und Scale. Dieser (von Poggendorff und Gauss herrührenden) Methode haben sich Gauss und Weber bedient.

In einer andern Vorrichtung bringt man an das eine Ende des Magnets eine Linse und an das andere eine in Glas eingravirte Scale an. Die Hauptbrennweite der Linse wird gleich ihrer Entfernung von der Scale genommen, und das Ganze wird so justirt, dass die Gerade, welche den Nullpunkt der Scale mit dem optischen Mittelpunkt der Linse verbindet, so nahe als möglich mit der magnetischen Axe des Magnets zusammenfällt.

Die beiden genannten optischen Methoden zur Bestimmung der angularen Lage eines Körpers sind nicht blos hier, sondern überhaupt in allen Zweigen der Physik von höchster Bedeutung, ich werde daher ihre Theorie genau auseinandersetzen.

Ablesung mit Spiegel und Scale.

Beobachtung mit Fernrohr. Der Apparat, dessen angulare Position zu bestimmen ist, soll sich um eine verticale Axe, also um den Faden oder Draht, an dem er aufgehängt ist, drehen können.

Der an dem Apparat befestigte Spiegel muss möglichst eben sein, damit man das Bild, welches er von einer in Millimeter geteilten Scale durch Reflexion entwirft, in einer Entfernung von mehreren Metern von ihm noch ganz deutlich zu sehen vermag.

Man justirt die Stellung des Spiegels so lange, bis die durch seine Mitte gelegte Normale durch die Drehungsaxe des Apparates geht und tunlichst horizontal verläuft. Die bezeichnete Normale heisst die *Collimationslinie* des Apparates.

Dem Spiegel gegenüber und etwas über ihm ist in geeigneter Entfernung ein Fernrohr mit Fadenkreuz postirt, das sich in einer Verticalebene bewegen lässt.

Man richtet das Fernrohr auf den Aufhängungsfaden nach der Stelle, die sich gerade über dem Spiegel befindet, und bringt in der Gesichtslinie an einem Orte, der vom Objectiv doppelt so weit wie der Spiegel absteht, eine Marke an. Die Marke darf ihre Lage nicht verrücken, man tut daher gut, wenn man sich so einrichtet, dass sie gerade auf eine Wand oder einen sonst gehörig festen Gegenstand fällt. Da man bei der Fixirung der Marke diese und den Faden zu gleicher Zeit durch das Fernrohr sehen muss, und demgemäss bei einem von beiden eine starke Parallaxe hat, so setzt man auf das Objectiv einen Deckel, der in der Mitte von einem vertical verlaufenden Schlitz unterbrochen ist; das Auge wird dadurch gezwungen,

nach einer bestimmten Stelle hinzusehen, und vermag eher zu entscheiden, wo die durch den Focus und den Aufhängefaden gelegte Ebene die Wand trifft. Selbstverständlich wird der Deckel weggetan, wenn die Marke, die *Mire*, wie man sie nennt, fixirt ist. Man hängt nun an das Stativ des Fernrohrs ein Bleilot so auf, dass sein Faden in der durch den optischen Mittelpunkt des Objectivglases und den Aufhängefaden des Apparates gelegten Ebene verläuft, und bringt unterhalb des Fernrohrs eine in gleiche Teile, etwa Millimeter, geteilte Scale an. Die Klammer, die die Scale trägt, gestattet dieselbe senkrecht zu der durch die Mire, den Aufhängefaden und das Lot gehenden Ebene zu stellen. Die Entfernung der Scale vom Fussboden muss zusammen mit der des Objectivglases, doppelt so gross als die des Spiegels genommen werden. Richtet man dann das vorher auf die Mire eingestellte Fernrohr auf den Spiegel, so sieht man in ihm das reflectirte Bild der Scale und zugleich das des die Scale schneidenden Lotes. Wenn die Collimationslinie, wie nötig, mit der Mire und dem optischen Mittelpunkt in eine Ebene fallen soll, so muss das Spiegelbild der Scale, da wo es von dem des Lotes geschnitten wird, mit dem verticalen Faden des im Fernrohr angebrachten Fadenkreuzes coincidiren. Ist das nicht der Fall, sondern geht der Verticalfaden des Fernrohrs durch das Bild eines anderen Teilungsstrichs der Scale wie die Lotlinie, so hat man die Collimation des Apparates zu bestimmen. Das Verfahren ist das folgende:

Man projicirt die hervorragenden Teile der ganzen Einrichtung auf eine horizontale Ebene. Die beistehende Figur 14 repräsentirt eine solche Horizontalprojection. O ist der Mittelpunkt des Objectivs vom Fernrohr, P die

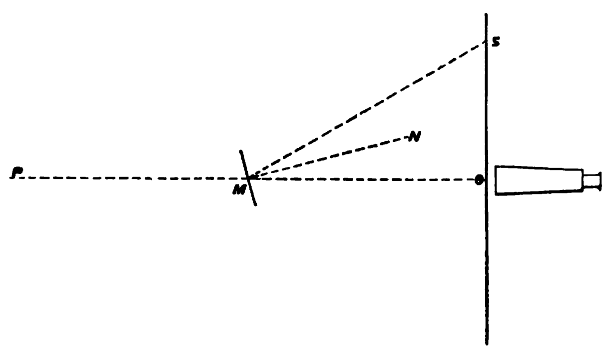


Fig. 14.

Mire, M der Punkt, wo die Linie OP den Spiegel schneidet und MN die Spiegelnormale. Der Winkel $OMN = \vartheta$ fixirt dann die Lage, die die Collimationslinie gegen die durch OMP gehende senkrechte Ebene einnimmt. Zieht man die Linie MS, welche gegen MN eben so stark geneigt ist, wie MN gegen MO, so wird $SMN = NMO$, demnach giebt S die Stelle der

Scale an, die im reflectirten Bilde derselben von dem verticalen Faden des Fernrohrs geschnitten wird.

Ich nehme an, dass der Spiegel so weit justirt ist, dass die Spiegelnormale horizontal verläuft, wir haben dann $OMS = 2\vartheta$, mithin $OS = OM \operatorname{tg} 2\vartheta$.

Man misst also zuerst die Strecke OM in Teilen der Scale, liest an derselben den Teilstrich s_0 ab, wo sie von dem Lot, und den Teilstrich s, wo ihr Spiegelbild von dem senkrechten Faden des Fernrohrs getroffen wird. Die Gleichung zur Bestimmung der Collimation ist dann

$$s - s_0 = OM \operatorname{tg} 2\vartheta,$$

woraus ϑ berechnet wird. Die Strecke OM läuft vom Mittelpunkt des Objectivglases bis zu der das virtuelle Bild entwerfenden Fläche des Spiegels, diese Fläche als unmittelbar mit der Luft in Berührung gedacht. Wenn der Spiegel aus Metall besteht, so fällt diese Fläche mit der spiegelnden Fläche zusammen, ist er dagegen aus Glas vom Brechungsindex μ in der Dicke δ hergestellt, so liegt die besagte Fläche um die Grösse δ/μ hinter der vordern Ebene des Spiegels.

Der Punkt O markirt die Stelle, wo die Lotlinie die Scale und damit die optische Axe des Fernrohrs schneidet, die ihn reflectirende Stelle M des Spiegels wird also mit ϑ variiren, wenn der Aufhängungsfaden des Apparates nicht mit P, M und O in derselben Verticalebene enthalten ist, man muss daher dafür sorgen, dass die Stelle O der Scale im reflectirten Bilde tunlichst in die Verlängerung des Aufhängungsfadens fällt.

Bei der Drehung des Apparates beschreibt der Punkt M einen Kreis, ist also die Scale gerade, so muss man die Ablesungen in ihrem Spiegelbilde mit Hilfe einer Tangententafel reduciren. In Fällen, wo man verhältnissmässig grosse Ablenkungswinkel zu beobachten hat, tut man besser, die Scale gleich aus einer Cylinderfläche, deren Axe möglichst genau mit dem Aufhängungsfaden, der Rotationsaxe des Apparates, zusammenfällt, auszuscheiden. Die Ablesungen geben dann gleich Bogenteile. Die der Scale aufgedruckten Zahlen lässt man, um negative Ablesungen zu vermeiden,

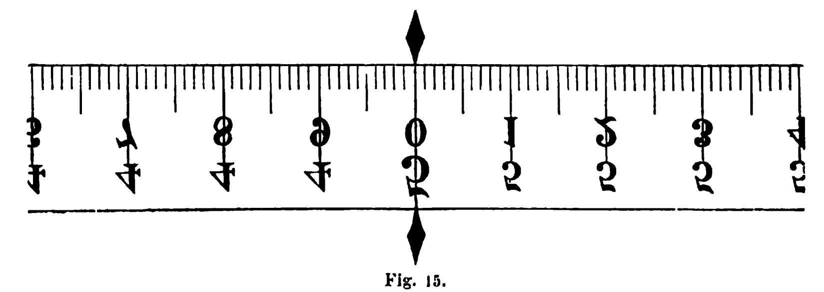


Fig. 15.

am besten von einem zum andern Ende fortlaufen. Die Figur 15 repräsentirt den mittlern Teil einer solchen Scale, wenn sie in einem Spiegel durch ein astronomisches (umkehrendes Fernrohr) beobachtet wird.

Wo es sich um Verfolgung langsamer Bewegungen handelt, kann man sich kaum eine bessere und bequemere Methode wünschen als die eben auseinandergesetzte. Der Beobachter sitzt am Fernrohr und sieht das Bild der Scale sich von rechts nach links oder von links nach rechts am Verticalfaden des Fernrohrs vorbeibewegen. Er kann so die räumlichen Oscillationsgrenzen an der Scale fixiren, und wenn er eine lautschlagende Uhr zur Seite hat, vermag er die Zeit anzugeben, wann ein bestimmter Strich der Scale den Verticalfaden passirt hat, oder welcher Strich bei einem bestimmten Schlage der Uhr am Verticalfaden vorbeigeht.

Schwingt jedoch der Apparat verhältnismässig rasch, so vermag das Auge den einzelnen Strichen der Scale nur noch an den Stellen zu folgen, wo die Bewegung sich umkehrt. Man tut dann am besten, auf der Scale einen bestimmten Strich ganz besonders hervorzuheben, nur diesen in seiner Bewegung zu beobachten und die Zeit seines Durchganges durch den Verticalfaden zu notiren.

Objective Beobachtung; automatische Registrirung. Ein leichter Apparat, der von variabeln Kräften angegriffen wird, schwingt so prompt und schnell, dass man eines Fernrohrs gar nicht bedarf. Man sieht direct auf die Scale und folgt der Bewegung des Bildes, welches der Spiegel von einem Gegenstande auf die Scale wirft. Als solcher Gegenstand kann ein dunkler oder heller vom Spiegel auf die Scale geworfener Streifen dienen.

Wenn nämlich das Bild eines Scalenstrichs, welches vom Spiegel entworfen und vom Objectiv gebrochen wird, mit dem Verticalfaden coincidirt, so muss auch umgekehrt das Bild des Verticalfadens, wenn es vom Spiegel reflectirt wird, auf den betreffenden Strich der Scale fallen. Stellt man also hinter das Fadenkreuz eine starke Lichtquelle auf, so sieht man auf der Scale einen hellen, durch das Fernrohr gegangenen und vom Spiegel reflectirten Lichtstreifen, der von dem Schatten des Verticalfadens genau an der Stelle geschnitten wird, die im Fernrohr am Verticalfaden erscheint. Man kann die Bewegung dieses Schattens mit unbewaffnetem Auge verfolgen und die Striche der Scale, wo er seine Bewegungsrichtung umkehrt, bequem ablesen.

Um den Schatten des Verticalfadens scharf hervortreten zu lassen, macht man das Zimmer dunkel und lässt die Strahlen der Lampe nur durch das Fernrohr gehen. Die Striche der Scale, die gerade von dem Schatten bedeckt werden, verschwinden für den Beobachter, und man kann so auch den Zeitpunkt feststellen, zu dem der Schatten gerade an einem bestimmten Scalenstrich vorbei geht.

Ersetzt man ferner das Fadenkreuz durch einen Schirm, der einen verticalen Schlitz enthält und lässt durch den Schirm und das Objectivglas Licht auf den Spiegel fallen, so reflectirt dieses das Bild des Schlitzes auf die Scale, und man sieht auf diesem einen hellen Streifen sich bewegen. Der Streifen befindet sich genau an der Stelle der Scale, die im Fernrohr gesehen die Stelle des Schlitzes einnimmt.

Diese letzte Methode kann auch dazu dienen, um die ganze Bewegung automatisch zu registriren.

Man setzt an Stelle der Scale einen horizontal liegenden Cylinder, den man durch ein Uhrwerk sich um eine horizontale Axe drehen lässt und bedeckt die Mantelfläche des Cylinders mit photographischem Papier. Der leuchtende, vom Spiegel auf den Cylinder geworfene Fleck zieht dann eine photographische Curve, die man später sichtbar machen kann. Jede Ordinate der Curve entspricht einem bestimmten Zeitmoment und die dazugehörige Abscisse giebt die angulare Position, die der Spiegel in diesem Zeitmoment besessen hat.

In dieser Weise registrirt man in Kew und in andern Beobachtungsstationen die Veränderung aller Elemente des Erdmagnetismus.

Manchmal lässt man das Fernrohr ganz fort, stellt hinter einen verticalen Faden eine Lampe und giebt dem Spiegel eine concav gekrümmte Form. Der Spiegel entwirft dann auf der Scale ein Bild des Fadens, und es erscheint daselbst ein dunkler Streifen auf erleuchtetem Grunde.

Ablesung mit Linse und Scale.

451. In dem portablen Apparat von Kew besteht der Magnet aus einer Stahlröhre, an deren einem Ende eine Glasscale, an deren andern Ende eine Linse angebracht ist. Die Scale wird von hinten erleuchtet und durch ein Fernrohr beobachtet. Sie wird so justirt, dass ihre Normale durch den Mittelpunkt der Linse geht und ihren Fusspunkt in dem Hauptbrennpunkt der Linse hat. Das die Scale im Fusspunkt der Normale durchsetzende Licht tritt aus der Linse in parallelen Strahlen aus. ist also das Fernrohr auf Unendlich (auf himmlische Objecte) eingestellt, so erscheint das Bild der Scale in der Ebene seines Fadenkreuzes.

Coincidirt ein bestimmter Scalenstrich mit dem Schnittpunkt der beiden Fäden des Fadenkreuzes, so muss die Linie, welche diesen Teilstrich mit dem optischen Mittelpunkt der Linse verbindet, mit der Collimationsaxe des Fernrohrs zusammenfallen.

Man bestimmt zuerst den Winkelwert der Scalenintervalle, indem man den Magnet mit der Scale festlegt, das Fernrohr horizontal um an einem Horizontalkreis ablesbare Winkel dreht und die entsprechenden Verschiebungen des in ihm gesehenen Bildes der Scale notirt. Lässt man dann den Apparat schwingen und fixirt das Fernrohr, so kann man aus der Nummer des Teilstrichs der Scale, der mit dem Durchschnittspunkt der Fäden zusammenfällt, zu jeder Zeit auf die Lage des Magnets schliessen.

Diese Anordnung ist von besonderm Vorteil bei der Construction kleiner portabeler Magnetometer, wo der ganze Apparat sich auf einem Dreibein befindet und wo die durch äussere Störungen hervorgebrachten Schwingungen sich rasch beruhigen.

Bestimmung der horizontalen Wirkungsrichtung (Declination) des Erdmagnetismus und der Axe eines Magnets.

452. Collimation. Der Magnet, dessen Axe bestimmt werden soll, habe die Form eines Parallelepipeds. Seine Länge laufe parallel der z Axe eines in ihm gelegten Coordinatensystems und seine Seitenflächen mögen von der x bezüglich y Axe senkrecht getroffen werden.

Ich bezeichne mit l, m, n die Winkel, die die magnetische Axe des Magnets, und mit λ, μ, ν die, welche die Collimationslinie, also, wenn der Magnet einen Spiegel trägt, die Spiegelnormale, mit den Axen der x, y, z bildet.

M sei das magnetische Moment des Magnets, H die Horizontal-, Z die Verticalcomponente des Erdmagnetismus und δ das von Norden nach Westen gerechnete Azimut der Wirkungsrichtung von H.

Weiter nenne ich ζ das beobachtete Azimut der Collimationslinie, α das Azimut des den Magnet haltenden Bügels, welches sehr nahe mit dem der z Axe übereinkommt, und β die Ablesung des Torsionskreises am Index, wenn der Nullpunkt der Teilung nach Norden weist. $\alpha - \beta$ ist dann das Azimut des untern Endes des Aufhängungsfadens, und wenn γ den Wert von $\alpha - \beta$ angiebt, falls der Faden gar keine Torsion aufweist und τ den Torsionscoefficienten des Fadens bezeichnet, so hat das Moment der Torsionskraft, welches α zu verringern strebt, die Grösse

$$\triangle = \tau(\alpha - \beta - \gamma).$$

Die Richtungswinkel der Collimationslinie gegen die Coordinatenaxen lassen sich durch die Azimute derselben in den verschiedenen Lagen, die man dem Magnete zu verleihen vermag, bestimmen.

Man nimmt den den Magnet enthaltenden Bügel vom Aufhängungsfaden ab und legt ihn so fest, dass die Axe der y vertical nach oben, die der z horizontal nach Norden, die der x horizontal nach Westen zeigt und notirt das Azimut ζ der Collimationslinie. Weil aber diese Collimationslinie nur wenig aus der Horizontalebene heraustreten wird, hat man auch

$$1_1) \qquad \zeta = \alpha + \frac{\pi}{2} - \lambda.$$

Dann nimmt man den Magnet aus dem Bügel heraus, dreht ihn um 180^0 um die z Axe, wobei die y Axe nach unten, die x Axe nach Osten verlegt wird, tut ihn in den Bügel hinein und notirt wieder das Azimut ζ' der Collimationslinie.

Es gilt dann sehr näherungsweise die Gleichung

$$1_2) \qquad \zeta' = \alpha - \frac{\pi}{2} + \lambda.$$

Demnach wird

$$2) \qquad \lambda = \frac{\pi}{2} + \frac{\zeta' - \zeta}{2}.$$

Stellt man genau dieselben Beobachtungen an, indem man den Magnet in der fixirten Lage des Bügels so orientirt, dass die x Axe einmal nach oben und dann nach unten zeigt, so erhält man eine ganz entsprechende Gleichung für μ. Der Winkel ν folgt dann aus der Formel

$$1 = \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu.$$

Declination. Hängt man jetzt den Bügel wieder an den Aufhängungsfaden an und legt den Magnet sorgfältig so hinein, dass die y Axe möglichst genau vertical und nach oben zeigt, so ist das Drehungsmoment, welches auf den Magnet ausgeübt wird und den Winkel α zu vergrössern strebt (Art. 390 am Schluss) gleich

$$\text{3a)} \qquad D = MH \sin m \sin\vartheta - \tau(\alpha - \beta - \gamma).$$

ϑ giebt den Winkel, den die Horizontalprojection der magnetischen Axe mit der Richtung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus einschliesst, und kann, weil der Winkel, den diese Horizontalprojection mit der x Axe bildet, sehr nahe den Wert l hat, gleich

$$\vartheta = \delta - \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - l\right)$$

gesetzt werden. Man hat also

$$\text{3b)} \qquad D = MH \sin m \sin\left(\delta - \alpha - \frac{\pi}{2} + l\right) - \tau(\alpha - \beta - \gamma)$$

oder zufolge der Gleichung 1_1)

$$\text{3c)} \qquad D = MH \sin m \sin(\delta - \zeta + l - \lambda) - \tau\left(\zeta + \lambda - \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right).$$

Hat der Apparat unter dem Einfluss der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus und der Torsion des Aufhängungsfadens seine Gleichgewichtslage erreicht, so wird

$$\text{4)} \qquad MH \sin m \sin(\delta - \zeta + l - \lambda) - \tau\left(\zeta + \lambda - \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right) = 0,$$

und daraus bestimmt sich der Wert, den ζ in der Gleichgewichtslage des Apparates besitzt.

Lässt sich die Gleichgewichtslage des Apparates, weil er sich in schwingender Bewegung befindet, nicht fixiren, so kann man das Azimut ζ der Spiegelnormale für die Gleichgewichtslage nach einer Methode, die erst in Art. 735 ausgeführt werden soll, rechnerisch eruiren.

Die Existenz der Gleichung 4) verlangt, dass wenn die Torsionskraft des Aufhängungsfadens im Vergleich mit der magnetischen Kraft klein ist, dass dann auch der Winkel $\delta - \zeta + l - \lambda$ sich nur wenig von Null unterscheidet.

Man darf in diesem Fall den Sinus mit dem Bogen vertauschen und hat

$$4_1) \qquad MH \sin m = \frac{\tau\left(\zeta + \lambda - \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right)}{\delta - \zeta + l - \lambda}.$$

Die Gleichung enthält vier unbekannte Grössen, nämlich das magnetische Moment M des Magnets, die Horizontalcomponente H des Erdmagnetismus, die magnetische Declination δ des Ortes, die noch mit der Zeit variiren kann, und den Winkel l der magnetischen Axe mit der Ost-West-Richtung. Ich werde zunächst zeigen, wie man die beiden letzten Grössen durch besondere Operationen am Apparat zu bestimmen vermag.

Man tordirt den Aufhängungsfaden einmal bis der Index am Torsionskreis den Strich β_1, und dann bis er den Strich β_2 angiebt, und hat, wenn ζ_1 und ζ_2 die entsprechenden für die bezüglichen Gleichgewichtslagen des Apparates geltenden Azimute der Collimationslinie bezeichnen, und die beiden Operationen so rasch hintereinander ausgeführt werden, dass weder H noch δ sich ändert,

$$5a) \qquad MH(\zeta_2 - \zeta_1) \sin m = \tau(\zeta_1 - \zeta_2 - \beta_1 + \beta_2),$$

oder falls die beobachtbare Grösse

$$6) \qquad \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2 - \beta_1 + \beta_2} = \tau'$$

gesetzt wird,

$$5b) \qquad MH\tau' \sin m = \tau.$$

Darnach verwandelt sich die Gleichung 4_1) für jede andere Gleichgewichtslage in

$$7a) \qquad \delta - \zeta + l - \lambda = \tau'\left(\zeta + \lambda - \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right).$$

Nach Beobachtung des Azimuts ζ der Collimationslinie in der betreffenden Lage dreht man den Magnet um die z Axe um 180^0 und justirt seine Orientirung so, dass die y Axe genau vertical und nach unten, die x Axe nach Osten weist. Die Beobachtung des Azimuts ζ' liefert, da während dieser Operation die Declination δ sich geändert haben kann, die Gleichung

$$\delta' - \zeta' - l + \lambda = \tau'\left(\zeta' - \lambda + \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right),$$

und aus dieser und der zuerst ausgeführten Beobachtung folgt die Declination $\overline{\delta}$ zwischen beiden Beobachtungen

$$7b) \qquad \overline{\delta} = \frac{\delta + \delta'}{2} = \frac{\zeta + \zeta'}{2} + \tau'\left(\frac{\zeta + \zeta'}{2} - (\beta + \gamma)\right).$$

Darin bezeichnet β die Ablesung des Torsionskreises während der Beobachtung und γ die, wenn der Aufhängungsfaden völlig untordirt ist.

Um diese letztere Grösse zu bestimmen, legt man in den Bügel statt des Magnets einen andern, mit ihm gleich schweren unmagnetischen Stab und liest das Azimut α_1 des Bügels, wofür man das Azimut der langen Seite des Stabes setzen kann, ab. Die Grösse $\alpha_1 - \beta$ ist dann der Wert, den γ besitzt. Da τ' einen nur unbedeutenden Wert hat, so ist keine grosse Genauigkeit in der Bestimmung des γ erforderlich.

Nach einer andern Methode, die die Grösse $\beta + \gamma$ zugleich finden lehrt, legt man in den Bügel statt des Magnets einen unmagnetischen ausgehöhlten Körper von demselben Gewicht, der in seinem Innern einen sehr kleinen Magnet enthält, dessen Moment nur $1/n$ von dem des ursprünglichen Magnets beträgt. Da τ dadurch seinen Wert nicht ändert, so geht τ' in $n\tau'$ über, und man hat, falls man wieder die Azimute ζ_n, ζ'_n in den beiden Lagen des Stabes beobachtet und die Declination sich während des ganzen Versuchs nicht merklich ändert,

$$\overline{\delta} = \frac{\zeta_n + \zeta'_n}{2} + n\tau'\left(\frac{\zeta_n + \zeta'_n}{2} - (\beta + \gamma)\right).$$

Durch Subtraction von der entsprechenden Gleichung 7) erhält man zur Berechnung der Grösse $\beta + \gamma$ die Formel

$$8)\qquad 2(n-1)(\beta+\gamma) = \left(n + \frac{1}{\tau'}\right)(\zeta_n + \zeta'_n) - \left(1 + \frac{1}{\tau'}\right)(\zeta + \zeta').$$

Die Bestimmung von τ' und γ' kann immer nur mit wenig Präcision durchgeführt werden; man wird daher den Versuch so anzuordnen suchen, dass der Einfluss des zweiten Gliedes in dem Ausdruck für δ möglichst reducirt wird. Das lässt sich aber mit Hilfe der verhältnismässig willkürlichen Grösse β leicht bewerkstelligen. Nachdem man nämlich in obiger Weise $\beta + \gamma$ bestimmt hat, kann man die Ablesung des Torsionskreises β durch Torsion des Fadens so lange abändern, bis in der gewöhnlichen Lage des Apparates nahezu

$$\zeta + \zeta' - 2(\beta + \gamma) = 0$$

wird, dann geht der Ausdruck für $\overline{\delta}$ über in

$$7_1)\qquad \overline{\delta} = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta').$$

Da τ' an sich schon klein ist, so wird in diesem Falle $\tau'[\zeta + \zeta' - 2(\beta + \gamma)]$ eine kleine Grösse zweiter Ordnung, und demgemäss werden durch gehörige Wahl des β die nicht zu umgehenden Fehler in der Bestimmung von τ' und γ aus dem Resultat eliminirt.

In dieser Weise lässt sich der Wert der magnetischen Declination, wenn sie während der einzelnen zu ihrer Eruirung nötigen Beobachtungen nicht wesentlich variirt, mit genügender Genauigkeit ableiten.

Da, wo es sich aber um grosse Präcision handelt, kann man schon nicht umhin, auch ihre Variation mit in Rechnung zu ziehen. Zu dem

Behufe beobachtet man die Lagenänderungen, die ein zweiter in der Nähe aufgehängter Magnet während der Versuche spontan erleidet. Sind η und η' die Azimute der Collimationslinie des zweiten Magnets zu der Zeit, wo die den Declinationen δ, δ' entsprechenden Azimute ζ, ζ' der Collimationslinie des ersten Magnets abgelesen werden, so hat man

$$\delta - \delta' = \eta - \eta'.$$

Demnach wird die Declination zu der Zeit, wo am ersten Magnet das Azimut ζ notirt wurde (wo also die y Axe senkrecht und nach oben, die x Axe horizontal und nach Westen ging),

$$\text{7c)} \qquad \delta = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta' + \eta - \eta') + \frac{1}{2}\tau'(\zeta + \zeta' - 2\beta - 2\gamma).$$

Bestimmung der Axe eines Magnets. Die Gleichungen, die wir bisher abgeleitet haben, dienen auch zur Bestimmung der Lage der magnetischen Axe des Magnets. Man findet nämlich aus den unter 7a) und 7c) gegebenen Beziehungen

$$\text{9)} \qquad l = \lambda + \frac{1}{2}(\zeta - \zeta') - \frac{1}{2}(\eta - \eta') + \frac{1}{2}\tau'(\zeta - \zeta' + 2\lambda - \pi).$$

λ ist durch die zur Ableitung der Gleichung 2) vorgeschriebenen Beobachtungen bestimmt.

Durch entsprechende Beobachtungen, die man an dem Magnete anstellt, während seine x Axe vertical einmal nach oben und dann nach unten weist, erhält man den Wert für m. n folgt dann aus der Gleichung

$$\sin^2 n = \cos^2 l + \cos^2 m.$$

Unter allen Umständen sollte man aber da, wo die Einrichtung des Apparates eine Justirung der Lage seiner Collimationslinie gestattet, dafür sorgen, dass sie wirklich nahezu in die Axe des Magnets fällt, denn nur dann hat die zur Bestimmung der einzelnen Grössen notwendige Umlegung des Magnets den im Texte vorausgesetzten Erfolg.*)

Bestimmung des magnetischen Moments eines Magnets und der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus.

453. Wirkung eines Magnets auf eine kleine Magnetnadel. Ich behandele zunächst die weitaus wichtigsten Bestimmungen bei Beobachtung magnetischer Kräfte, nämlich die des Moments eines Magnets und die der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus. Die genannten Grössen werden im allgemeinen gleichzeitig gemessen, indem man in einem Experiment ihr Verhältnis und in einem andern ihr Product bestimmt.

---

*) Wegen der Fälle, in denen eine solche Justirung nicht möglich ist, verweise ich auf die Abhandlung von W. Swan, *Imperfect Inversion* Trans. R. S. Edin. vol. XXI. (1855) p. 319.

Die Kraftwirkung eines Magnets hängt von der Art seiner Magnetisirung und von seiner äussern Configuration ab.

Ein sehr kleiner Magnet vom Moment M greift einen in positiver Richtung seiner Axe gelegenen und von seiner Mitte um r abstehenden Punkt nach Art. 383, 1b) mit der Kraft

a) $$R = 2\frac{M}{r^3}$$

an und wirkt auf ihn längs des Radiusvectors r.

Derselbe Ausdruck gilt auch für die Intensität der Kraft einer endlichen Kugel, wenn sie längs ihrer Axe und gleichmässig magnetisirt ist.

Hat der Magnet M die Form eines Stabes von der Länge $2L$ und ist er solenoidal magnetisirt, so wird

b) $$R = 2\frac{M}{r^3}\left(1 + 2\frac{L^2}{r^2} + 3\frac{L^4}{r^4} + \ldots\right).$$

Bei einem irgendwie beschaffenen Magnete kann man, wofern nur seine Dimensionen alle gegen die Entfernung r seiner Mitte von dem von ihm angegriffenen Pol klein sind,

c) $$R = 2\frac{M}{r^3}\left(1 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \ldots\right)$$

setzen. Die Coefficienten A_1, A_2, ... hängen dann von der Verteilung der Magnetisirung des Magnets ab.

Liegt an Stelle des Pols eine kleine Magnetnadel, die sich um ihren Mittelpunkt zu drehen vermag, so wird jeder ihrer Pole von einer solchen Kraft angegriffen, der eine wird aber angezogen, der andere abgestossen. Die Magnetnadel wird also durch ein Kräftepaar um ihre Mitte gedreht. Die nähern Entwickelungen findet der Leser in den Artt. 387 und 388.

Methode der Tangenten. Wir nehmen nun an, dass eine sehr kleine Magnetnadel sich in dem magnetischen Felde des Erdmagnetismus befindet und ausserdem von einer Kraft R in Richtung des magnetischen Westens angegriffen wird. Die Horizontalcomponente H des Erdmagnetismus wirkt nach dem magnetischen Norden, die Resultante von R und H wird also gegen den magnetischen Meridian um einen von Nord nach West gezählten Winkel ϑ geneigt sein, dessen Tangente aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{R}{H}$$

zu berechnen ist.

Daraus lässt sich unmittelbar das folgende Verfahren zur Bestimmung des Verhältnisses, in dem die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus zu dem magnetischen Moment eines Magnets steht, ableiten.

Man bestimmt zunächst nach der im vorigen Paragraphen angegebenen Methode die Richtung des magnetischen Meridians des Ortes und daraus die

der magnetischen Ost-Westlinie. Dann hängt man eine Magnetnadel oder einen nicht zu grossen Stabmagnet so auf, dass er die ihm unter dem Einfluss der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus zukommende Lage frei annehmen kann, und notirt seine Gleichgewichtslage. Nunmehr legt man den Magnet, dessen Moment M eruirt werden soll, magnetisch östlich von ihm in derselben Horizontalebene hin und lässt seinen Mittelpunkt von dem des aufgehängten Magnets um r abstehen. Der aufgehängte Magnet wird dann aus seiner Gleichgewichtslage durch Drehung um den verticalen Aufhängungsfaden um einen beobachtbaren Winkel ϑ abgelenkt, und es ist nach Art. 388

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2} \operatorname{tg} \vartheta,$$

oder, wenn man die strengere Formel c) anwendet,

$$\frac{1}{2} \frac{H}{M} r^3 \operatorname{tg} \vartheta = 1 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \dots$$

Nun lässt sich zwar die Ablenkung ϑ mit grosser Genauigkeit eruiren, die Entfernung r der Mittelpunkte der beiden Magnete ist aber nur dann sicher zu bestimmen, wenn beide Magnete festgelegt werden und zudem diese magnetischen Mitten auch durch Marken gehörig gekennzeichnet sind.

Nach Gauss ist man dieser Schwierigkeit in folgender Weise Herr geworden.

Man legt den Magnet M auf eine geteilte Scale, die sich unterhalb der Mitte des aufgehängten Magnets zu beiden Seiten desselben nach dem magnetischen Osten und Westen erstreckt. Als Mitte von M sieht man den Mittelpunkt der seine beiden Enden verbindenden Linie an. Sie ist also dadurch zu fixiren, dass man sie gemäss dieser Definition auf dem Magnete markirt und die ihr entsprechende Scalenablesung notirt, oder dadurch, dass man das Mittel der den beiden Enden des Magnets zugehörigen Scalenablesungen nimmt. Ich nenne die so bestimmte für die Mitte des Magnets M geltende Scalenablesung s_1, denke mir dann den Aufhängungsfaden des aufgehängten Magnets bis zur Scale verlängert und bezeichne die Ablesung der Scale da, wo diese Verlängerung sie trifft, mit s_0. Die Grösse $r_1 = s_1 - s_0$ giebt dann den Abstand der Mitten der beiden Magnete, und darin ist s_1 sicher, s_0 aber nur approximativ bestimmbar. Bezeichnet ϑ_1 die Ablenkung, die der aufgehängte Magnet unter dem Einfluss des östlich von ihm befindlichen Magnets M erfährt, so ist

$$\alpha_1) \qquad \frac{1}{2} \frac{H}{M} r_1^3 \operatorname{tg} \vartheta_1 = 1 + \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_1^2} + \dots$$

Jetzt drehe ich den Magnet M um seine Mitte herum, seine beiden Enden vertauschen dann ihre Plätze, r_1 ändert sich dadurch nicht, aber

M, A_1, A_3, ... wechseln ihr Zeichen, und wenn ϑ_2 die beobachtete Ablenkung des aufgehängten Magnets angiebt, so hat man

$$\alpha_2) \qquad -\frac{1}{2}\frac{H}{M}r_1^3 \operatorname{tg}\vartheta_2 = 1 - \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_1^2} - \ldots$$

Das arithmetische Mittel aus α_1) und α_2) ergiebt

$$\beta_1) \qquad \frac{1}{4}\frac{H}{M}r_1^3(\operatorname{tg}\vartheta_1 - \operatorname{tg}\vartheta_2) = 1 + \frac{A_2}{r_1^2} + \frac{A_4}{r_1^4} + \ldots$$

Ich nehme den Magnet M von der östlichen Seite der Scale fort und lege ihn auf die westliche so hin, dass seine markirte Mitte auf den Strich $r_2 = 2s_0 - s_1$ der Scale zu liegen kommt. Bezeichnet dann ϑ_3 die Ablenkung des aufgehängten Magnets, wenn die Axe von M nach derselben Richtung wie in der zweiten und ϑ_4 die, wenn diese Axe wie in der ersten östlichen Lage des Magnets verläuft, so ist

$$\alpha_3) \qquad \frac{1}{2}\frac{H}{M}r_2^3 \operatorname{tg}\vartheta_3 = 1 + \frac{A_1}{r_2} + \frac{A_2}{r_2^2} + \ldots,$$

$$\alpha_4) \qquad -\frac{1}{2}\frac{H}{M}r_2^3 \operatorname{tg}\vartheta_4 = 1 - \frac{A_1}{r_2} + \frac{A}{r_2^2} - \ldots,$$

mithin

$$\beta_2) \qquad \frac{1}{4}\frac{H}{M}r_2^3(\operatorname{tg}\vartheta_3 - \operatorname{tg}\vartheta_4) = 1 + \frac{A_2}{r_2^2} + \frac{A_4}{r_2^4} + \ldots$$

Das arithmetische Mittel der beiden Gleichungen β_1) und β_2) wird also

$$1) \quad \frac{1}{8}\frac{H}{M}\left\{r_1^3(\operatorname{tg}\vartheta_1 - \operatorname{tg}\vartheta_2) + r_2^3(\operatorname{tg}\vartheta_3 - \operatorname{tg}\vartheta_4)\right\} = 1 + \frac{1}{2}A_2\left(r_1^{-2} + r_2^{-2}\right) + \ldots$$

Hierin ist $r_1 = s_1 - s_0$, $r_2 = 2s_0 - s_1$ zu setzen. s_0 ist nur approximativ bekannt. Ich nehme an, dass der wahren Lage des Mittelpunkts des aufgehängten Magnets nicht die Ablesung s_0, sondern die $s_0 + \sigma$ entspricht, ist dann r der wahre Abstand zwischen den Mitten der beiden Magnete, so hat man

$$r_1 = r - \sigma, \quad r_2 = r + \sigma$$

und

$$\frac{1}{2}\left(r_1^n + r_2^n\right) = r^n\left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\sigma^2}{r^2} + \ldots\right).$$

σ ist aber im allgemeinen verhältnismässig klein, demnach darf man statt r^n das arithmetische Mittel aus r_1^n und r_2^n nehmen. Versteht man also unter r^n dieses arithmetische Mittel, setzt also

$$a) \qquad r^n = \frac{r_1^n + r_2^n}{2},$$

so wird

$$\text{1a)}\qquad \frac{1}{8}\frac{H}{M}r^3(\operatorname{tg}\vartheta_1-\operatorname{tg}\vartheta_2+\operatorname{tg}\vartheta_3-\operatorname{tg}\vartheta_4)=1+\frac{A_2}{r^2}+\frac{A_4}{r^4}+\cdots$$

oder, indem man die durch die Beobachtung gegebene Grösse

$$\text{b)}\qquad \operatorname{tg}\vartheta_1-\operatorname{tg}\vartheta_2+\operatorname{tg}\vartheta_3-\operatorname{tg}\vartheta_4=4D$$

setzt.

$$\text{1b)}\qquad \frac{1}{2}\frac{H}{M}Dr^3=1+\frac{A_2}{r^2}+\frac{A_4}{r^4}+\cdots$$

454. In den Gleichungen des vorigen Artikels sind D und r als exact bestimmbare Grössen anzusehen. Es bleiben also noch die Coefficienten A_2, A_4 ... zu eruiren. Man darf aber unbeanstandet in der Praxis die Terme A_4/r^4 ... ganz fortlassen und bei dem Gliede A_2/r^2 stehen bleiben.

A_2 kann in keinem Falle grösser werden als $2L^2$, wenn L die halbe Länge des Magnets M angiebt, das Glied A_2/r^2, wird also, wenn man r gross genug gegen L wählt, einen nur unbedeutenden Wert besitzen. Wo aber dennoch eine genaue Bestimmung dieses Gliedes erforderlich ist, da wiederholt man die im vorigen Artikel angegebene Beobachtungsreihe für verschiedene Distanzen r_1, r_2, r_3 der Mittelpunkte der beiden Magnete. Hat D die bezüglichen Werte D_1, D_2, D_3, so finden sich die Gleichungen

$$D_1=\frac{2M}{H}\left(\frac{1}{r_1^3}+\frac{A_2}{r_1^5}\right),$$

$$D_2=\frac{2M}{H}\left(\frac{1}{r_2^3}+\frac{A_2}{r_2^5}\right),$$

u. s. f.

Geben die Beobachtungen selbst Anhaltepunkte für die Grösse der wahrscheinlichen Fehler, die man bei der Bestimmung der D und der r begangen hat, so kann man nach den bekannten Regeln der Theorie der kleinsten Quadrate die relativen Gewichte der einzelnen Gleichungen berechnen. Wo das aber nicht der Fall ist, darf man annehmen, dass die Bestimmung der Grösse D in allen Beobachtungsreihen mit gleich grossen wahrscheinlichen Fehlern behaftet ist, und dass ferner hinsichtlich der Grössen r überhaupt keine Unsicherheit herrscht. Aus jenem Satz von Gleichungen ergeben sich dann die Normalgleichungen

$$[Dr^{-3}]=\frac{2M}{H}\left([r^{-6}]+A_2[r^{-8}]\right),$$

$$[Dr^{-5}]=\frac{2M}{H}\left([r^{-8}]+A_2[r^{-10}]\right).$$

Darin ist zu setzen

$$
\begin{aligned}
[Dr^{-3}] &= D_1 r_1^{-3} + D_2 r_2^{-3} + D_3 r_3^{-3} + \ldots, \\
[Dr^{-5}] &= D_1 r_1^{-5} + D_2 r_2^{-5} + D_3 r_3^{-5} + \ldots, \\
[r^{-6}] &= r_1^{-6} + r_2^{-6} + r_3^{-6} + \ldots, \\
[r^{-8}] &= r_1^{-8} + r_2^{-8} + r_3^{-8} + \ldots, \\
[r^{-10}] &= r_1^{-10} + r_2^{-10} + r_3^{-10} + \ldots
\end{aligned}
$$

Die Auflösung der beiden Normalgleichungen ergiebt für die beiden Unbekannten $2M/H$ und A_2

$$\frac{2M}{H}\left\{[r^{-6}][r^{-10}] - [r^{-8}]^2\right\} = [Dr^{-3}][r^{-10}] - [Dr^{-5}][r^{-8}],$$

$$A_2\left\{[Dr^{-3}][r^{-10}] - [Dr^{-5}][r^{-8}]\right\} = [Dr^{-5}][r^{-6}] - [Dr^{-3}][r^{-8}].$$

Der aus der letzten Gleichung für A_2 resultirende Wert darf nicht grösser als das halbe Quadrat der Länge des Magnets M sein, Beobachtungen, die ihm einen grössern Wert verleihen, müssen fehlerhaft durchgeführt worden sein.

Vermag der Beobachter nur zwei Beobachtungsreihen anzustellen, die für D bei den Distanzen r_1, r_2 die bezüglichen Werte D_1, D_2 ergeben, so findet er

$$Q = \frac{2M}{H} = \frac{D_1 r_1^5 - D_2 r_2^5}{r_1^2 - r_2^2}, \quad A_2 = \frac{D_2 r_2^3 - D_1 r_1^3}{r_1^2 - r_2^2} r_1^2 r_2^2.$$

Der Fehler, mit dem seine Bestimmung von Q dann behaftet ist, hat die Grösse

$$dQ = \frac{r_1^5 dD_1 - r_2^5 dD_2}{r_1^2 - r_2^2},$$

wenn dD_1 und dD_2 die bei der Beobachtung von D_1, D_2 wirklich begangenen Fehler angeben.

Sind die Fehler dD_1 und dD_2 von einander unabhängig, und sind die Versuche so angestellt, dass sie beide denselben wahrscheinlichen Wert δD besitzen, so hat man für den wahrscheinlichen Fehler δQ der Bestimmung von Q

$$\delta Q = \delta D \sqrt{\frac{r_1^{10} + r_2^{10}}{(r_1^2 - r_2^2)^2}}.$$

Man kann diese Gleichung dazu benutzen, um den einzelnen Grössen solche Werte zu geben, dass der zu erwartende wahrscheinliche Fehler von Q auf einen unter den gegebenen Verhältnissen minimalen Wert reducirt wird. Ueber δD vermag man nicht zu verfügen, man wird aber eines der r, etwa r_1, so wählen können, dass $\partial(\delta Q)/\partial r_1$ verschwindet. Unter Annahme, dass r_2, der kleinere Mittelpunktsabstand, gegeben ist, erhält man

$$3r_1^{10} - 5r_1^8 r_2^2 - 2r_2^{10} = 0.$$

Die Gleichung ist nach r_1^2 vom 5ten Grade, und ihre einzige reelle r_2^2 übersteigende Wurzel ist $r_1^2 = (1{,}3189 r_2)^2$. Stellt man also zwei Beobachtungsreihen an, so wählt man die bezüglichen Distanzen r_1, r_2 der Mittelpunkte der beiden Magnete am besten so, dass

$$r_1 = 1{,}3189\, r_2$$

wird.

Kann man nur eine Beobachtungsreihe ausführen, so muss man sich mit der Näherungsformel

$$Q = \frac{2M}{H} = Dr^3$$

begnügen, und wählt r am zweckmässigsten, wenn

$$\frac{\delta D}{D} = \sqrt{3}\,\frac{\delta r}{r}$$

wird.

Die eben auseinandergesetzte Methode kann passend als die der *Tangenten* bezeichnet werden, weil ihre Durchführung neben der Ausmessung von Längen namentlich die Bestimmung von Tangenten der Ablenkungswinkel des Magnets erfordert.

455. Methode der Sinusse. Nach einer anderen Methode, der *Sinusmethode*, legt man den Magnet nicht wie in der erstern magnetisch östlich und westlich vom aufgehängten Magnete, sondern man richtet ihn in jedem Falle so, dass der aufgehängte Magnet, wenn er unter seinem und des Erdmagnetismus Einflusse zur Ruhe kommt, die Richtung seiner Axe senkrecht schneidet. Die vom Magnet M ausgeübte Kraft ist dann $R = H \sin \vartheta$, wo ϑ wie bisher die Ablenkung des aufgehängten Magnets aus der durch die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus ihm erteilten Lage bezeichnet.

Natürlich führt diese Sinusmethode nur dann zu einem reellen Resultat, wenn die zu messende magnetische Kraft R kleiner als die horizontal wirkende Kraft des Erdmagnetismus ist.

Ihre Anwendung hat sie in dem transportabeln Apparat des Observatoriums zu Kew gefunden. Der aufgehängte Magnet ist an einer Stelle des Apparates befestigt, die sich zugleich mit dem Fernrohr und dem Arm, der den ablenkenden Magnet enthält, um Winkel drehen lässt, deren Grössen auf einem Azimutalkreis abgelesen werden.

Man justirt den Apparat zunächst so, dass die optische Axe des Fernrohrs in die mittlere Richtung der Collimationslinie des aufgehängten Magnets, wenn letzterer nur unter dem Einfluss des Erdmagnetismus steht, fällt. Befindet sich der Magnet in schwingender Bewegung, so beobachtet man zu dem Behufe auf der transparenten Scale die Endpunkte der Schwingungen, berechnet daraus in später auseinanderzusetzender Weise das wahre Azimut des magnetischen Nordpunktes und corrigirt darnach das Azimut der optischen Axe des Fernrohrs.

Dann legt man den ablenkenden Magnet auf einen geraden Stab, der durch die Axe des drehbaren Apparates geht und die optische Axe des Fernrohrs senkrecht schneidet, und orientirt die magnetische Axe des ablenkenden Magnets derartig, dass sie in ihrer Verlängerung die Mitte des aufgehängten Magnets trifft.

Der Magnet lenkt den aufgehängten Magnet aus seiner frühern Lage ab, man bewegt nun die drehbare Vorrichtung so lange, bis die Collimationslinie des aufgehängten Magnets wieder in die optische Axe des Fernrohrs fällt, wozu, wenn der Magnet schwingt, eventuell die Bestimmung seiner Ausschlagsweite auf der durchsichtigen Scale nötig sein wird.

Die Differenz der corrigirten Azimute giebt die Ablenkung, die der aufgehängte Magnet durch den Magnet M erfahren hat. Die weitere Beobachtung und Rechnung wird genau so geführt wie in der im vorigen Artikel auseinandergesetzten Methode, nur sind hier in dem Ausdrucke von D an Stelle der Tangenten die Sinusse der Ablenkungswinkel zu setzen.

Eine Correction für die Torsion des Aufhängungsfadens ist hier nicht nötig, weil die relative Lage des Aufhängungsfadens, des Fernrohrs und des Magnets sich während einer Beobachtung nicht ändert.

Ferner bleiben die Axen der beiden Magnete stets rechtwinklig zu einander geneigt, und das sichert die Bestimmung der Correction für ihre Länge ganz beträchtlich.

Bestimmung des Products aus der erdmagnetischen Horizontalintensität und dem Moment eines Magnets.

456. Zwei Beobachtungsmethoden. Nachdem man nach einer der beiden auseinandergesetzten Methoden das Verhältnis, in dem das Moment eines Magnets zu der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus steht, bestimmt hat, bleibt noch das Product der beiden genannten Grössen zu finden. Zu dem Behufe misst man das Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus auf denselben Magnet M, wenn seine Axe aus dem magnetischen Meridian herausgetreten ist, ausübt.

Auch diese Beobachtung lässt sich nach zwei Methoden ausführen. Die eine ist dynamischer, die andere statischer Natur. Nach jener wird die Zeit, innerhalb deren der Magnet unter dem Einfluss des Erdmagnetismus eine Schwingung vollführt, gemessen, nach dieser bestimmt man die Stärke eines messbaren Kräftepaares, welches dem Drehungsmoment des Erdmagnetismus in einer vorgeschriebenen Lage des Magnets das Gleichgewicht hält. Die dynamische Methode lässt sich mit einfachern Mitteln durchführen und giebt bei absoluten Messungen exactere Resultate, sie nimmt aber den Beobachter eine beträchtliche Zeit hindurch in Anspruch; die statische gestattet fast momentane Messungen, sie verlangt aber delicate Apparate und ihre Resultate sind, wo es sich um absolute Bestimmungen handelt, nicht so sicher wie bei der dynamischen.

Demgemäss wird man die dynamische Methode bei absoluten, die statische bei relativen, zur Constatirung von etwaigen Veränderungen schnell auszuführenden, Messungen anzuwenden haben.

Dynamische Methode der Schwingungsbeobachtungen. Man hängt den Magnet so auf, dass seine Axe horizontal zu liegen kommt, und setzt ihn in Schwingungen, die nur kleine Bögen umfassen. Die Beobachtung der Schwingungen geschieht nach einer der schon auseinandergesetzten optischen Methoden.

Man wählt einen Punkt auf der Scale, der der Mitte des Schwingungsbogens entspricht, und notirt den Zeitmoment, in dem die Collimationslinie des Magnets durch diesen Punkt hindurchgeht. Schwingt der Magnet rasch, so beobachtet man nur die Durchgänge, die den Magnet nach der positiven Richtung hinführen, verfliesst aber eine genügende Zeit, bis der Magnet zurückkehrt, so notirt man auch die Zeitmomente, wenn die Collimationslinie sich von der positiven zur negativen Seite durch den markirten Punkt bewegt. Dreht sich der Magnet so rasch, dass man nicht einmal zwei aufeinander folgende positive Durchgänge zu beobachten vermag, so notirt man die Durchgänge nach längern Intervallen, etwa vom fünften zum fünften Durchgang, nimmt aber abwechselnd einen positiven und einen negativen Durchgang. In allen Fällen setzt man die Durchgangsbeobachtungen, um das Resultat von den nicht zu vermeidenden Beobachtungsfehlern möglichst frei zu machen, längere Zeit fort. Es seien $n+1$ positive und n negative durch dieselben Intervalle getrennte Durchgänge zu den Zeiten $T_1, T_2, \ldots T_{2n+1}$ beobachtet worden. Das Mittel

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}T_1 + T_3 + T_5 + \cdots T_{2n-1} + \frac{1}{2}T_{2n+1}\right) = \overline{T}_{n+1}$$

ist dann ebenso wie das Mittel

$$\frac{1}{n}\left(T_2 + T_4 + T_6 + \cdots + T_{2n-2} + T_{2n}\right) = \overline{T'}_{n+1}$$

die mittlere Zeit des mittlern positiven oder negativen Durchganges. Beide Mittel müssen, wenn der Punkt auf der Scale sich nicht zu weit von der Mitte des Schwingungsbogens entfernt, bei fehlerfreier Beobachtung mit einander übereinstimmen. Das Mittel

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\left(\overline{T}_{n+1} + \overline{T'}_{n+1}\right)$$

giebt dann die mittlere Zeit des mittlern Durchganges der Collimationslinie durch den markirten Punkt für das gesammte Zeitintervall.

Der Beobachter überlässt dann den Apparat sich selbst und beginnt, nachdem der Magnet eine gehörige Anzahl von Schwingungen vollführt hat, aber bevor die Schwingungen noch etwas an ihrer Regelmässigkeit verloren haben, einen neuen Satz von Durchgangsregistrirungen, aus dem er in der

oben angegebenen Weise wieder die mittlere Zeit θ_2 des mittlern Durchganges berechnet.

Hat der Magnet zwischen diesen beiden mittlern Zeiten m Schwingungen vollführt, so giebt die Grösse

$$1) \qquad T = \frac{\theta_2 - \theta_1}{m}$$

die Dauer einer Schwingung.

Zur Bestimmung der Zahl m genügt eine aus der ersten oder zweiten Reihe von Beobachtungen ableitbare approximative Kenntnis der Schwingungsdauer.

Die so berechnete Schwingungsdauer ist dann noch nach derselben Formel wie die Schwingungsdauer eines Pendels auf unendlich kleine Bogen zu reduciren. Nehmen die Amplituden der Schwingung schnell ab, so hat man auch noch eine in Art. 740 näher zu specificirende Correction für den Widerstand, den der Magnet bei seiner Bewegung zu überwinden hat, an die Schwingungsdauer anzubringen. Hängt der Magnet an einem Seidenfaden und schwingt er nur innerhalb weniger Grade, so steigen beide angeführten Correctionen zu nur geringen Beträgen an.

Ich bezeichne mit ϑ den Winkel, den die magnetische Axe des Magnets mit der Wirkungsrichtung der Horizontalcomponente H der erdmagnetischen Intensität zur Zeit t einschliesst, mit A das Trägheitsmoment des Magnets und aller andern an dem Aufhängungsfaden befestigten Teile, mit M das Moment des Magnets und mit $MH\tau'$, wo τ' wie in Art. 452, 6) durch die Gleichung

$$a) \qquad \tau' = \frac{\tau}{MH \sin m} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2 - \beta_1 + \beta_2}$$

bestimmt ist und wie $\cos m$ eine kleine Grösse darstellt, den Torsionscoefficienten des Fadens und nenne endlich γ die Ablesung des Torsionskreises, wenn der Faden torsionsfrei ist. Die Bewegung des Magnets, wenn er, ohne Widerstand überwinden zu müssen, um seine Ruhelage schwingt, folgt dann dem Gesetze

$$2) \qquad A\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + MH \sin\vartheta + MH\tau'(\vartheta - \gamma) = 0,$$

wofür man, da die Ausschläge des Magnets klein sein sollten, auch

$$1_1) \qquad A\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + MH(1 + \tau')\vartheta - MH\tau'\gamma = 0$$

schreiben kann.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ergiebt

$$3') \qquad \vartheta = C\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \alpha\right) + \vartheta_0.$$

C ist die Amplitude der Schwingung, ϑ_0 bezeichnet die sehr geringfügige Ablenkung des Magnets aus dem magnetischen Meridian, wenn er sich unter dem Einfluss der Horizontalintensität H des Erdmagnetismus in Ruhe befindet, und folgt aus der Gleichung

$$\text{b)} \qquad \vartheta_0 = \frac{\tau'\gamma}{1+\tau'}.$$

T bezeichnet die nach der angegebenen Methode durch die Gleichung 1) bestimmbare Dauer einer Schwingung, d. h. eines vollständigen Hin- und Herganges, und genügt der Beziehung

$$\text{c)} \qquad T^2 = \frac{4\pi^2 A}{MH(1+\tau')}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt sofort der Wert für die zu bestimmende Grösse MH, nämlich

$$\text{4)} \qquad MH = \frac{4\pi^2}{T^2}\,\frac{A}{1+\tau'}.$$

Die Schwingungsdauer T wird, wie bemerkt, in der oben angegebenen Weise beobachtet, das Trägheitsmoment A lässt sich, wenn der schwingende Apparat regelmässig gestaltet ist, ein für alle Mal durch Rechnung finden, oder nach der Gaussischen Methode*) durch Vergleichung mit einem andern bekannten Trägheitsmoment eruiren.

Im vorigen Artikel habe ich schon den Wert für die Grösse M/H abgeleitet und gefunden

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} D r^3,$$

wo D eventuell noch mit $(1 + A_2/r^2)^{-1}$ zu multipliciren sein würde, wenn A_2 einen nicht zu vernachlässigenden Wert besitzen sollte.

Wir haben somit

$$\text{5)} \qquad M^2 = (MH)\left(\frac{M}{H}\right) = \frac{2\pi^2 A}{T^2(1+\tau')} D r^3,$$

$$\text{6)} \qquad H^2 = (MH)\left(\frac{H}{M}\right) = \frac{8\pi^2 A}{T^2(1+\tau') D r^3}.$$

457. Berücksichtigung der Veränderung des Moments. Die Berechnungen beruhen auf der Voraussetzung, dass während der Beobachtungsreihen für M/H und MH weder M noch H sich ändert. Da das im allgemeinen nicht zutrifft, so muss man während der Beobachtungen auch noch die Veränderungen, denen H und M unterworfen sind, verfolgen. Die Beobachtungen der Veränderungen der Grösse H werden

*) *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata.* Göttingen 1833, oder Pogg. Ann. Bd. 28.

an dem bald zu beschreibenden Bifilar-Magnetometer angestellt. Was ferner das magnetische Moment anbetrifft, so wird es auch beim härtesten Stahl aus zwei Teilen, dem permanenten und dem inducirten, bestehen. Der erstere darf, wenn die Temperatur des Beobachtungsraumes constant bleibt und der Magnet keinen Erschütterungen unterworfen ist, als unveränderlich angesehen werden. Der zweite aber hängt ausser von etwa vorhandenen fremden magnetischen Kräften von der Horizontalintensität des Erdmagnetismus ab.

Bei der Bestimmung von M/H liegt der Magnet M in der magnetischen Ost-Westlinie, hier wirkt also H quer gegen den Magnet und vermag M weder zu vergrössern noch zu verkleinern.

Bei der Bestimmung von MH aber erstreckt sich der Magnet von Norden nach Süden und der Erdmagnetismus inducirt in ihn ein magnetisches Moment von der Grösse $\varkappa H$. Der Coefficient $\varkappa$ müsste eigentlich für den betreffenden Magnet speciell berechnet werden. Man kann aber die Experimente in zwei Weisen so arrangiren, dass der Magnet, sei es dass er einen andern Magnet ablenkt, sei es dass er selbst schwingt, sich stets in denselben Bedingungen befindet. Bei der ersten Methode sucht man den Magnet im ersten Experiment, das also zur Bestimmung von M/H dient, in die Verhältnisse zu bringen, in denen er sich im zweiten befindet. Man legt den Magnet bei der Bestimmung von M/H nicht wie früher in die magnetische Ost-Westrichtung, sondern in die Süd-Nordrichtung und so, dass die Verbindungslinie r, die von seinem Mittelpunkt zu dem des aufgehängten Magnets führt, mit der Ebene des Meridians einen Winkel vom Bogenwert

$$\varphi = \arccos \sqrt{\frac{1}{3}}$$

einschliesst. Der Magnet wirkt dann auf den aufgehängten Magnet senkrecht gegen seine eigne Axe und greift ihn mit einer Kraft von der Intensität

$$R = \sqrt{2}\,\frac{M}{r^3}$$

an. M bezeichnet dabei das Moment, welches der ablenkende Magnet besitzt, wenn er nach Norden weist, hat also denselben Wert wie das in der Grösse MH vertretene M. Bei dem angegebenen Arrangement würde also keine Correction für die Induction des Erdmagnetismus während des zweiten Experiments hinzuzufügen sein.

Die Genauigkeit, mit der dieser Erfolg erzielt wird, hängt von der Genauigkeit, die der Experimentator bei dem Richten des ablenkenden Magnets in die angegebene Lage erreicht, ab. Geringe Verschiebungen des Magnets aus dieser Lage geben schon zu bedeutenden Fehlern Veranlassung, und da ferner die zur Verschärfung der Präcision der Resultate notwendige Umlegung des Magnets bei diesem Arrangement nicht ge-

stattet ist, so wird man von dieser schwer zu realisirenden Methode nur zur Bestimmung des inducirten Moments selbst Gebrauch machen können.

In der zweiten von J. P. Joule*) angegebenen Methode bringt man den Magnet im zweiten Experiment in die Verhältnisse, in denen er sich im ersten befindet.

Man stellt sich zu dem Magnete M noch einen zweiten Magnet her, dessen Moment sich von seinem möglichst wenig unterscheidet. Beim ersten Experiment verfährt man genau so wie früher, man kann aber auch, um die zu messende Ablenkung des aufgehängten Magnets zu vergrössern, beide Magnete zugleich von entgegengesetzten Seiten auf ihn einwirken lassen. Die inducirende Kraft des Erdmagnetismus wirkt hier quer gegen die Axen der Magnete und verändert ihr Moment nicht wesentlich. Nun hängen wir einen der beiden Magnete M auf und legen unter ihm und seiner Axe parallel den andern so hin, dass die Mitten beider Magnete sich vertical unter einander befinden. Der untere Magnet wirkt dann auf den obern im entgegengesetzten Sinne wie der Erdmagnetismus. Demgemäss gehen die Schwingungen des aufgehängten Magnets nicht mehr so rasch wie früher vor sich. Je mehr man den untern Magnet dem obern nähert, desto mehr nimmt die Schwingungsdauer zu und schliesslich erreicht man für den untern Magnet eine Lage, bei der das Gleichgewicht des obern Magnets aufhört stabil zu sein. Bei noch weiterer Annäherung schlägt der obere Magnet um und oscillirt in der entgegengesetzten Lage. Man kann also in der angegebenen Weise immer die Stellung eruiren, in der der untere Magnet die Wirkung des Erdmagnetismus auf den obern gänzlich neutralisirt. In dieser Stellung, wo beide Magnete einander parallel sind, ihre Axen gleich gerichtet und ihre Mitten senkrecht unter einander haben, verbindet man beide Magnete fest mit einander, so dass sie ein starres System bilden. Das zweite Experiment wird dann genau in der angegebenen Weise mit diesem System ausgeführt.

Der untere Magnet hebt die Wirkung des Erdmagnetismus auf den obern auf und der obere seinerseits neutralisirt, weil er mit dem untern das gleiche Moment besitzt, die Induction des Erdmagnetismus auf den untern.

Das Moment M eines der beiden Magnete bleibt demzufolge im zweiten Experiment genau von derselben Grösse wie im ersten.

458. Statische Methode. Die zweite, statische Methode erfordert die Beobachtung der Ablenkung, die der Magnet erfährt, wenn er unter dem Einfluss der Horizontalintensität des Erdmagnetismus und zugleich unter dem eines horizontal wirkenden statischen Kräftepaares steht.

Sei ϑ diese Ablenkung und gebe L das Moment des Kräftepaares, dann ist

$$MH \sin\vartheta = L.$$

*) *Proc. Phil. S., Manchester*, 1867, March 19.

Daraus lässt sich MH berechnen, wenn L als Function von ϑ bekannt ist.

Das Kräftepaar bringt man in zweierlei Weise hervor, indem man entweder die Torsionselasticität eines Drahtes oder das Gewicht eines in geeigneter Weise aufgehängten Apparates benutzt. Auf der Anwendung der Torsionselasticität beruht die Construction der magnetischen Torsionswage, auf der der Schwere die des Bifilarmagnetometers.

Torsionswage. Bei der Anwendung der Torsionswage befestigt man den Magnet an einen Draht, dessen oberes Ende in dem Mittelpunkte eines Torsionskreises eingezwängt ist. Der Draht kann oben um einen am Torsionskreise ablesbaren Winkel tordirt werden.

Bezeichnet α_0 die Ablesung des Torsionskreises, wenn der Magnet sich im magnetischen Meridian befindet, und α die, wenn er gegen denselben um den Winkel ϑ geneigt ist, so hat man

$$1)\qquad L = \tau(\alpha - \alpha_0 - \vartheta) = MH \sin\vartheta,$$

wo τ den Torsionscoefficienten des Drahtes fixirt.

Dem Moment L giebt man durch fortdauernde Torsion des Drahtes am besten eine solche Grösse, dass der Magnet sich fast senkrecht zum magnetischen Meridian stellt. ϑ wird dann von $\pi/2$ nur um eine kleine Grösse ϑ' verschieden sein, und es ist

$$1_1)\qquad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta', \quad \tau\left(\alpha - \alpha_0 - \frac{\pi}{2} + \vartheta'\right) = MH\left(1 - \frac{1}{2}\vartheta'^2\right).$$

Die Beobachtung von ϑ' liefert dann, wenn τ bekannt ist, den Wert von MH.

Will man die Grösse MH nicht absolut bestimmen, sondern nur die Veränderungen, die H eventuell erleidet, verfolgen, so braucht man weder M noch τ ihren Werten nach zu kennen.

Soll aber MH wirklich gemessen werden, so muss man den absoluten Wert von τ eruiren. Man befestigt zu dem Behufe an den Draht einen nichtmagnetischen Körper und versetzt diesen in Schwingungen um den Draht als Axe. Ist A das Trägheitsmoment dieses Körpers gegen die Axe des Drahtes und T die Zeit eines Hin- und Herganges, so hat man nach bekannten Regeln

$$2)\qquad \tau = \frac{4\pi^2 A}{T^2}.$$

Der Hauptvorwurf, der diese im Princip so einfache Methode trifft, rührt daher, dass die erste Ablesung α_0 des Torsionskreises (also die, wenn der Magnet sich im magnetischen Meridian befindet) sich während der Beobachtung verändert. Da nämlich der Magnet, wenn er aus dem magnetischen Meridian gedreht ist, fortwährend seine Ablenkung zu verringern strebt, so sucht er fortwährend den Draht zu tordiren, und daraus resultirt dann

eine allmälig zunehmende permanente Torsion des Drahtes. Man ist daher gezwungen, den Magnet in kurzen Zeitintervallen in den magnetischen Meridian zurückzuführen und zuzusehen, wie sich die Ablesung des Torsionskreises für diese Lage des Magnets verändert hat.

459. *Bifilarmagnetometer.* Bei der zweiten statischen Methode hängt man den Magnet an zwei Fäden auf und beobachtet gewisse Gleichgewichtslagen, die er unter dem Einflusse der Schwerkraft einerseits und der erdmagnetischen Horizontalintensität andererseits annimmt. Die bifilare Aufhängung ist zuerst von Gauss*) und Weber eingeführt worden, und da sie auch in vielen electrischen Instrumenten Anwendung findet, so werde ich sie eingehend zu behandeln haben.**) Die beistehende Figur 16 giebt

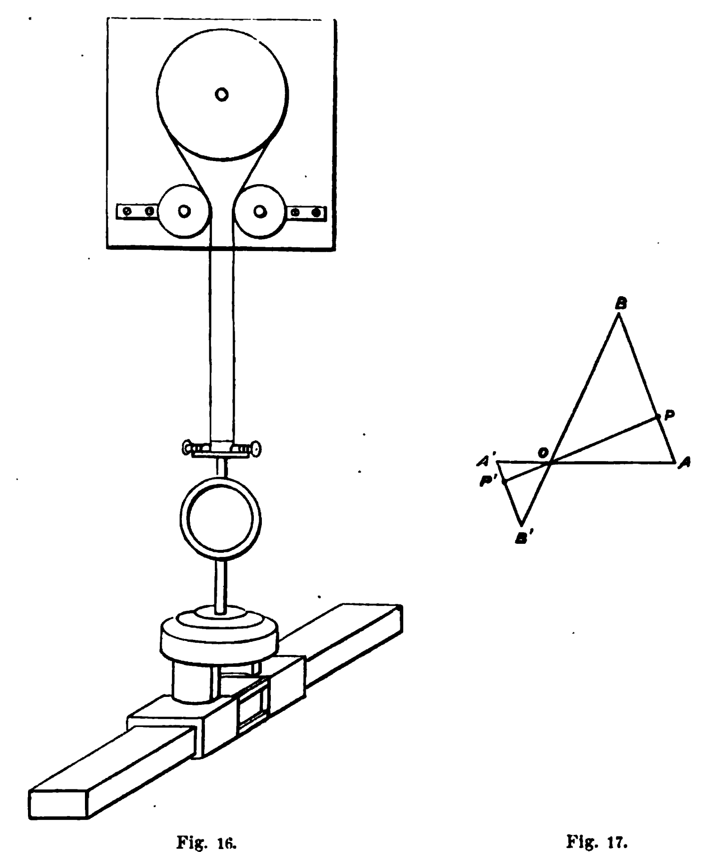


Fig. 16. Fig. 17.

*) *Resultate aus den Beob. des magnetischen Vereins* Bd. II.

**) Eine vollständige Theorie des Bifilarmagnetometers und seiner Anwendung zu absoluten Messungen findet der Leser in einer im 17. Bande p. 737ff. von Wiedemanns *Annalen* veröffentlichten Abhandlung. F. Kohlrausch: *Absolute Messungen mittelst bifilarer Aufhängung* u. s. f.

eine allgemeine Ansicht eines bifilar aufgehängten Magnets. die Figur 17 soll dem Leser das Verständnis der folgenden Auseinandersetzungen erleichtern. Sie stellt die Horizontalprojection der Aufhängungsdrähte, wenn der Magnet irgendwie horizontal gedreht ist, dar.

AB, $A'B'$ sind die Projectionen der beiden Drähte.

AA', BB' sind die Projectionen der Linien, welche die oberen bezüglich unteren Enden der Drähte miteinander verbinden.

POP' ist zu AB und $A'B'$ senkrecht und giebt die Entfernung der beiden Drähte von einander.

Ich setze h gleich dem senkrechten Abstande der beiden Linien AA' und BB' (in der Projection ist dieser Abstand natürlich gleich Null und verbirgt sich unter dem Punkt O), mache

$$AA' = a, \quad BB' = b$$

und bezeichne mit α das Azimut von a, mit β das von b.

Ferner nenne ich W, W' die Vertical-, Q, Q' die Horizontal-Componenten der Spannungen, welche die bezüglichen Drähte bei einer bestimmten Lage des Magnets erleiden.

Der Magnet wird in der angenommenen Lage von vier Kräften angegriffen: von seiner Schwere, von dem Erdmagnetismus, von der etwa vorhandenen Torsion der Drähte und endlich von den Spannungen der Drähte. Der Erdmagnetismus und die Torsion geben zur Entstehung von Kräftepaaren Veranlassung, demnach muss die Spannung der Drähte sich in eine Verticalkraft und ein Kräftepaar zerlegen lassen. Die Verticalkraft hält der Schwere des Magnets das Gleichgewicht und wirkt in einer Linie, die die Horizontalebene der Zeichnung 17 in dem Punkte O, wo die Verbindungsgraden AA', BB' der entsprechenden Enden der projicirten Drähte einander schneiden, senkrecht trifft. Demzufolge ist

$$\text{a)} \qquad \frac{AO}{OA'} = \frac{BO}{OB'} = \frac{W}{W'}.$$

Die horizontalen Componenten der bezüglichen Spannungen der Drähte sollten sich zu einem Kräftepaar zusammen setzen, sie sind also einander parallel und von derselben Grösse. Wir haben hiernach

$$\text{b)} \qquad Q = Q'.$$

Das Moment des von diesen beiden Componenten gebildeten Kräftepaares wird

$$\text{c')} \qquad L = Q \,.\, PP'.$$

Die Linie PP' berechnet sich aus der Aehnlichkeit der in der Fig. 17 bezeichneten Dreiecke. Man hat nämlich, weil $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB' = \alpha - \beta$ ist,

$$AB \,.\, OP = AO \,.\, BO \sin(\alpha - \beta),$$
$$A'B' \,.\, OP' = A'O \,.\, B'O \sin(\alpha - \beta),$$

also

$$PP' = \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{AO.BO}{AB} + \frac{A'O.B'O}{A'B'} \right\},$$

und es wird

$$L = Q \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{AO.BO}{AB} + \frac{A'O.B'O}{A'B'} \right\}.$$

Für die Grösse Q gelten die Gleichungen

$$Qh = W.AB, \; Qh = W'.A'B',$$

woraus

$$Qh\left(\frac{1}{W} + \frac{1}{W'}\right) = AB + A'B'$$

folgt. Man erhält also

$$c_1) \quad L = \frac{WW'}{h(W + W')}(AB + A'B') \sin(\alpha - \beta) \left\{ \frac{AO.BO}{AB} + \frac{A'O.B'O}{A'B'} \right\}$$

und da

$$\frac{AB + A'B'}{A'B'} = \frac{AA'}{A'O} = \frac{a}{A'O}, \quad \frac{AB + A'B'}{AB} = \frac{AA'}{AO} = \frac{a}{AO},$$

$$OB + B'O = b$$

ist, so wird auch

$$c_2) \quad L = Q.PP' = \frac{ab}{h} \frac{WW'}{W + W'} \sin(\alpha - \beta).$$

Bezeichnet noch m die Masse des an den beiden Drähten aufgehängten Apparates und g die Intensität der Schwerkraft, so hat man

$$W + W' = mg,$$

und wenn man noch

$$W - W' = nmg$$

setzt, nimmt der Ausdruck für das Moment des aus den Spannungen der Drähte resultirenden Kräftepaares die Form

$$c_3) \quad L = \frac{1 - n^2}{4} mg \frac{ab}{h} \sin(\alpha - \beta)$$

an.

L erreicht seinen grössten Betrag, wenn $n = 0$ ist. das heisst, wenn $W = W'$, also die Last des Apparates von beiden Drähten zu gleichen Teilen getragen wird.

Eine solche gleiche Verteilung der Last des Apparates auf beide Drähte lässt sich erreichen, wenn man die obern Enden der Drähte in der Weise, wie die Figur 16 andeutet, an einer drehbaren Rolle befestigt. Die Rolle wird so lange von selbst um ihre Axe rotiren, bis an keinem der Drähte ein Uebergewicht vorhanden ist.

Hat man die Längsspannung der Drähte so regulirt, dass $u = 0$ gesetzt werden darf, so ist das Drehungsmoment, welches die Horizontalspannungen der Drähte ausüben,

c) $$L = \frac{1}{4}\frac{ab}{h} mg \sin(\alpha - \beta).$$

Dieses Moment muss gleich der Summe der beiden Momente sein, welche einerseits von der Torsion der Drähte, andererseits von dem Erdmagnetismus hervorgerufen werden.

Das Drehungsmoment der Torsion der Drähte ist von der Form

$$\tau(\gamma - \beta),$$

wo τ die Summe der Torsionscoefficienten der Drähte bezeichnet.

Erhalten die Drähte ihre Torsion nur dadurch, dass der Magnet durch seine Richtkraft sie gegen einander verdreht, sind sie also im freien Zustande, oder, wenn statt des Magnets ein unmagnetischer Körper an ihnen hängt, torsionsfrei, so verschwindet das Torsionsmoment zugleich mit L. Es wird also $\gamma = \beta$, wenn α den Wert γ besitzt, demgemäss ist überhaupt $\gamma = \alpha$ zu setzen. Das Torsionsmoment ist also

d) $$\Theta = \tau(\alpha - \beta).$$

Bezeichnet ferner δ die magnetische Declination und ϑ das Azimut der magnetischen Axe des Magnets, so ist das Drehungsmoment, mit dem die erdmagnetische Horizontalintensität die Ablenkung des Magnets aus dem magnetischen Meridian zu verringern strebt*), gleich

e) $$D = MH \sin(\delta - \vartheta).$$

Da man nun, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu tun, annehmen darf, dass die Axe des Magnets sich der Verbindungslinie BB' der untern Enden der Drähte parallel stellt, so wird

$$\beta = \vartheta$$

zu setzen sein, und man erhält, wenn A noch das Trägheitsmoment des ganzen Apparates angiebt,

1a) $$A\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = MH\sin(\delta - \vartheta) + \frac{1}{4}\frac{ab}{h} mg \sin(\alpha - \vartheta) + \tau(\alpha - \vartheta).$$

oder, wie man auch schreiben kann,

1b) $$A\frac{d^2(\alpha - \vartheta)}{dt^2} = -MH\sin[\alpha - \vartheta + (\delta - \alpha)] - \frac{1}{4}\frac{ab}{h} mg \sin(\alpha - \vartheta) - \tau(\alpha - \vartheta).$$

*) Es ist angenommen, dass die Axe des Magnets völlig horizontal gerichtet ist, sonst muss die rechte Seite der Gleichung e) noch mit $\sin m$, wo m den Winkel zwischen dieser Axe und der zum Zenit gehenden Verticalen bezeichnet, multiplicirt werden. Anm. des Uebers.

Man wird den Magnet nur durch sehr kleine Schwingungsamplituden sich bewegen lassen, $\alpha - \vartheta$ bleibt dann nur klein, und man darf setzen

$$1_1)\quad A\frac{d^2(\alpha-\vartheta)}{dt^2} = -(\alpha-\vartheta)\left\{MH\cos(\delta-\alpha) + \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg + \tau\right\} - MH\sin(\delta-\alpha).$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist

$$2)\quad \alpha - \vartheta = C\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \lambda\right) - (\alpha - \vartheta_0),$$

wenn die Dauer T einer vollständigen Schwingung durch die Beziehung

$$3)\quad A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = MH\cos(\delta-\alpha) + \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg + \tau$$

und die Grösse $\alpha - \vartheta_0$ durch die Gleichung

$$4)\quad \alpha - \vartheta_0 = \frac{MH\sin(\delta-\alpha)}{MH\cos(\delta-\alpha) + \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg + \tau}$$

bestimmt wird.

C ist die Amplitude, λ die Phase der Schwingung. Beide Grössen werden durch die Anfangsbewegung des Magnets eruirt.

Aus der Gleichung 3) ist die gesuchte Grösse MH zu berechnen.

Wenn die Einrichtung des Apparates vollständig gegeben ist, so hängt die Bewegung des Magnets noch von der Grösse α, oder besser von der $\delta - \alpha$ ab, und in dieser Hinsicht haben wir drei Hauptlagen des Apparates zu unterscheiden.

1) *Beobachtung der Grösse MH.* Wenn erstens α nahezu gleich δ ist, so schwingt der Magnet um seine stabile Gleichgewichtslage ähnlich einem gewöhnlich aufgehängten Magnete, und seine Schwingungsperiode T_1 bestimmt sich aus der Gleichung

$$3_1)\quad A\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg + \tau + MH,$$

woraus die Grösse MH zu berechnen ist.

2) *Beobachtung der Aenderung der Declination.* Sei zweitens α nahezu gleich $\delta + \pi$. Der Magnet liegt dann so, dass sein Südpol nach dem magnetischen Norden pointirt, und seine Schwingungsdauer T_2 entspricht der Gleichung

$$3_2)\quad A\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg + \tau - MH.$$

Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck kann durch gehörige Abänderung der beiden Längen a und b auf jeden Wert gebracht werden, man kann ihn auch beliebig klein, T_2 also sehr gross machen, man darf

ihn aber nicht negativ werden lassen, weil der Magnet dann um eine labile Lage sich bewegt und somit in seine normale Lage umschlägt.

Da in diesem Falle in der Gleichgewichtslage des Magnets $\delta - \alpha$ sehr nahe gleich $-\pi$ ist, so wird $\sin(\delta - \alpha) = \alpha - \delta$ zu setzen sein, man erhält für die Gleichgewichtslage

$$5) \qquad \vartheta_o = \alpha - \frac{MH}{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg + \tau - MH}(\delta - \alpha).$$

Die Gleichung drückt das Gesetz aus, nach dem ϑ_o sich ändert, wenn δ, die Declination, während des Experiments variirt. Das negative Zeichen des zweiten, auf der rechten Seite stehenden Gliedes, lehrt, dass wenn die Richtung der erdmagnetischen Kraft sich nach der einen Seite dreht, der Magnet sich nach der andern Seite bewegt. Da die Grösse

$$\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg + \tau - MH$$

durch gehörige Wahl von a und b beliebig klein gemacht werden kann, so vermag man die Aufhängungsfäden immer in solcher Entfernung von einander zu bringen, dass ganz geringen Aenderungen der Declination bedeutende Aenderungen in der Ruhelage des Magnets entsprechen.

Die zweite Lage ist also ganz besonders zur Verfolgung etwaiger Declinationsänderungen geeignet.

3) *Beobachtung der Aenderung der Horizontalintensität.* Die dritte Lage erreicht man, wenn man den obern Teil der Aufhängungsvorrichtung so lange dreht, bis die Axe des Magnets nahezu senkrecht zum magnetischen Meridian steht. Setzt man

$$\vartheta - \delta = \frac{\pi}{2} + \vartheta', \quad \alpha - \vartheta = \beta - \vartheta',$$

so erhält die Bewegungsgleichung des Magnets die Form

$$1c) \qquad A\frac{d^2\vartheta'}{dt^2} = -MH\cos\vartheta' + \frac{1}{4}\frac{ab}{h}m\sin(\beta - \vartheta') + \tau(\beta - \vartheta').$$

In der Gleichgewichtslage ist ϑ' sehr klein, demnach

$$-MH = \left(\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\cos\beta + \tau\right)\vartheta' - \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin\beta - \tau\beta.$$

Setzt man

$$6) \qquad -MH_0 + \frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin\beta + \beta\tau = 0,$$

wo H_0 den Wert, den H annehmen muss, angiebt, falls der Magnet in der

Gleichgewichtslage genau senkrecht zum magnetischen Meridian stehen soll, so hat man

$$H = H_0\left(1 - \frac{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\cos\beta + \tau}{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin\beta + \beta\tau}\vartheta'\right) \tag{7}$$

und

$$\vartheta' = \frac{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin\beta + \beta\tau}{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\cos\beta + \tau}\,\frac{H_0 - H}{H_0}. \tag{8}$$

Soll der Magnet in der angegebenen Lage sich in stabilem Gleichgewicht befinden, so muss der Nenner

$$\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\cos\beta + \tau$$

einen positiven Wert haben, man darf ihn aber beliebig klein machen, und je mehr man ihn durch geeignete Wahl von a und b der Null nahe bringt, desto empfindlicher ist der Magnet für geringe Aenderungen der erdmagnetischen Horizontalintensität.

Wie die zweite Hauptlage für die Verfolgung etwaiger Aenderungen in der Richtung, so ist die dritte ganz besonders zur Messung der Aenderungen in der Intensität der erdmagnetischen Horizontalkraft geeignet.

Im übrigen unterscheidet sich die Beobachtungsmethode am Bifilarmagnetometer so gut wie gar nicht von der am Unifilarmagnetometer. Der Apparat nimmt von selbst je nach der Kraft, von der er angegriffen wird, eine bestimmte Gleichgewichtslage an. Er ist also namentlich zu automatischen Registrirungen der Variation der einzelnen magnetischen Grössen geeignet. Man befestigt an den Magnet einen Spiegel und lässt diesen einen Lichtfleck auf einen mit photographischem Papier beklebten um eine Horizontalaxe rotirenden Cylinder reflectiren. Der Lichtfleck lässt auf dem Cylinder eine Curve entstehen, aus der man unter zu Grundelegung einer beliebigen Scale für die Messung der einzelnen Grössen die Variationen derselben ablesen kann.

460. In Observatorien, die für fortlaufende directe Beobachtungen oder automatische Registrirungen des Ganges der magnetischen Declination und Intensität eingerichtet sind, lässt sich die Axenrichtung und das Moment eines Magnets ebenso wie die absolute Declination und Intensität des Erdmagnetismus mit grosser Genauigkeit ermitteln.

Zwar zeigt das Declinometer im allgemeinen nicht den wahren Wert der Declination an. Ist aber seine Ablesung δ', so ist die wirkliche Declination $\delta = \delta' + \delta_0$, und hier bezeichnet δ_0 eine für das betreffende In-

strument in seiner betreffenden Montirung ein für alle Mal zu bestimmende Constante.

Ist ferner die Ablesung des Bifilarmagnetometers für die Horizontalintensität gleich H', so ist der wahre Wert dieser Grösse $H = CH'$, und hier ist wiederum C eine ein für alle Mal eventuell durch ein gewöhnliches Magnetometer zu bestimmende Grösse.

Sind die genannten Constanten δ_0 und C einmal eruirt, so vermag der Beobachter jederzeit durch einfache Ablesung der betreffenden Instrumente oder der auf photographischem Wege gezeichneten registrirenden Curven die wahren Werte der Declination und Intensität des Erdmagnetismus anzugeben.

Die zur Bestimmung der Constanten δ_0 und C in der früher vorgeschriebenen Weise vorzunehmenden absoluten Messungen für Delination und Intensität müssen in einiger Entfernung von dem Declinometer und Bifilarmagnetometer ausgeführt werden, weil sonst die einzelnen Magnete einander stören würden. Es ist auch geboten, solche Messungen von Zeit zu Zeit zu wiederholen, da sowohl die Axen als die Momente der Magnete Veränderungen erleiden.

Bestimmung der erdmagnetischen Inclination und Verticalintensität.

461. Für die Bestimmung der Verticalcomponente des Erdmagnetismus besitzt man bis jetzt noch keine so sorgfältig ausgearbeitete und genaue Methode, wie für die der Horizontalcomponente. Man muss nämlich diese Verticalcomponente auf einen Körper wirken lassen, der sich um eine horizontale Axe zu drehen vermag, und Drehungen um horizontale Axen lassen sich nicht so empfindlich gegen kleine Kräfte wie Drehungen um verticale einrichten. Dazu kommt noch, dass die Erde durch ihre Schwerkraft so viel mächtiger auf den Magnet als durch ihren Magnetismus einwirkt, dass schon ganz geringe etwa durch ungleichmässige Ausdehnung hervorgebrachte Verschiebungen des Trägheitsmittelpunktes der Lage des Magnets stärker beeinflusst, als es ganz beträchtliche Variationen in der erdmagnetischen Intensität zu tun vermögen.

Demgemäss ist denn auch sowohl die directe Messung der Verticalcomponente des Ergmagnetismus als auch die Vergleichung derselben mit der Horizontalcomponente von allen magnetischen Messungen am wenigsten genau durchzuführen.

Im allgemeinen leitet man die Verticalintensität aus der Grösse der Horizontalintensität und der Richtung, nach der die gesammte magnetische Kraft der Erde wirkt, ab.

Ist nämlich i der Winkel, den die Richtung der gesammten magnetischen Kraft der Erde mit der Richtung ihrer horizontalen Componente H ein-

schliesst, ein Winkel, den man als *Inclination (Dip)* bezeichnet, so hat die gesammte erdmagnetische Kraft den Wert

$$J = H \sec i$$

und ihre Verticalcomponente Z den

$$Z = H \operatorname{tg} i.$$

Den Winkel i misst man mit Hilfe der Inclinationsnadel.

Inclination. Theoretisch ist die *Inclinationsnadel* ein Magnet, der mit einer durch seinen Trägheitsmittelpunkt senkrecht zu seiner magnetischen Axe gelegten Drehungsaxe versehen ist. Die Zapfen der Drehungsaxe werden cylindrisch abgedreht und auf zwei horizontalen Flächen, auf denen sie ungehindert (d. h. möglichst ohne Reibung) rollen können, gelagert.

Richtet man diese Axe nach der magnetischen Ost-Westlinie, so kann die Nadel sich frei in der Ebene des magnetischen Meridians drehen, ihre magnetische Axe legt sich dann von selbst in die Richtung, nach der die totale magnetische Kraft der Erde wirkt.

Der Winkel, den diese Richtung mit der Horizontalebene bildet, wird an einem vertical gestellten Kreise abgelesen.

Natürlich muss der Apparat, wenn die Ablesungen ohne weiteres sollen benutzt werden können, vollkommen seiner Definition entsprechend angefertigt sein, und das vermag die Praxis nicht zu leisten.

Es ist ganz unmöglich eine Nadel so zu justiren, dass ihr Gewicht keinen Einfluss auf ihre Gleichgewichtslage ausübt, denn wenn es auch gelungen sein sollte, die Zapfen so genau abzudrehen, dass ihre Axe ursprünglich wirklich durch den Trägheitsmittelpunkt der Nadel hindurchgeht, so wird das doch nicht mehr der Fall sein, sowie die Nadel sich auch nur ein wenig biegt oder ungleichmässig ausdehnt. Ausserdem ist die Bestimmung der Lage des Trägheitsmittelpunktes bei Magneten mit grossen Schwierigkeiten verbunden, weil hier zu der Schwerkraft der nach einer andern Richtung wirkende Erdmagnetismus sich gesellt.

Wir versehen ein Ende der Drehungsaxe und ein Ende der Nadel mit Marken und ziehen auf der Nadel eine Linie, die als Collimationslinie dienen soll. Die Lage dieser Linie lässt sich am Verticalkreis durch die Ablesung, nach der sie hinweist, fixiren. Der Radius des Verticalkreises, der nach dem ersten Strich der Teilung desselben, nach der Nullmarke hinführt, sei horizontal gerichtet. Ich bezeichne den Winkel zwischen der Collimationslinie und diesem Radius mit ϑ und den Winkel zwischen der Collimationslinie und der magnetischen Axe der Nadel mit λ. $\vartheta + \lambda$ giebt dann den Winkel, den die magnetische Axe gegen die Horizontalebene bildet, an.

Sei p das vom Trägheitsmittelpunkt auf die Fläche, auf der die Drehungsaxe rollt, gefällte Lot. Bei vollkommener Justirung des Apparates wird dieses Lot, in welcher Lage die Nadel sich auch befinden mag, die

genannte Fläche in der Berührungslinie zwischen ihr und der Axe senkrecht schneiden. Geht aber die Axe nicht genau durch den Trägheitsmittelpunkt, so wird p, welche Gestalt auch die rollenden Flächen haben mögen, eine Function von ϑ sein. Sind beide Zapfen völlig cylindrisch abgedreht, so hat man

$$p = c - a \sin(\vartheta + \alpha),$$

wo a den Abstand des Trägheitsmittelpunktes von der Axe der Zapfen (d. h. der Linie, welche die Mittelpunkte ihrer Querschnitte verbindet) bezeichnet, und α den Winkel angiebt, den die gedachte Axe der Zapfen mit der Collimationslinie bildet.

Ich bezeichne mit M das magnetische Moment, mit m die Masse des Magnets, nenne g die Intensität der Schwere, J die Intensität der gesammten erdmagnetischen Kraft und i die Inclination. Das Princip der Erhaltung der Energie verlangt dann, dass wenn das System unter dem Einfluss der Schwere und des Erdmagnetismus sich in stabilem Gleichgewicht befinden soll, der Ausdruck

$$MJ \cos(\vartheta + \lambda - i) - mgp$$

in Bezug auf ϑ ein Maximum wird.

Demnach haben wir

$$MJ \sin(\vartheta + \lambda - i) = - mg \frac{dp}{d\vartheta},$$

also, wenn die Zapfen vollständig cylindrisch sind

$$\text{I}_1) \qquad MJ \sin(\vartheta + \lambda - i) = mga \cos(\vartheta + \alpha).$$

Zur Elimination der verschiedenen in dieser Gleichung enthaltenen unbekannten Grössen, beobachtet man die Orientirung der Nadel in verschiedenen Lagen derselben.

Sei ϑ_1 die Neigung der Collimationslinie gegen die Horizontalebene, wenn der Inclinationskreis vertical im magnetischen Meridian steht und seine Teilung dem Westen zuwendet. Es ist dann

$$MJ \sin(\vartheta_1 + \lambda - i) = mga \cos(\vartheta_1 + \alpha).$$

Man dreht das Instrument um eine verticale Axe durch 180^0 so herum, dass die Teilfläche des Inclinationskreises nach Osten gewendet ist. Die Collimationslinie der Nadel wird dann, weil die beiden Flächen der Nadel vertauscht sind, nach einer andern Ablesung ϑ_2 des Inclinationskreises hinweisen, und man hat

$$\text{I}_2) \qquad MJ \sin(\vartheta_2 + \lambda - \pi + i) = mga \cos(\vartheta_2 + \alpha).$$

Die Collimationslinie darf als sehr nahe nach derselben Richtung wie die magnetische Axe verlaufend angesehen werden. λ ist also klein und ϑ_1

fällt fast mit i, ϑ_2 fast mit $\pi - i$ zusammen, demnach haben wir durch Subtraction der Gleichungen 1_1) und 1_2) von einander

$$2_1)\qquad MJ(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \pi - 2i) = 2mga\cos i\cos\alpha.$$

Nach Ausführung dieser beiden Operationen nehmen wir die Nadel von ihren Stützen herunter, bringen sie in den Ablenkungsapparat und bestimmen nach den in Art. 453 auseinandergesetzten Methoden durch die Winkel, um welchen sie einen aufgehängten Magnet ablenkt, ihr Moment M. Unter Benutzung der in dem citirten Artikel gebrauchten Symbole wird

$$M = \frac{1}{2} r^3 DH.$$

Nunmehr magnetisiren wir die Nadel um, bestimmen ihr neues Moment M', legen sie auf ihre Stützen und beobachten genau wie vorher die Winkel ϑ_3 und ϑ_4, die ihre Collimationslinie gegen die Horizontalebene bildet, wenn der Inclinationskreis seine geteilte Seite einmal nach Osten und dann nach Westen wendet. Wir haben dann, weil ϑ_3 nahezu gleich $\pi + i$ und ϑ_4 nahezu gleich $-i$ ist, ausser der Gleichung

$$M' = \frac{1}{2} r^3 HD'$$

noch die Beziehungen

$$1_3)\qquad M'J\sin(\vartheta_3 + \lambda' - \pi - i) = mga\cos(\vartheta_3 + \alpha),$$

$$1_4)\qquad M'J\sin(\vartheta_4 + \lambda' + i) = mga\cos(\vartheta_4 + \alpha),$$

also nach Elimination von λ'

$$2_2)\qquad M'J(\vartheta_3 - \vartheta_4 - \pi - 2i) = -2mga\cos i\cos\alpha.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen 2_1) und 2_2) resultirt

$$3\text{a})\qquad MJ(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \pi - 2i) + M'J(\vartheta_3 - \vartheta_4 - \pi - 2i) = 0,$$

oder zufolge der Werte für M und M'

$$3\text{b})\qquad D(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \pi - 2i) + D'(\vartheta_3 - \vartheta_4 - \pi - 2i) = 0.$$

Daraus folgt endlich für die Inclination der Wert

$$4)\qquad i = \frac{D(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \pi) + D'(\vartheta_3 - \vartheta_4 - \pi)}{2D + 2D'}.$$

D und D' sind die Tangenten der bezüglichen Winkel, um welche die Inclinationsnadel in ihren bezüglichen magnetischen Zuständen den Magnet des Ablenkungsapparates ablenkt, und ist eventuell noch mit $(1 + A_2 r^{-2})^{-1}$ zu multipliciren.

Die Genauigkeit solcher Inclinationsstimmungen sucht man durch Beobachtungsverfeinerungen möglichst zu steigern.

Der Inclinationskreis muss möglichst genau vertical stehen und tunlichst mit der magnetischen Meridianebene zusammenfallen. Die Nadel soll dem Kreise in jeder Lage parallel sein, demnach sind die Lager, auf denen ihre Zapfen ruhen, sorgfältig horizontal zu richten. Man liest auch nicht blos das eine Ende der Collimationslinie, sondern beide Enden ab, um die sogenannte Excentricität. das heisst den Fehler, der daraus resultiren würde, dass die Umdrehungsaxe des Magnets nicht genau durch die Mitte des Inclinationskreises geht, zu eliminiren.

Eine technische Verfeinerung des Apparates beruht darauf, dass man den Kreis mit einer Alhidade, deren Drehungsaxe möglichst genau durch den Mittelpunkt des Kreises geht, und deren Enden zwei Mikroskope tragen, versieht. Man stellt die Alhidade so, dass die Bilder der bezüglichen Endmarken der Collimationslinie der Magnetnadel in den Mikroskopen genau in der Mitte zwischen den Mikrometerfäden erscheinen, und liest den Inclinationskreis eventuell mit einer an der Alhidade schon angebrachten Noniusteilung ab.

Die Notirungen der Lage der Collimationslinie geschehen erst in der Ost- und dann in der Westlage des Inclinationskreises. Zur grössern Sicherheit legt man die Nadel noch um, dreht also ihre Drehungsaxe horizontal um 180^0 und beobachtet wieder in beiden Lagen, so dass man im ganzen acht Beobachtungen hat. Hierauf bestimmt man das Moment der Nadel, kehrt ihren Magnetismus um, bestimmt wieder das Moment und beobachtet wieder acht Lagen der Collimationslinie, vier in der West- und vier in der Ostlage des Inclinationskreises.

462. Die Erfahrung hat gelehrt, dass man selbst bei der sorgfältigsten Durchführung der angegebenen Methode für die Inclination mit verschiedenen Apparaten doch merklich verschiedene Werte erhält. Der Grund davon liegt in der Unmöglichkeit den einzelnen Bedingungen, welche die Theorie an die Construction der Inclinatorien stellt, praktisch gerecht zu werden.

Den Fehler, der aus einer etwaigen Ellipticität der Zapfenquerschnitte resultirt, hat der Engländer Broun durch Beobachtung der Lage der Collimationslinie, wenn der Magnet sich nacheinander nicht blos in zwei, sondern in mehreren magnetischen Zuständen befand, zu eliminiren gesucht.

Ich will zeigen, wie sich diese Verbesserung der Beobachtungsmethode als eine solche begründen lässt.

Der Magnet soll durch irgend eine unbekannte ihn angreifende Kraft aus seiner ihm zukommenden ideellen Lage verdrängt werden. Ist dann ϑ_0 die wahre, ϑ die beobachtete Inclination, so hat das Drehungsmoment L jener unbekannten Kraft den Wert

$$L = MJ \sin(\vartheta - \vartheta_0).$$

Man darf annehmen, dass der aus der Unvollkommenheit des Apparates und der Beobachtung resultirende Fehler einer einzelnen Beobachtung relativ klein ist und einen Grad nicht überschreitet.

Man hat also auch

$$L = MJ(\vartheta - \vartheta_0)$$

und

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{L}{MJ}.$$

Je grösser M ist, um so kleiner wird $\vartheta - \vartheta_0$, um so kleiner also der gemachte Fehler, um so sicherer stellt sich die Nadel in die ihr zukommende Lage ein.

Man wird also bei einer Beobachtungsreihe dafür sorgen, dass M den maximalen Betrag M_1, den das Moment der Nadel anzunehmen vermag, möglichst erreicht. Schwächt man dann das Moment der Nadel um die Grösse $M_1 - M_2$ ab, so dass M_2 zwar bedeutend kleiner als M_1, aber noch nicht so klein wird, dass die Beobachtungen überhaupt unsicher ausfallen, so erhält man etwas andere Werte für die Inclination.

Seien ϑ_1 und ϑ_2 die aus den beiden Beobachtungsreihen deducirten bezüglichen Werte für die Inclination und möge L der mittlere Wert des Moments der während beider Beobachtungsreihen wirkenden störenden Kraft sein, dann haben wir

$$L = M_1 J(\vartheta_1 - \vartheta_0) = M_2 J(\vartheta_2 - \vartheta_0),$$

also durch Elimination von L

$$\vartheta_0 = \frac{M_1\vartheta_1 - M_2\vartheta_2}{M_1 - M_2}.$$

Diese Gleichung giebt einen genähertern Wert für die Inclination.

Für L findet man

$$L = M_1 M_2 J \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{M_2 - M_1}.$$

Erhält man aus mehreren Reihen solcher Versuche für das nach obiger Formel berechnete L wenig differirende Werte, so darf man schliessen, dass ϑ_0 dem wahren Werte der Inclination sehr nahe kommt.

463. Joules Inclinatorium. Neuerdings hat Joule das Inclinatorium nach einer andern Methode construirt.

Er liess die Nadel nicht wie beim gewöhnlichen Inclinatorium auf zwei horizontirten Platten rollen, sondern schlang um die Enden ihrer Drehungsaxe Seiden- oder Spinnfäden einmal herum und hing sie an diesen an die Arme einer freien Wage an. Die Nadel rollt in dieser Einrichtung auf den

Fäden und soll nach Joule sich sehr viel freier bewegen können, als wenn sie auf Achatplatten rollt.

In der beistehenden Fig. 18 repräsensirt NS die Nadel, CC' die aus einem Draht gefertigte Axe und PCQ, $P'C'Q'$ die Fäden, die die Nadel halten, und auf denen sie zu rollen vermag. POQ, $P'O'Q'$ ist die Wage. Sie besteht aus zwei gebrochenen Hebeln, die mit einander fest verbunden sind und auf einem Draht OO' ruhen. Letzterer läuft zwischen den Zinken eines gabelförmigen (in der Figur nicht angedeuteten) Stückes und wird horizontal gestreckt. Das Querstück, welches die beiden Arme PQ und $P'Q'$ mit einander verbindet, trägt ein Laufgewicht R, das so lange verschoben wird, bis die Configuration $PQP'Q'R$ sich auf OO' in neutralem Gleichgewicht erhält.

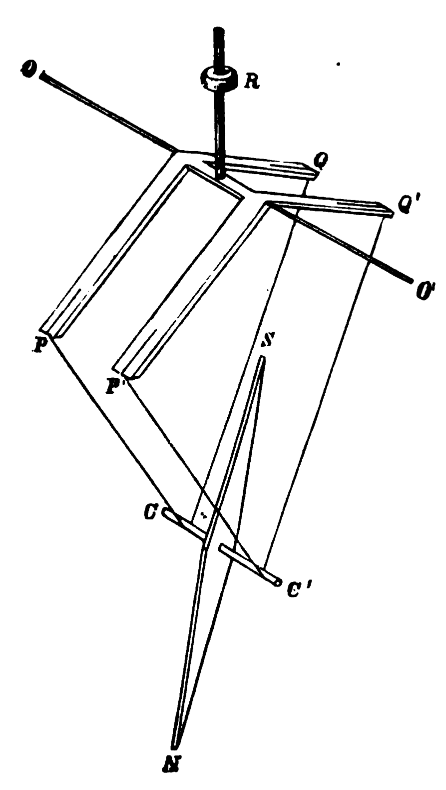


Fig. 18.

Die übrige Einrichtung wird so getroffen, dass die Nadel beim Rollen auf den Fäden in neutralem Gleichgewicht verharrt. Da also der Schwerpunkt der Nadel beim Rollen derselben weder steigen noch fallen darf, so muss der Abstand der Axe CC' vom Draht OO' stets eine und dieselbe Grösse behalten. Man macht deshalb die Arme der beiden Hebel einander völlig gleich und giebt den Fäden eine solche Lage, dass sie, wenn der Magnet auf ihnen ruht, sich senkrecht von den Armen der Hebel abzweigen.

Zur Vermeidung der durch die Biegung der Nadel verursachten Fehler soll dieselbe nach Versuchen, die Joule angestellt hat, nicht länger als 75 mm sein. Doch beträgt bei einer Länge von 100 mm die von der Durchbiegung herrührende Verfälschung der Inclination erst einen Bruchteil einer Minute. Die Axe CC' hatte Joule bei der ersten Construction seines Apparates aus Stahl hergestellt, welchen er dadurch härtete, dass er ihn zur Rotglut erhitzte und zugleich durch ein Gewicht streckte. Später aber fand er, dass man in seiner Aufhängungsvorrichtung diese Axe ebenso gut aus einem Platin- oder gar Golddraht machen konnte. Der Draht OO' ist etwa 300 mm lang. Die Gabel, zwischen deren Zinken er sich horizontal

streckt, ist an einer verticalen Axe auf einem Dreibein befestigt, und kann um diese Axe nach allen auf einem Horinzontalkreis ablesbaren Azimuten gedreht werden.

In einer Stunde lassen sich mit diesem Apparat sehr vollständige Inclinationsbestimmungen ausführen, und der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung beträgt nur einen Bruchteil einer Minute.

Zur Beobachtung der Nadel hat man im Cambridger physikalischen Laboratorium ein Doppelbild - Instrument vorgeschlagen. Zwei total reflectirende Prismen sind in der in der Figur 19 angegebenen Weise neben einander an einem Verticalkreis befestigt und können mit diesem um eine horizontale Axe, deren Verlängerung die Drehungsaxe der aufgehängten

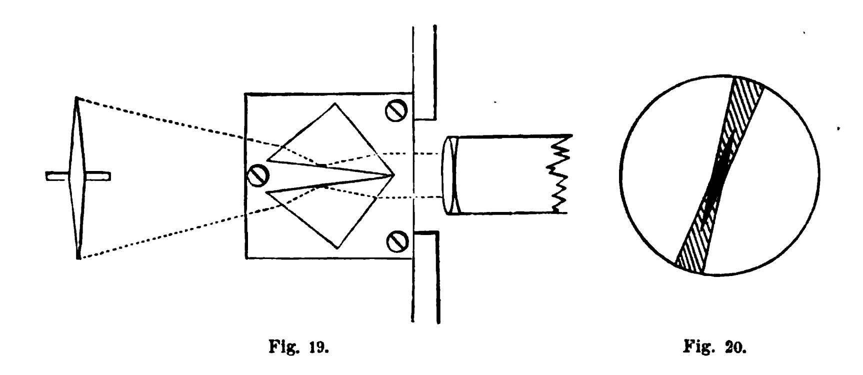


Fig. 19. Fig. 20.

Nadel trifft, gedreht werden. Durch das vor den Prismen aufgestellte Fernrohr sieht man, wie in der Figur 20, beide Enden der Nadel gleichzeitig. Zieht man auf der Nadel zwei Linien und dreht jedesmal die beiden Prismen so lange um die Axe des Verticalkreises, bis diese beiden Linien zu einer zusammenfallen, so lässt sich aus der Ablesung des Verticalkreises in leicht abzuleitender Weise die jedesmalige Inclination der Nadel bestimmen.

Bestimmung der Gesammtintensität des Erdmagnetismus.

Directe Methode. Zur Bestimmung der Gesammtintensität J des Erdmagnetismus lässt man die Inclinationsnadel in ihren beiden magnetischen Zuständen und in ihren beiden Lagen (Kreis Ost, Kreis West) um ihre Gleichgewichtslagen schwingen. Sind T_1, T_2, T_3, T_4 die bezüglichen Schwingungsdauern, so hat man

$$1)\qquad J = \frac{4\pi^2 A}{2M + 2M'} \left\{ \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} + \frac{1}{T_3^2} + \frac{1}{T_4^2} \right\}.$$

A bezeichnet das Trägheitsmoment der Nadel für die betreffende Axe; M, M' ihre durch Ablenkungsbeobachtungen zu bestimmenden Momente in den bezüglichen magnetischen Zuständen.

Indirecte Methode. Gewöhnlich leitet man aber die Gesammtintensität lieber auf dem Umwege her, dass man die Horizontalintensität H und die Inclination ϑ bestimmt, weil namentlich erstere mit grosser Präcision zu eruiren ist. Man hat dann

2) $$J = H \sec \vartheta.$$

Variation der Verticalintensität.

464. Die gesammte magnetische Intensität ist so gut wie ihr horizontal wirkender Teil Veränderungen unterworfen, die man durch wiederholte directe Bestimmung ihres Wertes verfolgen könnte. Da aber die unausweichliche Beobachtung der Inclination eine bedeutende Zeit in Anspruch nimmt, so benutzt man als Variationsinstrument einfach einen Magnet, den man auf eine Schneide so gelegt hat, dass er sich in stabilem Gleichgewicht befindet, wenn seine magnetische Axe nahezu horizontal gerichtet ist.

Ist Z die Verticalcomponente der erdmagnetischen Kraft, M das Moment des Magnets und ϑ der kleine Winkel, den seine Axe mit der Horizontalebene noch bildet, so hat man

$$MZ = mga \cos(\alpha - \vartheta),$$

wo m die Masse des Magnets, g die Schwereintensität, a den Abstand des Schwerpunktes von der Linie, mit der der Magnet auf der Schneide aufliegt, also den Abstand von der Schneide, und α den Winkel bezeichnet, den eine durch die Schneide und den Schwerpunkt gelegte Ebene mit der Richtung der magnetischen Axe einschliesst.

Sehr kleinen Aenderungen δZ der erdmagnetischen Verticalcomponente entsprechen sehr kleine Aenderungen $\delta\vartheta$ der Neigung des Magnets gegen die Horizontalebene, und es ist

1) $$M\delta Z = mga \sin(\alpha - \vartheta)\,\delta\vartheta.$$

Das Instrument soll, wie schon bemerkt, nicht zur Bestimmung von Z, sondern zur Verfolgung der Variationen dieser Grösse dienen, es genügt daher, wenn man ein für alle Mal die Werte von Z und $\delta Z/\delta\vartheta$ für den Fall eruirt, dass $\vartheta = 0$ ist.

Der Wert von Z ist aus der Gleichung

2) $$Z = H \operatorname{tg} \vartheta_0$$

abzuleiten, wo H die erdmagnetische Horizontalintensität, ϑ_0 die Inclination bezeichnet.

Um auch den Wert von $\partial Z/\partial \vartheta$, also von der Aenderung, die eine vorgeschriebene Aenderung der Verticalintensität in der Neigung der Axe des Magnets nach sich zieht, zu erhalten, bringt man den auf der Schneide liegenden Magnet durch eine bestimmte Kraft wirklich aus seiner Ruhelage heraus.

Man stellt einen Magnet M' vertical so auf. dass seine Mitte von der Mitte unseres Magnets M nach oben oder nach unten um die Grösse r_2 absteht. Die Tangente D_2 des Winkels, um welchen dann der auf der Schneide liegende Magnet abgelenkt wird, ergiebt sich (s. Art. 387) aus der Gleichung

$$2M' = \frac{dZ}{d\vartheta} r_2^3 D_2.$$

Bringt man aber den ablenkenden Magnet M' in den Deflexionsapparat, legt ihn in die magnetische Ost-Westlinie. misst den Abstand r_1 seiner Mitte von der Mitte des aufgehängten Magnets und bestimmt die Tangente D_1 des Winkels, um den M' den aufgehängten Magnet des Deflexionsapparates aus seiner Ruhelage ablenkt, so hat man wie in Art. 453

$$2M' = H r_1^3 D_1,$$

also

$$\frac{dZ}{d\vartheta} = H \frac{r_1^3 D_1}{r_2^3 D_2}. \tag{3}$$

Die tatsächliche Grösse Z der Verticalintensität ist zu einer bestimmten Zeit

$$Z = Z_0 + \vartheta \frac{dZ}{d\vartheta}, \tag{4}$$

wenn Z_0 den Wert von Z für $\vartheta = 0$ angiebt.

Ausrüstung magnetischer Observatorien.

Observatorien, deren Aufgabe in der continuirlichen Verfolgung der Variationen, die der Ergmagnetismus erfährt, besteht, werden am besten mit einem Unifilar-Declinometer, einem Bifilar-Horizontalmagnetometer und einem Jouleschen Verticalmagnetometer ausgerüstet.

In einigen Observatorien fixirt man die Angaben dieser Instrumente automatisch auf photographisch präparirtem Papier, das man durch ein Uhrwerk auf einem Cylinder rollen lässt. Die Curven geben dann für jeden Augenblick die Variationen, die die drei zu einander rechtwinklig geneigten Componenten des Erdmagnetismus gegen ihre Ausgangswerte gerade auf-

weisen. Das Declinometer zeigt die Variation der nach dem mittlern magnetischen Westen gerichteten Componente des Erdmagnetismus an, das Bifilar-Magnetometer lässt die Variationen der nach dem magnetischen Norden horizontal gerichteten Componente hervortreten und das Joule'sche Inclinometer giebt die Variation der vertical gerichteten Componente an. Die Ausgangswerte dieser drei Kräfte, das heisst die Werte, welche diese drei Kräfte besitzen, wenn die betreffenden Instrumente ihre bezüglichen Null-Angaben machen, müssen aus absoluten, oft zu wiederholenden Messungen der Declination, der Inclination und der Horizontalintensität deducirt werden.

Cap. VIII.

Der Erdmagnetismus.

Erdmagnetische Kraftcomponenten und erdmagnetisches Potential.

465. Wir schöpfen unsere Kenntnisse vom Erdmagnetismus aus der Untersuchung der zu irgend einer Zeit stattfindenden Verteilung der erdmagnetischen Kräfte auf der Oberfläche der Erde und aus dem Studium der Aenderungen, die diese Verteilung zu verschiedenen Zeiten aufweist.

Die erdmagnetische Kraft hängt von dem Ort, an dem sie bestimmt wird, und von der Zeit, zu der man ihre Grösse beobachtet, ab. Sie ist bekannt, wenn drei verschiedene Coordinaten von ihr gegeben sind. Als solche wählt man die Declination δ oder das Azimut der Kraft, die Inclination ϑ oder ihre Neigung gegen die Horizontalebene und die Horizontalintensität H.

Handelt es sich aber um ein Studium der allgemeinen Verteilung des Erdmagnetismus, so benutzt man am besten die drei zu einander rechtwinklig geneigten Componenten

1a)
$$X = H\cos\delta, \text{ Richtung von Süden nach Norden,}$$
$$Y = H\sin\delta, \quad \text{-} \quad \text{-} \text{ Osten - Westen,}$$
$$Z = H\operatorname{tg}\vartheta, \quad \text{-} \quad \text{vom Nadir zum Zenit.}$$

Betrachtet man die Erde als Kugel vom Radius a, und bezeichnet mit l die Breite, mit λ die von Osten nach Westen als positiv gerechnete Länge eines Ortes und mit r den Abstand desselben von dem Mittelpunkt der Erde, so ist auch

1b)
$$X = -\frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial l}, \quad Y = -\frac{1}{a\cos l}\frac{\partial V}{\partial \lambda}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

wo V das magnetische Potential auf der Erdoberfläche angiebt.

Aus der zweiten Form für die magnetischen Kraftcomponenten folgt, dass man zur Bestimmung des Potentials des Erdmagnetismus auf der Oberfläche der Erde nur die Horizontalintensität zu kennen braucht.

Bezeichnet nämlich V_0 den Werth dieses Potentials am wahren Nordpol, so ist das längs eines Meridianstückes genommene Linienintegral

$$V_l = -a\int_{\frac{\pi}{2}}^{l} X dl + V_0 \tag{2a}$$

gleich dem Werte, den V auf diesem Meridian unter der Breite l besitzt. V lässt sich also berechnen, wenn wir für jeden Punkt der Erde den Wert von X und den Werth, der V im Nordpol zugehört, kennen.

Sucht man nicht das Potential, sondern die Kraftcomponenten selbst, so bedarf es nur der Kenntnis von X, nicht der von V_0, weil es hier lediglich auf die Derivirten des Potentials ankommt.

In dem Linienintegral

$$V_l = -a\int_{\frac{\pi}{2}}^{l} X dl + V_0$$

ist die Integration längs eines Meridians vom Nordpol bis zum Parallelkreis l auszuführen.

Bildet man das Linienintegral von Y längs des Parallelkreises l vom gedachten Meridian λ_0 bis zu einem andern Meridian λ, so wird

$$V_{\lambda l} = V_l - a\int_{\lambda_0}^{\lambda} Y \cos l d\lambda. \tag{2b}$$

Nach dieser oder nach der vorhergehenden Formel liesse sich das erdmagnetische Potential berechnen, wenn auf der ganzen Erde ein magnetischer Dienst eingerichtet wäre, der für jeden Punkt derselben eine der Horizontalcomponenten X und Y oder auch beide kennen lehrte. Das ist nun freilich nicht in dem Maasse, wie es wünschenswert wäre, der Fall. In den civilisirten Teilen der Erde sind die magnetischen Stationen relativ zahlreich vertreten, es existiren aber noch weite Länderstrecken, aus denen wir bis jetzt noch keine erdmagnetischen Daten besitzen.

Stationsbeobachtungen zur Bestimmung der Magnetisirung der Erde.

466. Wir wollen annehmen, dass in einem Lande von mässiger Ausdehnung die Declination und Horizontalintensität an relativ vielen, über dem Lande in geeigneter Weise verteilten Stationen bestimmt wird.

Ueberschreiten die grössern Dimensionen des Landes die hundert Meilen nicht, so darf man für das Potential V mit genügender Genauigkeit

$$1)\qquad V = \text{const} - a\,(A_1 l + A_2 \lambda + \tfrac{1}{2} B_1 l^2 + B_2 \lambda l + \tfrac{1}{2} B_3 \lambda^2 + \ldots)$$

setzen, woraus

$$2\text{a})\qquad \begin{aligned} X &= A_1 + B_1 l + B_2 \lambda + \ldots, \\ Y \cos l &= A_2 + B_2 l + B_3 \lambda + \ldots \end{aligned}$$

folgen würde.

Nun habe das betreffende Land n Stationen, die unter den bezüglichen Längen $l_1, l_2, \ldots l_n$ und unter den bezüglichen Breiten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ liegen, in deren jeder beide Horizontalcomponenten X und Y beobachtet werden.

Setzt man

$$3)\qquad X_0 = \frac{1}{n} \sum_1^n{}_\varkappa X_\varkappa, \quad Y_0 \cos l_0 = \frac{1}{n} \sum_1^n{}_\varkappa Y_\varkappa \cos l_\varkappa,$$

so werden X_0 und Y_0 die Werte dieser Componente für eine supponirte centrale Station liefern, deren Länge l_0 und deren Breite λ_0, den Mittelwerten aus den Längen und Breiten der Stationen bezüglich gleich sind, für die also

$$4)\qquad l_0 = \frac{1}{n} \sum_1^n{}_\varkappa l_\varkappa, \quad \lambda_0 = \frac{1}{n} \sum_1^n{}_\varkappa \lambda_\varkappa$$

wird.

Ich eliminire mit Hülfe der so definirten Grössen X_0 und Y_0 aus den Ausdrücken für X und Y die Constanten A_1 und A_2 und erhalte

$$2\text{b})\qquad \begin{aligned} X &= X_0 + B_1 (l - l_0) + B_2 (\lambda - \lambda_0), \\ Y \cos l &= Y_0 \cos l_0 + B_2 (l - l_0) + B_3 (\lambda - \lambda_0). \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen für jede Station gelten, so haben wir n Gleichungen von der Form der ersten und ebenso n Gleichungen von der der zweiten Gleichung, aus denen die unbekannten Constanten zu berechnen sind.

Die Componenten X und Y werden nicht direct beobachtet, sondern aus den Werten der Horizontalintensität und der Declination nach Maassgabe der Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= H \cos \delta, \\ Y &= H \sin \delta \end{aligned}$$

deducirt. Man hat nun

$$\begin{aligned} dX &= \cos \delta\, dH - H \sin \delta\, d\delta, \\ dY &= \sin \delta\, dH + H \cos \delta\, d\delta. \end{aligned}$$

Bezeichnen also h und d die wahrscheinlichen Fehler, mit denen die Messungen von H bezüglich δ behaftet sind, so haben die wahrscheinlichen Fehler ξ, η von X bezüglich Y die Werte

$$\xi = \sqrt{h^2 \cos^2\delta + d^2 H^2 \sin^2\delta},$$

$$\eta = \sqrt{h^2 \sin^2\delta + d^2 H^2 \cos^2\delta}.$$

Gleicht man nun die Formeln 2b) aus, so werden die dann aus denselben berechneten Werte für X und Y im allgemeinen nicht mehr mit den beobachteten übereinstimmen, und wenn für irgend eine Station die übrig bleibenden Fehler dieser so berechneten Componenten die wahrscheinlichen Fehler ξ, η ihrer beobachteten Werte überschreiten, so fällt diese Station aus dem System heraus, und man darf schliessen, dass an derselben locale Störungen wirksam sind. Man hat dann auch kein Recht, dem wahrscheinlichen Fehler der XComponente einen andern Wert als dem der YComponente zuzuschreiben.

Die Ausgleichung des Systems der $2n$ Gleichungen 2b) geschieht nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Um die Gleichungen auf gleiches Gewicht zu reduciren, hat man die von der Form $X = \ldots$ mit η und die von der Form $Y \cos l =$ mit ξ zu multipliciren. Die Normalgleichungen zur Berechnung der drei Unbekannten B_1, B_2, B_3 sind

$$\sum_1^n{}_\varkappa (l_\varkappa - l_0)(X_\varkappa - X_0) = B_1 \sum_1^n{}_\varkappa (l_\varkappa - l_0)^2 + B_2 \sum_1^n{}_\varkappa (l_\varkappa - l_0)(\lambda_\varkappa - \lambda_0),$$

$$\begin{aligned}\sum_1^n{}_\varkappa (\lambda_\varkappa - \lambda_0)(X_\varkappa - X_0)\eta^2 + \sum_1^n{}_\varkappa (l_\varkappa - l_0)(\overline{Y}_\varkappa - \overline{Y}_2)\xi^2 \\ = B_1 \sum_1^n{}_\varkappa (l_\varkappa - l_0)(\lambda_\varkappa - \lambda_0)\eta^2 \\ + B_2 \left\{ \sum_1^n{}_\varkappa (\lambda_\varkappa - \lambda_0)^2 \eta^2 + \sum_1^n{}_\varkappa (l_\varkappa - l_0)^2 \xi^2 \right\} \\ + B_3 \xi^2 \sum_1^n{}_\varkappa (\lambda_\varkappa - \lambda_0)(l_\varkappa - l_0).\end{aligned}$$

$$\sum_1^n{}_\varkappa (\lambda_\varkappa - \lambda_0)(\overline{Y}_\varkappa - \overline{Y}_0) = B_2 \sum_1^n{}_\varkappa (l_\varkappa - l_0)(\lambda_\varkappa - \lambda_0) + B_3 \sum_1^n{}_\varkappa (\lambda_\varkappa - \lambda_0)^2.$$

Darin ist $\overline{Y}_\varkappa = Y_\varkappa \cos l_\varkappa$ gesetzt.

Wir haben aber zufolge der Gleichungen unter 3) und 4)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}(l_\varkappa - l_0)(X_\varkappa - X_0) = \sum_{\varkappa=0}^{n} l_\varkappa X_\varkappa - n l_0 X_0 = P_1,$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}(\lambda_\varkappa - \lambda_0)(X_\varkappa - X_0) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \lambda_\varkappa X_\varkappa - n\lambda_0 X_0 = P_2,$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}(l_\varkappa - l_0)(\overline{Y}_\varkappa - \overline{Y}_0) = \sum_{\varkappa=1}^{n} l_\varkappa Y_\varkappa \cos l_\varkappa - n l_0 Y_0 \cos l_0 = Q_1,$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}(\lambda_\varkappa - \lambda_0)(\overline{Y}_\varkappa - Y_0) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \lambda_\varkappa Y_\varkappa \cos l_\varkappa - n\lambda_0 Y_0 \cos l_0 = Q_2;$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}(l_\varkappa - l_0)^2 = \sum_{\varkappa=1}^{n} l_\varkappa^2 - n l_0^2 = b_1,$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}(l_\varkappa - l_0)(\lambda_\varkappa - \lambda_0) = \sum_{\varkappa=1}^{n} l_\varkappa \lambda_\varkappa - n l_0 \lambda_0 = b_2,$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}(\lambda_\varkappa - \lambda_0)^2 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \lambda_\varkappa^2 - n\lambda_0^2 = b_3,$$

also

$$\begin{aligned} P_1 &= B_1 b_1 + B_2 b_2, \\ \eta^2 P_2 + \xi^2 Q_1 &= B_1 \eta^2 b_2 + B_2(\xi^2 b_1 + \eta^2 b_3) + B_3 \xi^2 b_2, \\ Q_2 &= B_2 b_2 + B_3 b_3. \end{aligned}$$

Berechnet man daraus die drei Unbekannten B_1, B_2, B_3 und setzt ihre Werte in das System 2b) ein, so erhalten die Gleichungen für X und Y, aus denen die Einflüsse localer Störungen, die, wie die Erfahrung lehrt, sich überall da bemerkbar machen, wo das hervortretende Gestein, wie die meisten vulkanischen Ursprungs, magnetisch ist, eliminirt sind. Man darf dann diese Gleichungen, wofern nur die Anzahl der Beobachtungsstationen genügend gross ist, zur Berechnung von X und Y für jeden in jenem Lande gelegenen Punkt anwenden.

Ein derartiger magnetischer Dienst lässt sich nur in einem Lande einrichten, wo magnetische Instrumente nach überall hingeschafft und in einer genügend grossen Anzahl von Stationen aufgestellt werden können.

Man muss sich daher einstweilen noch begnügen, in vielen Teilen der Erde die Verteilung des Erdmagnetismus durch Interpolation zwischen weit auseinanderliegenden wenigen Stationen zu eruiren.

Magnetischer Aequator und magnetische Pole.

467. Nachdem man so rechnerisch oder graphisch aus Karten, in denen die Orte, welche gleiche magnetische Elemente aufweisen, durch Linien mit einander verbunden sind, für alle Punkte der Erde die Werte der

Componenten X und Y und damit auch die des Potentials V kennen gelernt hat, kommt es darauf an, aus diesen Einzelwerten die Entwickelung für V nach harmonischer Flächenfunction abzuleiten.

Wäre die Erde ganz gleichmässig und überall in derselben Richtung magnetisirt, so müsste ihr magnetisches Potential eine Kugelfunction des ersten Grades sein. Die magnetischen Meridiane würden durch grösste Kreise repräsentirt werden, die alle durch zwei sich diametral entgegenstehende Punkte der Erde, deren magnetische Pole, gehen müssten. Der magnetische Aequator wäre ein grösster Kreis und alle auf ihm gelegenen Punkte würden von derselben Horizontalintensität angegriffen werden.

Für irgend einen Punkt der Erde würde die Horizontalintensität

$$H = H_0 \cos l'$$

und die Verticalintensität

$$Z = 2 H_0 \sin l'$$

sein, wenn H_0 die Horizontalintensität auf dem magnetischen Aequator und l' die magnetische Breite bezeichnete. Die Inclination ϑ würde sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \vartheta = 2 \operatorname{tg} l'$$

bestimmen.

In Wahrheit ist das nun keineswegs der Fall. Der wirkliche *Magnetische Aequator* ist kein grösster Kreis. Er wird aber als die Linie definirt, welche die Orte der Erde, wo die Inclination gleich Null ist, die Verticalintensität also verschwindet, mit einander verbindet. Die *Magnetischen Pole* bestimmen sich durch die Bedingung, dass in ihnen die Inclination gleich 90^0 ist, und demgemäss die Horizontalintensität sich auf Null reducirt. Die Erde besitzt zwei solcher Pole, einen auf der nördlichen und einen auf der südlichen Halbkugel. Sie liegen einander nicht diametral gegenüber, und ihre Verbindungslinie läuft nicht in Richtung der magnetischen Axe der Erde.

468. Gehen wir bei der Untersuchung des magnetischen Zustandes der Erde von ihrem magnetischen Potential aus, so sind die *Magnetischen Pole* derselben als diejenigen Stellen zu definiren, in denen das Potential V ein Maximum oder ein Minimum besitzt, oder wo es stationär ist.

Wo das Potential ein Minimum erreicht, zeigt das Nordende der Inclinationsnadel senkrecht nach unten. Bringt man also in die Nähe dieser Stelle eine Compassnadel, so wird deren Nordende nach dem betreffenden Pol hinweisen.

Wo das Potential ein Maximum besitzt, zeigt das Südende der Inclinationsnadel senkrecht nach unten. Eine Compassnadel stellt sich also so ein, dass ihr Südende sich dieser Stelle zuwendet.

Hat das magnetische Potential V der Erde auf ihrer Oberfläche p Minima, also p Punkte, wo die Inclinationsnadel mit ihrem Nordende senk-

recht nach unten zeigt, so müssen noch $p-1$ andere Stellen vorhanden sein, wo die Inclinationsnadel mit einem Ende senkrecht nach unten weist. Doch ist es nicht immer das Nordende, welches die Nadel nach diesen $p-1$ Stellen hinrichtet. Führt man also einen Compass in einem Kreise um eine dieser $p-1$ Stellen, so rotirt die Nadel nicht so, dass ihr Nordende stets nach diesem Punkt hinzeigt, sondern in entgegengesetzter Richtung. Demgemäss pointirt bald ihr Nordende, bald ihr Südende nach dieser Stelle hin.

Bezeichnet man die p Punkte, an denen das magnetische Potential ein Minimum ist, als *Wahre Nordpole*, so muss man die $p-1$ andern Punkte als *Falsche Nordpole* ansehen, weil die Compassnadel sie nicht immer als Nordpole anzeigt.

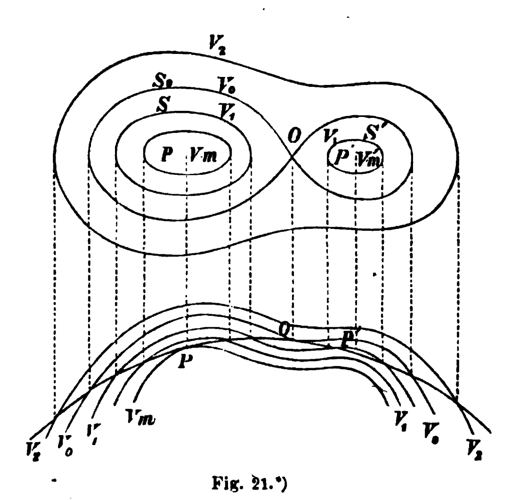


Fig. 21.*)

Besitzt also die Erde p wahre Nordpole, so hat sie $p-1$ falsche Nordpole, ebenso muss sie $q-1$ falsche Südpole haben, falls ihr q wahre Südpole zugehören.

Es kann demnach nur eine ungerade Anzahl von Nordpolen und ebenso nur eine ungerade Anzahl von Südpolen geben, und die Erde hat nicht, wie man eine zeitlang geglaubt hat, zwei Nordpole und zwei Südpole. Nach Gauss besitzt unser Weltkörper nur einen wahren Nordpol und nur einen wahren Südpol, sie hat also gar keine falschen Pole**).

*) Die Figur 21, die den Leser die im Text auseinandergesetzte Theorie der Pole besser verstehen lassen soll, ist dem Werke von Mascart und Joubert, *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme*, Paris 1882, entnommen. Sie stellt den Fall dar, wo zwei, Maximis des Potentials zugehörenden, wahren Südpolen P, P' ein falscher Südpol O entspricht. D. Uebers.

**) Nach Gauss' Berechnung lag im Jahre 1838 der Nordpol bei 70° 35′ nördlicher Breite und 262° 0,1′ östlicher Länge, der Südpol bei 78° 35′ südlicher Breite und 150° 10′ östlicher Länge.

Gauss' Berechnung des erdmagnetischen Potentials.

469. Die meisten frühern Forscher über die Natur des Erdmagnetismus haben die magnetische Wirkung der Erde als das Resultat der eines oder mehrerer Stabmagnete, deren Pole in zu bestimmender Weise gelegen sein sollten, darzustellen gesucht. Erst Gauss hat das Problem der magnetischen Verteilung der Erde in ganz allgemeiner Weise gelöst, indem er ihr magnetisches Potential nach harmonischen Raumfunctionen entwickelte.*)

Die Coefficienten der Entwickelung hat er für die vier ersten Grade aus 84 Elementsystemen berechnet. Seine Reihe umfasst also 24 Glieder, 3 vom ersten, 5 vom zweiten, 7 vom dritten, 9 vom vierten Grade. Diese verhältnismässig grosse Anzahl von Termen erwies sich als notwendig, wenn das Potential die wirkliche Verteilung des Erdmagnetismus erträglich darstellen sollte.

Trennung der innern Ursachen des Erdmagnetismus von den äussern.

470. Gauss hat auch gelehrt, wie man aus der Beobachtung der Verticalintensität des Erdmagnetismus zu entscheiden vermag, ob die magnetischen Kräfte der Erde innerhalb der Oberfläche, wie etwa in einer Magnetisirung ihrer Substanz oder in electrischen Strömen, oder ausserhalb ihrer Oberfläche zu suchen ist, falls man für das magnetische Potential der Erde eine Entwickelung nach Kugelfunctionen besitzt, deren Angaben für die Grösse und Richtung der Horizontalintensität für jeden Punkt der Erde mit den tatsächlichen Verhältnissen im Einklange ist.

Sei dieses Potential allgemein nach Kugelfunctionen positiven und negativen Grades entwickelt

$$V = A_1 \frac{r}{a} + A_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \cdots + A_i \left(\frac{r}{a}\right)^i + \cdots$$
$$+ B_1 \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} + B_2 \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} + \cdots + B_i \left(\frac{r}{a}\right)^{-(i+1)} + \cdots$$

Die erste von den A abhängende Reihe stellt den Teil des Potentials dar, der ausserhalb der Erdoberfläche wirkenden Ursachen Rechnung trägt, die zweite verdankt den innerhalb der Erdoberfläche wirkenden Ursachen ihre Entstehung.

Die Verticalcomponente Z der erdmagnetischen Kraft ist an der Erdoberfläche

$$Z = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a}$$

*) *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins* Bd. III.

demnach wird

$$aZ = \Sigma\,(iA_i - (i+1)\,B_i),$$

und wenn man

$$aZ_i = iA_i - (i+1)\,B_i$$

und

$$\overline{V}_i = A_i + B_i$$

setzt, erhält man

$$A_i = \frac{(i+1)\,\overline{V}_i + aZ_i}{2i+1},$$

$$B_i = \frac{i\overline{V}_i - aZ_i}{2i+1}.$$

471. Das erdmagnetische Potential ist ebenso wie die Verticalintensität Veränderungen unterworfen, man kennt daher die Entwickelung nur des Mittelwertes dieses Potentials für gewisse Epochen. Es hat sich aber gezeigt, dass die so berechneten Coefficienten A_i verschwindend kleine Werte besitzen, der Erdmagnetismus also nicht merklich äussern Ursachen seine Entstehung verdanken kann.

Veränderungen des Erdmagnetismus.

472. Der Erdmagnetismus ist teils regelmässig wiederkehrenden Veränderungen, teils irregulär auftretenden Störungen unterworfen. Ein Teil dieser Variationen könnte äussern Ursachen, etwa der Einwirkung der Sonne und des Mondes, seine Entstehung verdanken, man weiss aber bis jetzt zu wenig von der Entwickelung dieser durch die Sonne und den Mond veranlassten Variationen, als dass man auf eine wirkliche Einwirkung dieser Himmelskörper schliessen könnte. Doch erhellt aus den diesbezüglichen Berechnungen*), die Stoney und Chambers angestellt haben, dass wenn Sonne und Mond den Erdmagnetismus beeinflussen, sie dies sicher nicht direct in ihrer etwaigen Eigenschaft als magnetische Körper tun können.**)

*) S. Mascart et Joubert, *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme.* Tome I. p. 477 ff.

**) Hornstein, weiland Professor in Prag, hat eine Veränderung der erdmagnetischen Elemente entdeckt, deren Periode 26,33 Tage, also fast genau die Zeit einer synodischen Rotation der Sonne, wie sie aus Beobachtungen der in der Nähe des Aequators gelegenen Sonnenflecken deducirt wird, beträgt. Man könnte also rückwärts aus dieser erdmagnetischen Periode die Rotationsdauer der Sonne ableiten, und das ist die erste Zahlung, die der Magnetismus zur Tilgung seiner Schuld der Astronomie leistet. *Berichte der Wiener Acad.* 1871, Juni 15; *Proc. R. S.* 1871, Nov. 16.

Reguläre Variationen. Die mehr regelmässigen Variationen des Erdmagnetismus sind:

1. Die *Solaren Variationen*, die von der Tagesstunde und der Jahreszeit abhängen,
2. die *Lunaren Variationen*, die von dem Stundenwinkel des Mondes und seinen andern Positionselementen abhängen. Sie kehren nicht von Jahr zu Jahr wieder, sondern scheinen an eine Periode von etwa elf Jahren gebunden zu sein.
3. Die *Säcularen Variationen*, die, so lange überhaupt magnetische Beobachtungen angestellt werden, ohne Aufhören vor sich gehen. Sie bringen weit stärkere Aenderungen in den magnetischen Elementen als die zuerst genannten Variationen von kürzerer Periode hervor.

473. Magnetische Störungen. Ausser den genannten mehr regelmässigen Aenderungen sind die magnetischen Elemente ganz plötzlichen Störungen von mehr oder weniger grosser Bedeutung unterworfen. Der Erfahrung nach treten dieselben zu manchen Zeiten viel kräftiger und häufiger als zu andern auf. In den Perioden starker magnetischer Störungen sind die Gesetze der regelmässigen magnetischen Variationen verdeckt, während sie sonst deutlich erkennbar bleiben. Man hat daher diesen Störungen viel Aufmerksamkeit zugewendet und gefunden, dass gewisse Arten derselben mit Vorliebe zu bestimmten Tagesstunden, in gewissen Jahreszeiten und in bestimmten Zeitintervallen auftreten, ohne dass dabei eine individuelle Störung etwas von ihrem unregelmässigen Charakter verlöre. Solche Störungen machen sich ziemlich gewöhnlich bemerkbar. Zu manchen Zeiten treten aber ganz excessive Perturbationen auf, die den Erdmagnetismus für einen oder für zwei Tage total verändern. Man nennt diese Störungen *Magnetische Stürme.*

Der Verbreitungskreis einer Störung ist bald klein, bald so gross, dass die betreffende Störung sich in demselben Moment in weit von einander abliegenden Stationen fühlbar macht.

Airy hat gefunden, dass ein grosser Teil der in Greenwich beobachteten Störungen zu gleicher Zeit mit Erdströmen auftraten, die von in der Nachbarschaft versenkten Electroden angezeigt wurden. Es ergab sich auch, dass eine erdmagnetische Störung die Magnetnadel genau so afficirte, wie es der zugehörige gleichzeitig beobachtete Erdstrom tun müsste, wenn er in der Richtung, die er gerade besass, durch einen unter der Magnetnadel befindlichen Draht fortgeleitet würde.

Die magnetischen Störungen erreichen, wie man gefunden hat, ihr Maximum in einer Periode von elf Jahren, die mit der Periode der grössten Anzahl von Sonnenflecken zusammenfällt.

474. Indirecte Wirkung von Sonne und Mond. Wir sind damit durch das Studium des Erdmagnetismus auf ein Gebiet geführt, das uns zu weit aussehenden und tief einschneidenden Untersuchungen auffordert.

Man weiss, dass die Sonne und der Mond den Erdmagnetismus beeinflussen, man weiss aber auch, wie ich schon bemerkt habe, dass diese Beeinflussung nicht einem etwaigen Sonnen- oder Mondmagnetismus seine Entstehung verdankt. Die beiden Himmelskörper wirken also indirect. Bei der Sonne liegt es nahe die Veränderungen, die sie in dem Erdmagnetismus hervorbringt, ihren Wärmewirkungen zuzuschreiben. Bei dem Mond hat man aber eine solche bequeme Erklärung nicht. Vielleicht, dass die Attraction zwischen ihm und der Erde in dem Innern dieser einen Zwangzustand producirt. Der Mond würde dann, nach dem, was wir in Art. 447 gesehen, ähnlich wie er die Gezeiten verursacht, in dem präexistirenden Magnetismus der Erde halbtägige Veränderungen hervorbringen.

Allein all diese solaren und lunaren Veränderungen sind nur unbedeutend im Vergleich zu den säcularen Variationen, die der Erdmagnetismus aufweist.

Welche ausserhalb der Erde oder tief in ihrem Innern wirkende Ursache mag wohl ihren Magnetismus so enorm verändern, dass ihre magnetischen Pole sich langsam von einem Teile ihrer Oberfläche zu einem andern bewegen?

Bemerkt man, dass die Magnetisirung unseres Erdballs in ihrer Stärke durchaus mit der, die wir mit vieler Mühe in unsern Stahlmagneten hervorzurufen vermögen, vergleichbar ist, so wird man bei den immensen Veränderungen des Magnetismus eines so grossen Körpers zu dem Schluss geführt, dass wir noch bei weitem nicht mit einer der mächtigsten Naturwirkungen vertraut sind, deren Actionsgebiet sich im tiefen Innern unserer Erde befindet und bei der Schwäche unserer Mittel uns unnahbar und verschlossen ist.

VIERTER TEIL.

Electromagnetismus.

Cap. I.

Electromagnetische Kraft.

Entdeckung der electromagnetischen Wirkungen.

475. Die merkwürdige Erscheinung, dass in Compassnadeln Magnetismus durch einen sie selbst oder andere in der Nähe befindliche Körper durchsetzenden electrischen Entladungsstrom hervorgebracht oder zerstört werden konnte, war von vielen Forschern bemerkt worden, und man hatte auch schon vielfache Conjecturen hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen der Electricität und dem Magnetismus gemacht. Doch blieben die wahren Gesetze jener Erscheinungen ebenso wie die Form der Relation, in der die genannten Kräfte zu einander stehen sollten, so lange gänzlich unbekannt, bis Hans Christian Oerstedt in einer für wenige vorgeschrittene Studenten in Kopenhagen gehaltenen Vorlesung *) die Entdeckung machte, dass der Draht, der die Pole einer Voltaschen Batterie verband, eine in seiner Nähe befindliche Magnetnadel störte. Veröffentlicht ist diese Entdeckung in der vom 21. Juli 1820 datirten Abhandlung *Experimenta circa effectum Conflictus Electrici in Acum Magneticam.*

Zu der Entdeckung der Einwirkungen des Magnets auf mit Electricität geladene Körper kam Oerstedt, als er die Effecte eines Drahtes, der durch einen ihn durchfliessenden electrischen Strom erhitzt war, studirte. Er fand aber bald, dass nicht die Wärme, sondern der diese producirende Strom selbst die Magnetnadel störte.

Wirkung des Stromes auf eine Magnetnadel; Magnetisches und Electromagnetisches Feld.

Die Wirkung des Stromes auf die Magnetnadel ergab sich als von rotatorischer Natur, das heisst, eine Magnetnadel, die sich in der Nähe

---

*) Anders lautet der Bericht über Oerstedts Entdeckung in einem von Professor Hansteen geschriebenen Brief. Man sehe *Life of Faraday* von Bence Jones vol. II. p. 395.

eines von einem electrischen Strome durchflossenen Drahtes befindet, sucht sich senkrecht zum Drahte zu stellen und pointirt immer mit demselben Ende nach Vorwärts, wenn man sie um den Draht herumführt.

476. In der Umgebung eines Drahtes, den ein electrischer Strom durchsetzt, wird also ein Magnet von einer Kraft, deren Grösse von der Lage des Drahtes und der Stärke des Stromes abhängt, angegriffen. Demnach darf man diese Umgebung als ein magnetisches Feld ansehen und sie nach denselben Methoden, wie ein im gewöhnlichen Sinne des Wortes durch Magnete hervorgebrachtes magnetisches Feld, durch Ziehen der magnetischen Kraftlinien und Messen der an den einzelnen Punkten herrschenden Intensität untersuchen.

Wirkung eines unendlich langen geraden Stromes.

477. Wirkungsrichtung. Ich beginne mit dem Fall eines unendlich langen geraden Drahtes, der einen electrischen Strom fortleitet. Die Ablenkung, die eine Magnetnadel durch den Strom erfährt, lässt sich jederzeit durch folgende Regel bestimmen.

Schwimmt ein Mann mit dem electrischen Strome, also so, dass dieser ihm vom Kopf zu den Füssen fliesst, so stellt sich eine vor ihm freihängende Magnetnadel, die ihm ursprünglich den Nordpol, das nach Norden zeigende Ende, zukehrt, unter der Einwirkung des Stromes so, dass dieser Nordpol nach seiner Rechten hinweist.

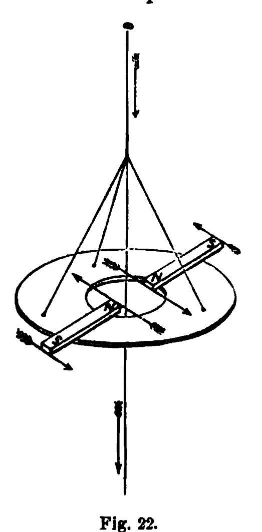


Fig. 22.

Die beistehende Figur 22 soll der Einbildungskraft des Lesers zu Hülfe kommen. Die magnetischen Kraftlinien schneiden die Ebenen, welche durch die Längsrichtung des Drahtes gehen, senkrecht, sie sind Kreise, die ihre Centren in dem Drahte haben, und deren Ebenen den Draht senkrecht durchsetzen. Führt man den nach Norden weisenden Pol einer Magnetnadel von links nach rechts so herum, dass er immer auf einem solchen Kreise bleibt, so wird er in allen Punkten seiner Bahn von einer in Richtung seiner Bewegung wirkenden Kraft angegriffen. Sein nach Süden zeigendes Ende unterliegt einer entgegengesetzt gerichteten Kraftwirkung.

478. Magnetische Kraft. Um die Stärke dieser Kraftwirkung zu erhalten, wollen wir annehmen, dass der Strom senkrecht von oben nach unten fliesst und dass der Magnet, auf den er wirkt, sich in einer Horizontalebene um eine Axe, die mit dem Draht zusammenfällt, drehen kann. Die Erfahrung hat gelehrt, dass in dieser Anordnung der Magnet als Ganzes, in welcher Entfernung er sich auch von dem Draht befindet, kein Bestreben

hat sich um den Draht zu drehen. Der Strom sucht zwar den Magnet um seine (des Stromes) Richtung zu bewegen, er wirkt auf beide Pole mit gleich grossen statischen Momenten, aber er übt an dem einen Pol ein entgegengesetztes Moment wie an dem andern aus.

Seien m_1 und m_2 die Stärken der beiden Pole, r_1 und r_2 die bezüglichen Abstände derselben von dem Draht, T_1 und T_2 die Intensitäten der magnetischen Kraft, mit der der Strom die bezüglichen Pole angreift.

Die Kraftwirkung auf m_1 ist dann $m_1 T_1$, sie geschieht senkrecht gegen die Drehungsaxe, übt also ein Moment von der Grösse $m_1 r_1 T_1$ aus. Die Kraftwirkung auf den andern Pol m_2 ist gleich $m_2 T_2$ und hat ein Moment $m_2 T_2 r_2$.

Der Magnet verharrt, wie ich schon bemerkt habe, in absoluter Ruhe, in welchem Verhältnis auch die beiden Distanzen r_1 und r_2 zu einander stehen mögen. Demnach ist

$$1)\qquad m_1 T_1 r_1 + m_2 T_2 r_2 = 0.$$

Bekanntlich ist aber für jeden beliebigen Magnet

$$m_1 + m_2 = 0,$$

also haben wir

$$2)\qquad T_1 r_1 = T_2 r_2,$$

und diese Gleichung lehrt, dass die electromotorische Kraft eines unendlich langen geraden Stromes senkrecht zu seiner Richtung wirkt und von Punkt zu Punkt umgekehrt, wie der Abstand von seiner Bahn variirt.

479. Da dem obigen zufolge Tr nur noch von der Stärke des betreffenden Stromes abhängt, so kann man diese Grösse zur Messung von Stromstärken verwenden. Die Zahlen, zu denen man so für dieselben gelangt, unterscheiden sich von denen, die das electrostatische Maasssystem finden lässt, und da sie von den magnetischen Wirkungen electrischer Ströme abhängen, so nennt man das Maasssystem, in dem sie ausgedrückt werden, das *Electromagnetische Maasssystem.* Ist i die im electromagnetischen System bestimmte Stromstärke, so hat man

$$3)\qquad Tr = 2i.$$

480. Magnetisches Potential. Ich nehme die Axe des Drahtes zur z Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems und erhalte für die drei Componenten X, Y, Z von T die Werte

$$4)\qquad X = -2i\frac{y}{r^2},\quad Y = 2i\frac{x}{r^2},\quad Z = 0.$$

Daraus folgt

$$5)\qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\left(2i \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C\right).$$

Die magnetische Kraftwirkung eines geraden Stromes hat also ein Potential, aus dem man, wie in frühern Fällen, ihre Componenten durch Differentiation abzuleiten vermag. Das Potential ist aber hier nicht mehr einwertig, es hat für jeden Punkt des Feldes unendlich viele um $4\pi i$ von einander verschiedene Werte. Die Differentialquotienten nach den Coordinatenaxen, also auch die Componenten der Kraftwirkung des Drahtes, sind in jedem Punkte des Feldes eindeutig bestimmte Grössen.

Die Existenz einer Potentialfunction in dem Felde eines electrischen Stromes ist keineswegs ein selbstverständliches Resultat des Princips der Erhaltung der Energie. Jeder electrische Strom giebt nämlich, da er den Widerstand des von ihm durchflossenen Körpers zu überwinden hat, fortwährend electrische Energie der ihn unterhaltenden Batterie aus. Der Schluss, dass ein Teil der Energie der Batterie auch zur Arbeitsleistung an einem Magnete, der sich im Felde des Stromes bewegt, mit verwandt wird, würde sich daher nur rechtfertigen lassen, wenn man den Betrag der von der Batterie zur Ueberwindung des Widerstandes verausgabten Energie genau kennte.

Aus der nachgewiesenen Existenz einer solchen Potentialfunction folgt, dass in der Tat, wenn ein Magnetpol eine den Draht einmal umfassende Bahn zurücklegt, eine Arbeit vom Betrage

$$6_1)\qquad A_1 = 4\pi m i$$

geleistet wird.

Ist die Bahn des Pols immer noch geschlossen, umgiebt sie aber den Draht nicht mehr, so ist die gesammte vom Strom aufgewendete Arbeit

$$6_2)\qquad A_1 = 0.$$

Wir müssen also einstweilen folgern, dass das abgeleitete Kraftgesetz und nicht minder die Existenz des Potentials lediglich in dem von uns beschriebenen Experiment an einem geraden Strom eine Stütze findet.

481. Der Raum, der einen unendlich langen geraden Draht umgiebt, ist zweifach zusammenhängend. Ein aus einer Ebene oder irgend einer Fläche, die im Drahte beginnt und sich nach oben, unten und rechts oder links hin ins Unendliche erstreckt, gebildetes Diaphragma macht ihn einfach zusammenhängend. Nun ist das Potential in einem Punkte des Raumes als das Linienintegral der magnetischen Kraftwirkung des Drahtes genommen von einem fixen Punkte bis zu dem Punkte, für den es bestimmt werden soll, zu definiren. Durchschneidet also der Integrationsweg das Diaphragma nicht, so hat das Potential nur einen bestimmten Wert.

Das Feld ist nunmehr in jeder Beziehung identisch mit dem, welches eine mit dem Diaphragma zusammenfallende Schale hervorbringt, wenn sie zur Stärke i magnetisirt würde. Diese Schale wird einseitig durch eine gerade unendlich lange Kante begrenzt und erstreckt sich sonst überall hin ins Unendliche.

Geschlossene Ströme und magnetische Schalen.

482. Unendlich lange Ströme können natürlich in der Praxis nicht hervorgebracht werden. Hier hat man es immer mit geschlossenen endlichen Strömen zu tun. Demnach haben wir die magnetische Wirkung solcher geschlossener Ströme mit der magnetischer Schalen, die in den Bahnen jener ihre bezüglichen Kanten besitzen, zu vergleichen.

Zahlreiche Experimente, von denen man die frühesten Ampère und die genauesten Weber verdankt, haben das Resultat ergeben, dass ein kleiner, ebener, geschlossener Strom in Entfernungen, die gegen seine Dimensionen als gross zu betrachten sind, magnetisch ganz so, wie ein kleiner mit seiner Axe senkrecht gegen die Stromfläche geneigter Magnet wirkt, dessen magnetisches Moment gleich der vom Strom umflossenen Fläche multiplicirt mit der Stärke des Stromes ist.

Denkt man sich also die vom Strom umkreiste Fläche als substantielles Diaphragma und magnetisirt sie transversal zur Stärke i, so hat man eine magnetische Schale, die die vom Strom umkreiste Fläche einnimmt, von der Strombahn umgrenzt wird und in gegen ihre Dimensionen genügenden Entfernungen magnetisch genau so, wie der Strom selbst wirkt.

483. Die vorausgegangenen Betrachtungen und Folgerungen galten unter Supposition eines sehr kleinen planen Stromkreises. Ich werde sie nun nach einer von Ampère erdachten Methode, die auch sonst wichtige geometrische Anwendungen gestattet, auf einen beliebig geformten und beliebig grossen Stromkreis ausdehnen. Nur der Fall soll noch ausgeschlossen bleiben, wo der Punkt, den der Strom angreift, sich in seiner Bahn selbst befindet.

Sei P der Punkt, auf den der Strom magnetisch wirkt. Wir legen durch die Strombahn eine Fläche S, die von dieser völlig begrenzt wird und den Punkt P nicht in sich birgt. Auf dieser Fläche ziehen wir zwei sich durchkreuzende Systeme von Linien und zerlegen sie dadurch in einzelne Flächenelemente, deren Dimensionen durch genügende Häufung der Linien gegen ihre bezüglichen Abstände von P und gegen die Krümmungsradien der Fläche S beliebig klein gemacht werden können.

Die Begrenzung eines jeden dieser Elemente lassen wir von einem Strome durchfliessen, der bei allen Elementen dieselbe Stärke i wie der ursprüngliche Strom C besitzt, und der alle Elemente in derselben Richtung wie der ursprüngliche Strom die Fläche S umkreist.

Längs jeder Linie, die zwei aneinander stossende Elemente trennt, fliessen dann zwei gleich starke Ströme nach entgegengesetzten Richtungen.

Die Wirkung zweier an derselben Stelle sich befindender, gleich starker entgegengesetzt gerichteter Ströme ist aber, wie die Erfahrung gelehrt hat, in jeder Hinsicht absolut gleich Null. Solche Stromcombinationen bringen auch keine magnetischen Effecte hervor. Demnach bleiben alle aneinanderstossenden Strombahnen ganz wirkungslos, die einzigen Teile unserer

Elementarströme, die in ihren Wirkungen nicht neutralisirt werden, sind diejenigen, welche mit einem Teil ihrer Bahn an die Bahn des ursprünglichen Stromes C stossen. Daraus folgt, dass die Gesammtwirkung aller Elementarströme genau so gross ist, wie die des ursprünglichen Stromes.

484. Jeder dieser Elementarströme kann nun als kleiner, ebener Stromkreis angesehen werden, und bei jedem ist die Entfernung von dem Punkte P gross gegen seine grössten Dimensionen. Seine magnetische Wirkung auf den Punkt P ist also dem früheren zufolge identisch mit der einer seine Fläche ausfüllenden elementaren magnetischen Schale von der Stärke i, deren Kante in seine Umgrenzung fällt. Die einzelnen für die Elementarströme zu substituirenden elementaren magnetischen Schalen setzen sich zu einer endlichen Schale zusammen, deren Fläche mit der Fläche S, deren Kante mit der Strombahn C zusammenfällt, und die zur Stärke i magnetisirt ist, und diese Schale wirkt auf den Punkt P magnetisch genau so, wie der Strom C.

Da für die Construction der Fläche S keine andere Bedingung vorgeschrieben war, als die, dass sie nicht durch den Punkt P gehen sollte, so ist ihre Form ganz willkürlich, sie darf nur keine Risse enthalten. Die magnetische **Wirkung einer Schale ist also von ihrer besondern Gestaltung unabhängig** und wird nur von der Form ihrer begrenzenden Kante bestimmt. Wir haben dieses Resultat auf ganz anderm Wege schon in Art. 410 abgeleitet, es ist aber interessant zu sehen, dass es auch aus Betrachtungen, die dem Electromagnetismus angehören, sich deduciren lässt.

Fassen wir noch einmal alles zusammen: Die magnetische Wirkung eines geschlossenen Stromes auf irgend einen nicht in seiner Bahn befindlichen Punkt ist nach Grösse und Richtung identisch mit der einer Schale, die von der Strombahn begrenzt wird, nicht durch den betrachteten Punkt geht und numerisch zu der Stärke, die der Strom besitzt, magnetisirt ist. Der Definition einer magnetischen Schale entsprechend ist die Magnetisirung senkrecht gegen ihre Fläche gerichtet. Das Zeichen der Magnetisirung ihrer beiden Seiten ergiebt sich aus der folgenden Regel. Steht ein Mann mit seinen Füssen auf der von uns positiv genannten Seite der Schale, also auf der Seite, die nach Norden zu weisen strebt, und sieht er nach dem die Kante der Schale umfliessenden Strom hin, so geht dieser von seiner rechten zu seiner linken Hand.

485. Die vorangehenden Betrachtungen haben umgekehrt auch Giltigkeit für die Ersetzung der Wirkung einer magnetischen Schale durch die eines Stromes, der seine Kante umfliesst, sie hören aber auf, richtig zu sein, wenn der Punkt, der von der Schale angegriffen wird, innerhalb ihrer Substanz liegt.

Bezeichnet ω den körperlichen Winkel, den die Schale im Punkte P bildet und der als positiv oder negativ zu rechnen ist, jenachdem die Schale dem betreffenden Punkte P ihre positive, australe, oder ihre negative, boreale,

Seite zukehrt, so ist, wenn der Punkt P ausserhalb der Schale sich befindet, das Potential in ihm

$$V_e = \omega\varphi,$$

falls φ die Stärke der Schale angiebt.

Liegt er dagegen innerhalb derselben derartig, dass ein durch ihn geführtes Diaphragma die Schale in zwei Lamellen von den bezüglichen Stärken φ_1 und φ_2, wo $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ ist, zerteilt, so ist das Potential in ihm [Art. 412, 2b)]

$$V_i = \omega(\varphi_1 + \varphi_2) - 4\pi\varphi_2.$$

Beim electrischen Strom dagegen ist das magnetische Potential, so lange der Punkt P nicht direct in seiner Bahn selbst liegt, stets gleich

$$V = i\omega,$$

wo i die Stärke des Stromes und ω den körperlichen Winkel, den die Strombahn im Punkte P bildet, angiebt, letzterer als positiv gerechnet, wenn der Strom von P aus gesehen entgegengesetzt wie der Zeiger einer Uhr sich bewegt.

Ferner verläuft das magnetische Potential einer Schale (s. Art. 412) ganz continuirlich, und es hat in jedem Punkte einen und nur einen ganz bestimmten Wert.

Das magnetische Potential eines Stromes ist dagegen, wie schon daraus erhellt, dass die magnetische Schale, die den Strom in seinen Wirkungen soll ersetzen können, ganz beliebig oberhalb oder unterhalb des Punktes, für den das Potential gelten soll, gelegt werden darf, unendlich vieldeutig. Seine einzelnen Werte unterscheiden sich von einander in jedem Punkte um $4\pi i$.

Doch sind die Differentialquotienten des magnetischen Potentials eines Stromes nach den Coordinatenaxen, also auch die Kraftcomponenten seiner magnetischen Wirkung überall eindeutig und bestimmt.

Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein magnetisches Solenoid; Electromagnetische Rotation.

486. Bringt man einen langen biegsamen solenoidal magnetisirten Körper in die Nähe eines geschlossenen Stromes, so wird er seine Enden nach entgegengesetzten Richtungen um die Strombahn herum zu winden streben. Der Magnet wird also, wofern er genügend biegsam ist, schliesslich sich völlig um die Bahn herumgeschlungen haben, und eine diese umgebende und eventuell, wenn er genügend lang ist, in sich zurücklaufende Spirale bilden. Eine solche Spirale würde dann, wenn man Magnete mit nur einem Pole oder solche mit zwei verschieden starken Polen construiren

könnte, sich ohne Aufhören rings um die Strombahn nach einer Richtung bewegen. Tatsächlich vermag man keine solchen Magnete herzustellen, denn wie man auch einen Körper magnetisirt, er bekommt immer zwei und ganz gleich starke Pole. Das Experiment ist also in der beschriebenen Form nicht durchführbar. Indessen hat Faraday gezeigt, wie man wenigstens den einen Pol stets rings um eine Strombahn herum gehen lassen kann, während der andere Pol es nicht tut. Offenbar muss bei einem solchen Versuch der Körper des Magnets bei jedem Umgang von der einen Seite der Bahn zur andern übergeführt werden. Um das unter den gegebenen Bedingungen ohne Unterbrechung des Stromes zu ermöglichen, spaltete Faraday den Strom in zwei Zweige. Oeffnete sich der eine Zweig, um den Magnet durchzulassen, so floss der Strom durch den andern Zweig weiter.

Um diese gleichzeitige Oeffnung und Schliessung zu bewerkstelligen, benutzte er eine kreisförmige mit Quecksilber ausgefüllte Rinne, wie sie in der in Art. 491 gegebenen Figur 24 dargestellt wird. Der Strom tritt durch den Draht AB in die Quecksilberrinne ein und teilt sich bei B in zwei Zweige BRP und BQP. Die beiden Zweige vereinigen sich bei P, fliessen zusammen durch den Draht PO in den Quecksilbernapf O und von da durch den vertical verlaufenden Draht OZ zurück in die Batterie.

Der Magnet ist so befestigt, dass er sich unter dem Einfluss des Stromstückes OZ um eine durch O gehende verticale Axe drehen kann und den Draht PO mit sich herumführt.

Sein Körper geht durch die Oeffnung zwischen der Rinne RQ und der Kuppe O, einer seiner Pole, der Nordpol, liegt unterhalb der Ebene der Rinne, der andere oberhalb derselben. Während der Magnet und mit ihm der Draht um die verticale durch O gehende Axe so rotirt, dass sein Nordpol die Richtung N.O. S.W. einschlägt, führt er den vor ihm fliessenden Strom dem hinter ihm fliessenden zu, und geht dabei bei jeder vollständigen Umdrehung von der einen Seite des geraden ihm parallelen Stromes OZ zu der andern über.

Die Arbeit, die die electromagnetische Kraft des durch die Rinne fliessenden Stromes bei jeder vollständigen Revolution des Magnets leistet, ist, weil der eine Stromteil während der Revolution von 0 bis 2π zunimmt, der andere zugleich von 2π bis 0 abnimmt, beide Stromteile einander entgegenfliessen, und endlich der Stromteil OP mit dem Magnete fest verbunden ist,

$$A = mi(4\pi - \omega - \omega').$$

m bezeichnet die Stärke eines der Pole des Magnets; i die Stärke des Stromes; ω, ω' geben die absoluten Beträge der von der Rinne in den bezüglichen Polen gebildeten körperlichen Winkel.

Magnetische Niveauflächen und Kraftlinien eines linearen Stromes.

487. Eine Vorstellung von dem Zustande des magnetischen Feldes in der Nähe eines Stromkreises verschafft man sich am besten, wenn man wieder die äquipotentiellen Flächen und die Kraftlinien des Feldes construirt. Dazu muss man natürlich den körperlichen Winkel der Strombahn für jeden Punkt dieses Feldes kennen.

Bei einem linearen Strom schneiden sich alle magnetischen Niveauflächen in seiner Bahn. Zwei benachbarte Niveauflächen von den bezüglichen Potentialen ω_1 und ω_2 bilden daselbst Winkel von der Grösse*)

$$\vartheta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}.$$

Ich habe auf der Tafel XIX. einen Querschnitt durch die magnetischen äquipotentiellen Flächen eines Stromes, der in einer Kreisbahn fliesst, gezeichnet.

Die Strombahn durchschneidet die Ebene der Zeichnung senkrecht. ihr Mittelpunkt liegt auf der als ‚Axe' bezeichneten untersten horizontalen Linie. Der blanke mit einem Mittelpunkt versehene Kreis repräsentirt die Schnittfläche zwischen der Ebene der Zeichnung und der Substanz der Strombahn. Die äquipotentiellen Flächen sind Rotationsflächen mit einer gemeinschaftlichen Axe, die durch die als solche bezeichnete unterste horizontale Linie dargestellt wird. Ihre Form ist in Richtung der ‚Axe' abgeflacht. Sie schneiden sich alle in der Strombahn und bilden in unserer Figur, wo 24 solcher Niveauflächen unter Annahme einer constanten Potentialdifferenz von $\pi/6$ gezeichnet sind, daselbst mit einander Winkel von 15°.

Bringt man auf eine dieser Niveauflächen einen Pol, so wird er von einer jedesmal senkrecht gegen diese Fläche geneigten Kraft angegriffen, die in ihrer Grösse umgekehrt wie der Abstand zweier benachbarter

---

*) In Bezug auf einen ihr sehr nahe liegenden Punkt kann die Strombahn wie eine gerade Linie angesehen werden. Nach Art. 480 sind also die körperlichen Winkel der Bahn in den den bezüglichen Niveauflächen ω_1, ω_2 gehörenden einander und der Bahn sehr nahe gelegenen Punkten P_1, P_2

$$\omega_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \omega_2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'}.$$

Legt man den Anfang des Coordinatensystems in den Punkt, wo eine durch die beiden Punkte gehende Ebene die Strombahn in O senkrecht trifft, so wird

$$\frac{\omega_1}{2} = \sphericalangle (P_1 O x), \quad \frac{\omega_2}{2} = \sphericalangle (P_2 O x)$$

also, wie im Text angegeben,

$$P_1 O P_2 = \frac{1}{2} \cdot (\omega_1 - \omega_2).$$

Anm. d. Uebers.

Niveauflächen variirt. In derselben Figur auf Tafel XIX. sind auch die Kraftlinien des Kreisstromes nach einer von W. Thomson in seiner Abhandlung *On Vortex Motion* gegebenen Zeichnung dargestellt. Sie bilden geschlossene, die Bahn des Stromes einfassende Curven. Weiteres findet der Leser in Art. 701.

Action eines electrischen Stromes auf ein magnetisches System.

488. Die Reduction der magnetischen Wirkung eines electrischen Stromes auf einen Pol auf die einer magnetischen Schale, lässt unmittelbar auch die magnetische Wirkung eines solchen Stromes auf ein ganzes magnetisches System berechnen. Man hat zu dem Behufe den Strom durch eine magnetische Schale zu ersetzen, die nach der in Art. 484 gegebenen Regel zur Stärke des Stromes magnetisirt ist und in der Bahn desselben ihre Begrenzung findet. Die Schale kann beliebig geformt sein, sie darf aber durch keinen Teil des magnetischen Systems hindurchgehen. Die Wirkung dieser Schale auf das magnetische System ist völlig identisch mit der des Stromes, der ihre Kante umspült.

Reaction eines magnetischen Systems auf eine magnetische Schale.

489. Aus dem Princip von der Gleichheit zwischen Action und Reaction zweier Agentien folgt, dass die Wirkung eines magnetischen Systems auf einen electrischen Strom genau so gross ist, wie die Wirkung dieses Systems auf eine magnetische Schale, die in der Strombahn ihre Grenze findet und durch keinen Teil des magnetischen Systems hindurchgeht.

Wir haben aber in Art. 419a für die potentielle Energie einer magnetischen Schale von der Stärke φ, die sich in einem magnetischen Felde vom Potential V befindet, den Ausdruck

$$1\text{a)}\qquad M = \varphi \iint \left(l \frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial V}{\partial y} + n \frac{\partial V}{\partial z} \right) dS$$

abgeleitet, wo dS ein Element der Schale angiebt, l, m, n die Richtungscosinusse der zu dS von der positiven Seite der Schale gezogenen Normale sind, und die Integration sich über die ganze Fläche der Schale erstreckt.

Bezeichnet man mit a, b, c die Componenten der magnetischen Induction, so ist

$$2)\qquad N = \iint (la + mb + nc)\, dS$$

der Betrag der magnetischen Induction durch die Schale, oder, in der Aus-

drucksweise Faradays, die Anzahl der magnetischen Inductionslinien, die durch die Schale von der negativen zur positiven Seite derselben hindurchgehen, abzüglich der Anzahl derjenigen magnetischen Inductionslinien, die entgegengesetzt von der positiven Seite zur negativen die Substanz der Schale passiren. Da nun die Schale selbst nicht zu dem magnetischen System, um dessen Wirkung es sich hier handelt, gehören sollte, so ist hier der Begriff der magnetischen Kraft des magnetischen Systems auf die Schale identisch mit dem der magnetischen Induction dieses Systems durch die Schale, wir haben also

$$3)\qquad a=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad b=-\frac{\partial V}{\partial y},\quad c=-\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Die potentielle Energie der Schale, mithin auch die des entsprechenden Stromes, wird hiernach unter dem Einflusse des magnetischen Feldes

$$1\,\mathrm{b})\qquad M=-\varphi N.$$

Daraus lassen sich leicht die Kraftcomponenten X, Y, Z der Wirkung des magnetischen Systems auf die Schale ableiten.

Verschiebt man nämlich die Schale um die Strecke δx, so ist die Kraft, mit welcher das magnetische System sie in der neu angenommenen Lage zu erhalten strebt, nach dem Princip der Erhaltung der Energie

$$X=-\frac{\delta M}{\delta x}.$$

Wir haben also für die Kraftcomponenten die Ausdrücke

$$4\,\mathrm{a})\qquad X=-\frac{\partial M}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial M}{\partial y},\quad Z=-\frac{\partial M}{\partial z};$$

oder

$$4\,\mathrm{b})\qquad X=\varphi\frac{\partial N}{\partial x},\quad Y=\varphi\frac{\partial N}{\partial y},\quad Z=\varphi\frac{\partial N}{\partial z}.$$

Das magnetische System unterstützt die Verschiebung der Schale oder arbeitet ihr entgegen, je nachdem die Zahl N durch die Verschiebung zu- oder abnimmt, d. h., je nachdem die Verschiebung die Anzahl der Inductionslinien, die von der negativen zur positiven Seite der Schale übergehen im Verhältnis zu der der Inductionslinien, die die Schale von der positiven zur negativen Seite passiren, vermehrt oder vermindert.

Verschiebung eines Stromes in einem magnetischen Felde.

Wir haben in den vorangehenden Bemerkungen nur statt des Ausdrucks magnetische Schale electrischer Strom zu setzen, um ihre sämmtlichen Resultate auf die Wirkung eines magnetischen Systems auf einen

solchen Strom zu übertragen. Verschiebt man also einen Strom in einem magnetischen Felde, so findet man in den Kräften dieses Feldes Unterstützung, wenn durch diese Verschiebung dem Strome mehr positive, und Widerstand, wenn ihm mehr negative Inductionslinien dadurch zugeführt werden.

Dabei ist zu beachten (Art. 394), dass eine Inductionslinie in einer positiven Richtung läuft (wie oben kurz gesagt, positiv ist), wenn ein Pol, der dem magnetischen Norden zustrebt, sich auf ihr fortbewegt, und ferner, dass ein Strom von einer Inductionslinie in der positiven Richtung getroffen wird (oder dass ihm eine positive Inductionslinie zugeführt wird), wenn die Richtung dieser Inductionslinie zu der Bewegungsrichtung der Glaselectricität im Strome sich wie die Longitudinalbewegung zu der Rotationsbewegung einer rechtsdrehenden Schraube verhält (Art. 23).

490a. Es ist klar, dass man in dieser Weise für jede beliebige Verschiebung des Stromes als Ganzes die ins Spiel kommenden Kräfte aus der Theorie der magnetischen Schalen deduciren kann. Das ist aber noch nicht alles. Ist ein Teil der Strombahn flexibel, so wird er sich ganz unabhängig von dem Rest derselben für sich zu bewegen vermögen. Man kann aber auch eine Schale, indem man sie in geeigneter Weise zerteilt und durch biegsame Verbindungen wieder zu einem Ganzen zusammenknüpft, so umändern, dass ein Teil ihrer Kante sich unabhängig von dem andern Teil derselben beliebig zu bewegen vermag. Daraus schliessen wir:

I. Wenn durch Verschiebung eines Teiles einer Strombahn die Zahl der durch dieselbe gehenden positiven Inductionslinien des magnetischen Feldes vermehrt wird, so unterstützt das magnetische System diese Verschiebung.

Und weiter:

II. Jeder Teil eines in einem magnetischen Felde befindlichen Stromes wird von einer Kraft angegriffen, die ihn nach der Seite des magnetischen Feldes treibt, wo der Strom, im Verhältnis zu den negativen, mehr positive Inductionslinien einfasst.

III. Die Arbeit, die die magnetische Kraft des Feldes dabei leistet, ist numerisch gleich der algebraischen Anzahl der neu hinzugekommenen Inductionslinien (positive als positiv, negative als negativ verrechnet) multiplicirt mit der Stärke des Stromes.

Grösse und Richtung der Kraft, von der ein Stromelement in einem magnetischen Felde angegriffen wird.

490b. Sei ds ein Element der Bahn, in der ein Strom von der Stärke i fliesst. Verrückt man dasselbe durch eine Strecke δx, so streift es über ein Parallelogramm von den Seiten ds und δx. Bezeichnet aber $\mathfrak{B}$ die magnetische Induction und ε den Winkel, den die Richtung dieser mit der

Normale zum Parallelogramm $\overline{ds, \delta x}$ bildet, so wird $\mathfrak{B}\cos\varepsilon\, \overline{ds, \delta x}$ das durch die Verschiebung von ds hervorgerufene Ansteigen der Grösse N geben, falls man unter $\overline{ds, \delta x}$ den Flächeninhalt des Parallelogramms, über das ds sich bei seiner Bewegung hinwegschiebt, versteht. Da $\mathfrak{B}$ ein Vector ist, so wird $\mathfrak{B}\cos\varepsilon\, \overline{ds, \delta x}$ gleich dem Volumen eines Parallelepipeds werden, dessen drei Kanten nach Grösse und Richtung durch $\delta x, ds, \mathfrak{B}$ repräsentirt sind. Dieses Volumen ist positiv zu rechnen, wenn bei einer Antastung der drei Kanten in der Reihenfolge $\delta x, ds, \mathfrak{B}$ der Taster um die Diagonale des Parallelepipeds sich in Richtung der Zeiger einer Uhr bewegt.

Der numerische Betrag des Volumens ist leicht zu bestimmen. Sei ϑ der Winkel zwischen ds und $\mathfrak{B}$, der Flächeninhalt des Parallelogramms $(ds, \mathfrak{B})$, ist dann $\mathfrak{B}\sin\vartheta\, ds$. Giebt also η den Winkel, den die Verrückung δx mit der Normale jenes Parallelogramms einschliesst, so hat man für das Volumen den Werth $\mathfrak{B}\sin\vartheta\cos\eta\, ds\,\delta x$. Das ist nun einerseits gleich δN und andererseits gleich $X\delta x$, wenn die bei der gedachten Verschiebung ins Spiel kommende Kraft mit X bezeichnet wird, wir haben also

$$1)\qquad \delta N = \mathfrak{B}\sin\vartheta\cos\eta\, ds\,\delta x,$$
$$X\delta x = i\,\delta N = i\mathfrak{B}\sin\vartheta\cos\eta\, ds\,\delta x,$$

mithin

$$2)\qquad X = i\mathfrak{B}\sin\vartheta\cos\eta\, ds,$$

und das ist die in Richtung von δx genommene Componente der Kraft, welche ds sich zu verschieben zwingt.

Die gesammte Kraft, von der ds gedrängt wird, hat die Grösse

$$3)\qquad R = i\mathfrak{B}\sin\vartheta\, ds$$

und ist senkrecht zu dem Parallelogramm $(ds, \mathfrak{B})$, gebildet aus dem Stromelement ds und der magnetischen Induction $\mathfrak{B}$, gerichtet.

Die Grösse $i\mathfrak{B}\sin\vartheta\, ds$ stellt auch die Fläche eines Parallelogramms, dessen Seiten $i\,ds$, bezüglich $\mathfrak{B}$ den Winkel ϑ einfassen, nach Grösse und Sinn dar.

Die ds angreifende Kraft wird also ihrer Grösse nach durch die Fläche des aus dem Stromelement $i\,ds$ und der zur Richtung desselben um ϑ geneigten magnetischen Induction des magnetischen Feldes gebildeten Parallelogramms repräsentirt. Sie wirkt senkrecht zur Ebene des genannten Parallelogramms nach der Richtung, nach welcher eine rechtsdrehende Schraube sich longitudinal verschiebt, wenn ihr Kopf von der Richtung des Stromelements $i\,ds$ zu der der Induction $\mathfrak{B}$ gedreht wird. In der Terminologie der Quaternionen kann man die Grösse und Richtung der Kraft R dadurch fixiren, dass man sagt, diese Kraft sei der Vectorteil des Resultats, welches durch die Multiplication des Vectors $i\,ds$, als des Stromelements, mit dem Vector $\mathfrak{B}$, der magnetischen Induction entsteht.

491. Die Richtung, nach der ein Strom in einem magnetischen Felde angegriffen wird, lässt sich nach einer andern Methode auch durch die

Beziehung, in der die magnetische Wirkung dieses Stromes zu der anderer Ströme oder Magnete steht, eruiren.

Ist nämlich auf einer Seite der Bahn des betreffenden Stromes die magnetische Kraftwirkung desselben ebenso gerichtet wie die anderer Ströme oder Magnete, so wird auf der andern Seite dieses Stromes seine magnetische Kraft in entgegengesetzter oder doch nahezu entgegengesetzter Richtung wirken, wie die der andern Ströme oder Magnete. Die den Strom angreifende Kraft wird also von der Seite, wo seine magnetische Kraft die andern magnetischen Kräfte verstärkt, zu der Seite, wo sie sie abschwächt, gerichtet sein. Fliesst beispielsweise ein Strom in einem magnetischen Felde, das nach Norden gerichtet ist, von oben nach unten, so geht seine magnetische Wirkung auf der westlichen Seite von Süden nach Norden, auf der östlichen von Norden nach Süden. Auf jener Seite verstärkt sie also die magnetische Wirkung des magnetischen Feldes, auf dieser schwächt sie sie. Demzufolge wird unser Strom durch das magnetische Feld von Westen nach Osten angegriffen und eventuell nach Osten gedrängt.

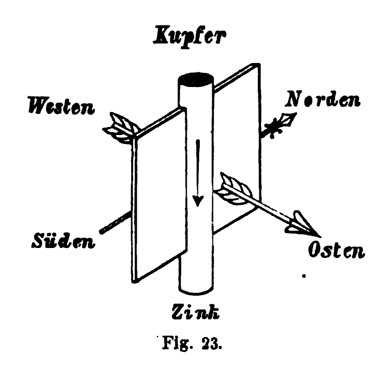


Fig. 23.

Die Figur 23 giebt eine leicht verständliche graphische Darstellung für diesen Fall.

Etwas weiter ausgeführt ist derselbe Fall auf Tafel XVIII. Die magnetische Kraft wirkt überall gleichförmig und von rechts nach links. Der blanke Kreis ist ein Querschnitt der Strombahn. Man sieht, dass unterhalb dieses Kreises die Kraftlinien enger an einander gerückt sind, als oberhalb desselben. Die Strombahn wird also durch die magnetische Kraft des Feldes so gedrängt, dass ihr Querschnitt vom untern Teile der Zeichnung dem obern Teile derselben zustrebt.

Rotation eines Stromteiles in einem magnetischen Felde.

492. Diese Regeln bestimmen völlig die Kraftwirkung, der irgend ein Element eines in einem magnetischen Felde befindlichen Stromes unterliegt.

Lässt man den Strom, nachdem er sich im magnetischen Felde in irgend einer Weise bewegt und beliebige Lagen und Formen angenommen, dabei aber seine Stärke beibehalten hat, in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehren, so wird der gesammte Betrag an Arbeit, den die electromagnetischen Kräfte dabei geleistet haben, sich auf Null reduciren. Das gilt für jeden Cyklus von Bewegungen, wie viele deren der Strom auch durchmacht. Es ist also unmöglich, allein durch electromagnetische Kräfte in einem Teile

eines linearen constanten Stromes eine Rotationsbewegung, welche Widerstände, wie sie etwa Reibung bietet, zu überwinden hat, continuirlich zu unterhalten.

Doch kann man eine unaufhörliche Rotation zu Stande bringen, wenn man an einigen Stellen der Strombahn den Strom von einem Leiter auf einen andern, auf dem er gleitet oder schleift, überführt.

Besitzt nämlich ein Strom eine Gleitstelle, an der sein Leiter über einen festen glatten Körper oder über eine Flüssigkeit hinweggleitet, so kann er nicht mehr als einheitlicher linearer Strom von constanter Stärke betrachtet werden, man muss seine Bahn als aus zwei oder mehreren Zweigen bestehend ansehen, in denen der Strom mit variabeler Stärke so fliesst, dass er in den Zweigen, für die N bei seiner Veränderung anwächst, nach der positiven, in denen, für welche N abnimmt, nach der negativen Richtung geht.

Als Beispiel betrachte ich den der beistehenden Figur 24 zum Vorwurf dienenden und schon anderweitig (in Art. 486) zum Teil behandelten Fall. OP ist ein um O bewegliches Leiterstück, welches mit dem einen Ende in einen Quecksilbernapf O, mit dem andern in die mit O concentrische Quecksilberrinne $BRPQB$ taucht. Der Strom i tritt durch den Draht AB in die Rinne ein, teilt sich daselbst bei B in zwei Teile, deren einer x längs des Bogens BQP fliesst, während der andere y den Weg BRP einschlägt. Bei P vereinigen sich die Partialströme, fliessen zusammen mit der Stärke $x + y = i$ durch den Leiter PO nach O und von da durch die Electrode OZ zum Zinkende der Batterie.

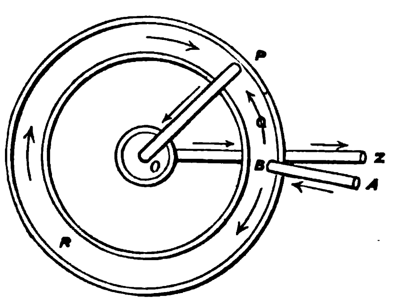


Fig. 24.

Der Gesammtstrom hat bei P eine Gleitstelle und zerfällt in zwei Ströme Der eine $ABQPOZ$ fliesst mit der Stärke x in der positiven Richtung, der andere $ABRPOZ$ fliesst mit der Stärke y nach der negativen Richtung.

Wir nehmen an, dass die Quecksilberrinne sich in einem magnetischen Felde befindet, das so constituirt ist, dass die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ senkrecht zu ihrer Ebene und nach oben gerichtet wirkt. Während das Stromstück OP sich um O entgegengesetzt wie der Zeiger einer Uhr, in der Figur von rechts nach hinten, links, vorn, rechts, durch den Winkel ϑ bewegt, wächst die Fläche, die der erste Partialstrom $ABQPOZ$ umfasst, um die Grösse $PO^2.\vartheta/2$; um dieselbe Grösse nimmt die Fläche des zweiten Partialstromes ab.

Der erste Strom sollte die Stärke x haben, die von ihm bei der gedachten Verschiebung von OP gegen das magnetische Feld geleistete Arbeit ist also nach den Entwickelungen des Art. 490 gleich $\mathfrak{B}.x.OP^2.\vartheta/2$. Der zweite Strom hat bei der Stärke y die entgegengesetzte Richtung wie der

erste, demnach wird die von ihm bei jener Verschiebung geleistete Arbeit gleich $\mathfrak{B}.(-y)(-OP^2.\vartheta)/2$ oder $\mathfrak{B}.y.OP^2.\vartheta/2$ sein. Im ganzen wird also eine Arbeit

$$A=\frac{1}{2}(x+y)\,OP^2.\vartheta.\mathfrak{B}=\frac{1}{2}iOP^2.\vartheta.\mathfrak{B}$$

getan, deren Grösse *caeteris paribus* nur von der Stärke, die der Strom in OP besitzt, abhängt.

Hiernach wird der Arm OP, wenn die Stromstärke i unverändert erhalten wird, von einer Kraft, deren Moment gleich

$$D=\frac{1}{2}iOP^2.\mathfrak{B}$$

ist, ohne Aufhören um die Quecksilberrinne herumgetrieben.

In den nördlichen Breiten der Erde, wo $\mathfrak{B}$ nach unten gerichtet ist, wird OP, wenn der Strom, wie in der Figur 24 angenommen ist, nach dem Centrum hinfliesst, sich in negativer Richtung $PQBRP$ drehen.

Wirkung zweier Ströme aufeinander.

493. Die oben erhaltenen Resultate für die Wirkung zwischen Strömen und Magneten lassen sich nach derselben Methode sofort auch auf die Wirkungen, die zwischen Strömen selbst platzgreifen, ausdehnen.

Einerseits ist nämlich die magnetische Wirkung eines Stromes auf einen Magnet identisch mit der einer durch ihn begrenzten Schale, und andererseits ist die magnetische Wirkung einer Schale auf ein magnetisches System identisch mit der eines die Kante der Schale umspülenden Stromes. Ersetzt man also zwei Ströme durch zwei Schalen, deren Kanten in den bezüglichen Strombahnen liegen, und die zu den bezüglichen Stärken der Ströme nach der in Art. 484 festgesetzten Richtung magnetisirt sind, so ist die Wirkung zwischen den beiden Strömen identisch mit der zwischen den beiden Schalen.

Nach Art. 419b ist aber die potentielle Energie zweier Schalen von den bezüglichen Stärken i_1, i_2 aufeinander

$$i_1 i_2 M=-\,i_1 i_2\int_0^{s_2}\int_0^{s_1}\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds_1\,ds_2,$$

wo ε den Winkel, den die Elemente ds_1, ds_2 ihrer bezüglichen Kanten einschliessen, angiebt, und r die Entfernung dieser Elemente von einander bezeichnet.

Derselbe Ausdruck, aber mit entgegengesetztem Zeichen, wird also auch für die potentielle Energie der beiden Ströme aufeinander gelten, wenn wir unter i_1, i_2 ihre bezüglichen Stärken, unter ds_1, ds_2 Elemente und unter s_1 und s_2 die Längen ihrer bezüglichen Bahnen verstehen.

M kann man als das Potential der beiden Kanten s_1, s_2 aufeinander bezeichnen.

Die Kraft X, welche eine Verschiebung eines der beiden Ströme in Gegenwart des andern nach der Richtung x unterstützt, hat den Wert

$$X = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Aus diesem Resultat lassen sich dann alle Fragen hinsichtlich der Kraftwirkung eines Stromes auf einen Teil eines andern Stromes beantworten.

Zwei unendlich lange gerade Ströme.

494. Die Strombahnen sind parallel. Ich wende diese Methode an zur Bestimmung der Wirkung, die ein unendlich langer gerader Strom auf einen Teil eines andern unendlich langen geraden und ihm parallel laufenden Stromes ausübt.

Fliesst der erste Strom mit der Stärke i vertical von oben nach unten, so lenkt er das nach Norden weisende Ende einer Magnetnadel zur rechten Hand eines Mannes ab, der die Nadel anschaut und mit dem Strome, die Füsse voran, schwimmt.

Die magnetischen Inductionslinien dieses Stromes sind horizontal verlaufende Kreise, deren Mittelpunkte in der Axe der Strombahn liegen. Ihre positive Richtung geht von Norden nach Osten durch Süden nach Westen.

Wir lassen den zweiten Strom ebenfalls vertical von oben nach unten fliessen und legen ihn westlich von dem ersten. An der Stelle, wo dieser zweite Strom sich jetzt befindet, streben die ungestörten Inductionslinien des ersten Stromes dem Norden zu.

Demnach ergiebt sich die Richtung, in der der erste Strom den zweiten angreift, durch die Translationsrichtung einer rechtsdrehenden Schraube, deren Kopf man von der Richtung des zweiten Stromes zu der der Inductionslinien des ersten, also in der Richtung Zenith, Süd, Nadir, Nord dreht.

Da bei einer solchen Drehung die Schraube sich nach Osten schiebt, so wird also die Kraftwirkung des ersten Stromes auf den zweiten in unserm Falle, wo beide Ströme gleiche Richtung verfolgen, gegen den ersten Strom hin gerichtet sein. Also:

Zwei parallele gleichgerichtete Ströme ziehen einander an.

Aehnlich ergiebt sich:

Zwei parallele entgegengerichtete Ströme stossen einander ab.

495. Die Stärke der magnetischen Induction eines unendlich langen geraden Stromes ist nach Art. 479 in einem Abstande r von seiner Axe

$$\mathfrak{B} = 2\frac{i}{r}.$$

Demnach hat die Kraft, mit der ein Teil a des ihm parallelen zweiten Stromes zu ihm zustrebt, den Wert

$$F = 2ii'\frac{a}{r},$$

wo i' die Stärke des zweiten Stromes bezeichnet.

Wir können daraus sofort einen Schluss auf die Dimensionen der electromagnetisch gemessenen Stromstärke schliessen.

a/r ist eine Zahl, F eine Kraft. Mithin stellt das Product zweier Stromstärken eine Kraft dar, und es wird

$$[i] = [F^{\frac{1}{2}}] = [M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}].$$

496. Die Strombahnen sind gegen einander geneigt. Liegen die beiden Ströme immer noch in derselben Ebene, laufen sie aber einander nicht mehr parallel, so gehen wir bei der Bestimmung der Richtung, nach der der eine Strom den andern angreift, bequem von der zweiten in Art. 491 auseinandergesetzten Methode aus. Seien die Bahnen der beiden Ströme unendlich lange, gerade, in einer Horizontalebene gelegene Drähte. Die magnetische Kraft des ersten Stromes wirkt rechts von ihm von oben nach unten, links von unten nach oben. Befindet sich der zweite Strom rechts von dem ersten, so wird auch bei diesem, wenn er dem ersten gleich gerichtet ist, die magnetische Kraft auf der rechten Seite von oben nach unten und auf der linken von unten nach oben wirken. Auf der rechten Seite dieses zweiten Stromes verstärkt also die magnetische Kraft desselben diejenige des ersten Stromes, auf der linken Seite dagegen schwächt sie sie. Der zweite Strom wird hiernach von einer Kraft angegriffen, die ihn von seiner rechten Seite nach seiner linken hindrängt. Die Stärke dieser Kraft hängt nur von der relativen Lage des zweiten Stromes gegen den ersten ab, nicht von seiner absoluten Richtung. Befindet sich der zweite Strom links vom ersten, so wird er von links nach rechts gedrängt. Also:

Fliessen zwei in einer Ebene liegende gegen einander geneigte Ströme nach derselben Richtung, so ziehen sie einander an, fliessen sie nach entgegengesetzten Richtungen, so stossen sie einander ab.

Fliesst der zweite Strom senkrecht vom ersten fort, so wird er in Richtung des ersten Stromes hinabgeschoben, fliesst er senkrecht zu ihm hin, so wird er dem ersten Strom entgegen hinaufgeschoben.

Die zweite hier benutzte Methode zur Bestimmung der Richtung, nach der zwei Ströme einander angreifen, verlangt nicht notwendig, dass man die auseinandergesetzten Beziehungen zwischen Electricität und Magnetismus auch immer im Kopfe habe. Man wird sie auch dann correct anwenden können, wenn man jene Beziehung schon längst vergessen hat, vorausgesetzt, dass man die Grundlage derselben kennt und die Kraftrichtung für jeden einzelnen Strom anzugeben vermag.

Zusammenfassung.

497. Bei den Untersuchungen, die ich in diesem Capitel angestellt habe, bin ich der Methode Faradays gefolgt. Statt wie Ampère, der im nächsten Capitel unser Führer sein soll, mit der Wirkung von einzelnen Stromteilen aufeinander zu beginnen, haben wir erst das magnetische Feld eines ganzen Stromes untersucht, und es als identisch mit dem einer durch ihn begrenzten, in gewisser Weise magnetisirten Schale gefunden. Dann haben wir gesehen, dass ein Strom in einem magnetischen Felde von einer ebenso grossen Kraft, wie eine entsprechende magnetische Schale angegriffen wird, und wir haben auch diese Kraft zu bestimmen gelernt. Endlich haben wir mit Hülfe der vorangehenden Ergebnisse auch die Wirkung zweier Ströme auf einander, oder eines Stromes auf einen Teil eines andern abgeleitet.

498. Ich stelle jetzt die einzelnen Resultate hinsichtlich der Wirkungen der electrischen Ströme, soweit wir sie kennen gelernt haben, zusammen. Der electrische Strom kann aus einer Voltaschen Batterie und einem dazu gehörigen, seine Pole verbindenden Draht, oder aus einer thermoelectrischen Kette, oder aus einer Leydener Flasche, von deren positiver Belegung zu deren negativer eine Leitung führt, bestehen. Er kann überhaupt durch jedes beliebige Arrangement gebildet werden, wenn nur über seine Bahn völlige Klarheit herrscht.

Ein solcher Strom bringt in seiner Umgebung magnetische Kraftwirkungen hervor.

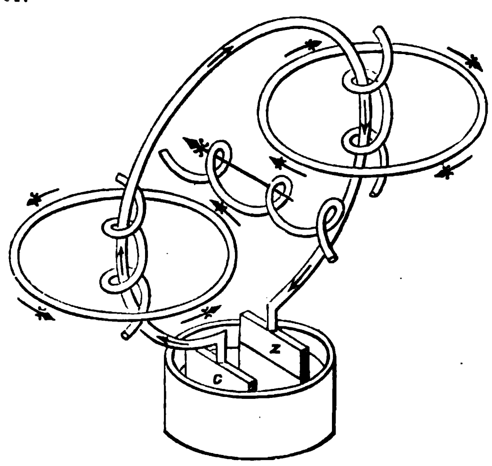


Fig. 25.

Zieht man in der Nähe eines Stromes, der mit der Stärke i fliesst, eine geschlossene Curve und nimmt längs derselben das Linien-Integral der magnetischen Kraftwirkung des Stromes, so wird dieses gleich Null, wenn die betreffende Curve die Strombahn nicht umschlingt, und numerisch

gleich $4\pi i$, wenn der Strom das Gebiet, welches die Curve umgrenzt, einmal durchkreuzt. Das Zeichen des Linienintegrals ist positiv, falls die Richtung, nach der man integrirt, mit der Drehungsrichtung der Zeiger einer Uhr, die auf der Integrationslinie aufliegt und deren Zifferblatt zuerst von der Stromrichtung getroffen wird, übereinstimmt. Geht man auf der Integrationslinie in Richtung der Integration fort, so scheint der Strom, wenn man sich ihm gegenüber befindet, sich in Richtung der Zeiger einer Uhr zu bewegen. Wir können das Zeichen des Linienintegrals noch in anderer Weise bestimmen. Man windet um die Strombahn und um die Integrationslinie in der positiven Richtung beider je eine rechtsdrehende Schraubenlinie. Stehen die Köpfe der Schrauben so gegen einander, dass ihre Axen bei gleichartiger Drehung beider sich nach derselben Stelle hin, bezüglich von derselben Stelle fortbewegen, so ist das Linienintegral positiv. Die auf Seite 187 befindliche Figur 25 wird dem Leser die einzelnen gegebenen Regeln seinem Gedächtnisse besser einprägen helfen.

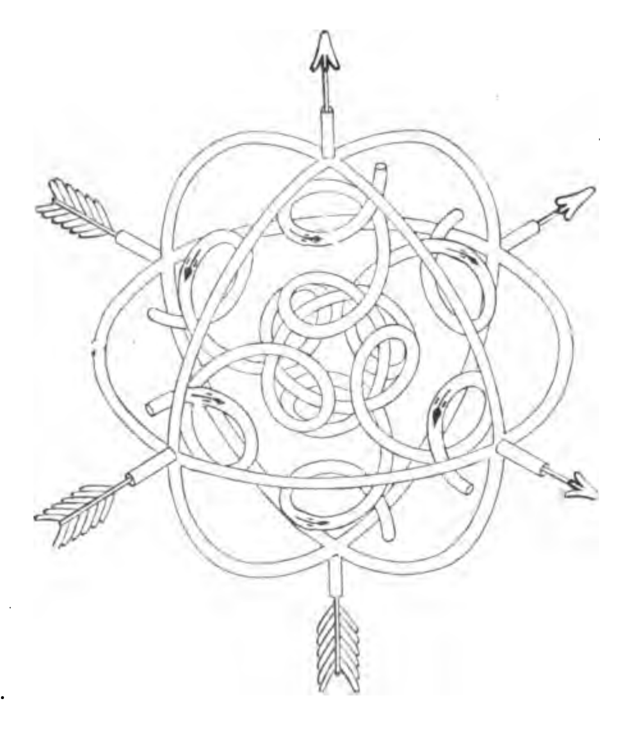


Fig. 26.

In der Figur 26 habe ich zur bildlichen Klarstellung der Beziehungen, in denen die Translations- und Rotationsbewegungen verschiedener, rechtsdrehender Schrauben zu einander stehen, drei solche Schrauben dargestellt,

die bei einer durch die eingezeichneten Pfeile angegebenen Drehung sich in Richtung der positiven Axen eines Coordinatensystems verschieben.

499. Der Betrag des Linienintegrals längs einer geschlossenen Curve, also der Grösse $4\pi i$, hängt nur von der Stärke des Stromes, von nichts anderem ab. Weder die Form, noch die innere Natur der Bahn afficirt ihn, er gilt ebenso gut für metallische wie für electrolytische und unvollständige Leiter. Man hat sogar Grund anzunehmen, dass, wenn Electricität nicht eigentlich durch Leitung, sondern durch Verschiebung, etwa wie sie in dem Glase einer Leydener Flasche während der Ladung und Entladung vor sich geht, fortbewegt wird, sie magnetisch doch genau so wirkt, wie wenn sie einen metallischen Conductor durchflösse. Ferner hängt das Linienintegral $4\pi i$ auch nicht von der Beschaffenheit des Mediums ab, durch das die Integrationscurve führt. Seine Grösse bleibt immer dieselbe, sei es, dass man bei der Integration ganz durch Luft oder auch durch Magnete, durch weiches Eisen oder überhaupt durch irgend eine paramagnetische oder diamagnetische Substanz hindurchkommt. Es ist in jeder Hinsicht die *Periode* des magnetischen Potentials des Stromes.

500. Die gegenseitige Wirkung zwischen einem Strome, der sich in einem magnetischen Felde befindet, und den andern Agentien dieses Feldes wird durch das Flächenintegral der magnetischen Induction erstreckt über eine Fläche, die im Strome ihre Begrenzung findet, bestimmt. Diejenigen Verschiebungen des Stromes oder einzelner Teile von ihm, für welche jenes Flächenintegral zunimmt, werden durch die Wirkungen des magnetischen Feldes unterstützt. Auf den Strom wirkt also eine mechanische Kraft, die ihn selbst oder Teile seiner Bahn so zu verschieben strebt, dass jenes Flächenintegral möglichst gross ausfällt. Bei dieser Verschiebung sucht sich die Strombahn senkrecht zur Stromrichtung zu bewegen und strebt die Inductionslinien des magnetischen Feldes nach einander zu durchschneiden. Zieht man an irgend einer Stelle der Strombahn ein Parallelogramm, dessen Seiten der dort herrschenden Stromrichtung bezüglich Inductionsrichtung parallel verlaufen, und von Punkt zu Punkt der Stromstärke bezüglich der magnetischen Induction proportional variiren, so wird die Kraft, mit der das magnetische Feld an der betreffenden Stelle der Strombahn eine Einheit derselben angreift, numerisch durch den Flächeninhalt dieses Parallelogramms dargestellt. Sie wirkt nach der Translationsrichtung einer rechtsdrehenden Schraube, deren Kopf man von der Richtung des Stromes zu der der magnetischen Induction dreht.

Daraus kann man eine neue, electromagnetische. Definition für die magnetischen Inductionslinien ableiten.

Eine magnetische Inductionslinie ist nämlich diejenige Linie, zu der die Kraftrichtung des betreffenden Feldes auf einen electrischen Strom stets senkrecht steht.

Sie ist auch die Linie, längs deren ein Strom verschoben werden kann, ohne dass seine Bahn dabei von irgend einer Kraft angegriffen wird.

501. Man muss wohl beachten, dass die mechanische Kraft, welche einen stromführenden Leiter durch die Inductionslinien des bezüglichen magnetischen Feldes hindurchdrängt, nicht auf den Strom selbst, sondern auf seinen Träger, seine Bahn, wirkt. Fliesst also ein Strom in einer festen oder flüssigen Scheibe, die sich drehen kann, so wird diese Scheibe jener mechanischen Kraftwirkung wirklich nachgeben und eine drehende Bewegung annehmen, die von einer Lagenänderung des electrischen Stromes begleitet oder auch nicht begleitet sein kann.

Vermag ein electrischer Strom sich selbst seinen Weg durch einen voluminösen Körper oder durch ein Netzwerk aus Drähten zu wählen, so wird er von einer etwa wirkenden constanten magnetischen Kraft nicht dauernd gestört. Es treten eine Anzahl vorübergehender electrischer Phänomene, die man als Inductionsströme bezeichnet, auf, und nachher verteilt sich der Strom genau so durch den Körper oder das Netzwerk, wie wenn eine magnetische Kraft auf ihn überhaupt nicht wirkte.

Auf electrische Ströme selbst wirken nur electromotorische Kräfte, und diese müssen sorgfältig von den mechanischen Kräften, die ihre Bahnen angreifen können, und die den Gegenstand unserer eben absolvirten Untersuchung gebildet haben, getrennt werden.

Cap. II.

Ampères Theorie der Wirkung electrischer Ströme auf einander.

— × —

Zwei Untersuchungsmethoden.

502. Die Methode, nach der wir im vorigen Capitel die mechanische Wirkung zweier electrischer Ströme aufeinander bestimmt haben, basirte auf der Untersuchung des magnetischen Feldes, das ein electrischer Strom in seiner Umgebung hervorruft. Sie ist also eine indirecte. Ampère hat aber fast unmittelbar nach der Veröffentlichung der Oerstedtschen Entdeckung direct die Wirkung electrischer Ströme aufeinander verfolgt, und ich gebe in diesem Capitel die Umrisse auch seiner Theorie.

Ampère geht von der Conception einer Wirkung in die Ferne aus, der wir, wie wir noch (in Art. 846—866) sehen werden, die sehr bemerkenswerthe Fülle von Speculationen und Untersuchungen von Gauss, Weber, den beiden Neumann, Riemann, Kirchhoff, Clausius, Betti, Lorenz u. a. m. zu verdanken haben.

Ich folge dieser Conception nicht, sondern hege die Ansicht, dass alle Wirkung sich durch ein Zwischenmedium in der Weise fortpflanzt, dass sie von einem Theile desselben zu dem unmittelbar daran stossenden übergeht. Es ist dieselbe Hypothese, die schon Faraday vielfach angewendet hat, und die ich in mehreren der Oeffentlichkeit übergebenen Arbeiten mathematisch zu entwickeln und in ihren Consequenzen durch bekannte Tatsachen zu prüfen gesucht habe.

Die Philosophie wird aber aus der eigentümlichen Erscheinung, dass zwei so grundverschiedene, diametrale Ansichten doch zu denselben Resultaten führen, wichtiges Material für erkenntnistheoretische Untersuchungen schöpfen.

Experimentelle Grundlagen der Ampèreschen Theorie.

Methode, Apparate.

503. Die Ampèresche Theorie von der gegenseitigen Wirkung electrischer Ströme beruht auf vier Tatsachen und auf einer Hypothese. Er hat seine fundamentalen Experimente nach der in Art. 214 so genannten Null-Methode zur Vergleichung von Kräften ausgeführt.

Gewöhnlich misst man die Grösse einer Kraft entweder dynamisch dadurch, dass man sie einem bestimmten Körper eine Bewegung mitteilen lässt, oder statisch, indem man ihre Wirkung durch die Schwere eines Körpers oder die Elasticität eines Fadens neutralisirt. Nach der Null-Methode dagegen bewirkt man, dass neben der gegebenen Kraft noch eine zweite Kraft ihrer eignen Art, die also derselben Quelle entspringt, einen an sich im Gleichgewicht befindlichen Körper so angreift, dass er im Gleichgewicht bleibt. Die beiden Kräfte sind dann einander gleich. Ihre Anwendung findet diese Methode ganz besonders da, wo es sich um Vergleichung der Wirkungen handelt, die ein Strom der Reihe nach ausübt, wenn er durch verschieden geformte Bahnen fliesst. Verbindet man diese Bahnen hintereinander zu einer Bahn und hängt in deren Nähe einen Körper auf, so kann man aus der Thatsache, dass der Körper beim Schliessen und Oeffnen des Stromes sich in keiner Weise bewegt, und weil der Strom in allen Punkten seiner Bahn fast zu derselben Zeit anhebt und aufhört, folgern, dass die von den einzelnen Leiterteilen auf den Körper etwa ausgeübten Kraftwirkungen sich gegenseitig neutralisiren.

504. Als indicirendes Instrument des jedesmaligen Nulleffects diente Ampère eine besonders construirte bewegliche Drahtcombination, die unter dem Namen der *Ampèreschen Wage* bekannt ist. Ein Draht ist, wie der rechte Teil c der Figur 27 andeutet, so geformt, dass er zwei gleich grosse einander parallele in derselben oder in parallelen Ebenen gelegene Flächenstücke umgiebt, die von einem den Draht durchfliessenden Strom in entgegengesetzten Richtungen umkreist werden. Seine beiden Enden werden senkrecht unter einander nach unten gebogen und tauchen in Quecksilbernäpfen, die mit den bezüglichen Polen einer Batterie in der in Figur 27 bezeichneten Weise in Verbindung stehen. Die ganze Drahtcombination kann sich um die durch die Näpfe gehende Axe drehen. Diese Anordnung der Strombahn ist geboten, wenn man die Wirkung, die der Erdmagnetismus sonst auf sie ausüben würde, unschädlich machen will. Wir haben nämlich im vorigen Capitel gesehen, dass ein in einem magnetischen Felde befindlicher Strom, wenn er nicht daran gehindert wird, sich stets so stellt, dass er die möglichst grösste Anzahl von Inductionslinien umfasst. Nun bringt der Erdmagnetismus ein magnetisches Feld hervor, dessen Inductionslinien von Süden nach Norden gehen. Ein vertical aufgehängter Strom wird sich also so drehen, dass seine Ebene in der Ost-West-

Ebene zu liegen kommt, und er seine positive Electricität dem scheinbaren Lauf der Sonne entgegen führt. Die durch die oben angegebene Biegung der Strombahn in zwei, gleiche, parallele Flächen nach entgegengesetzten Richtungen umkreisende Bahnen, liefert also eine Stromcombination, die in keiner Weise den Wirkungen des Erdmagnetismus unterliegt. Man bezeichnet diese Combination als eine *Astatische*. Selbstverständlich ist sie nur dann astatisch, wenn ihre Componenten von derselben Kraft mit genau derselben Stärke angegriffen werden. Ist aber die Quelle der betreffenden Kraft der Combination so nahe, dass ihre Wirkung die eine Componente stärker als die andere attaquirt, so wird die ganze Strombahn sich bewegen.

Experimente.

505. Erstes Experiment. Ampères erstes Experiment bezieht sich auf die Wirkung, die zwei einander sehr nahe gelegene gleich starke Ströme auf seinen astatischen Strom ausüben, wenn sie einander gerade entgegenfliessen. Er bedeckte einen Draht mit einer isolirenden Hülle, bog ihn dann um und brachte ihn in die Nähe des einen Stromes seiner Wage. Lässt man durch die Wage und den Draht in der in der Figur 27 a, c angegebenen Weise Ströme laufen, so bleibt die Lage der Wage ganz un-

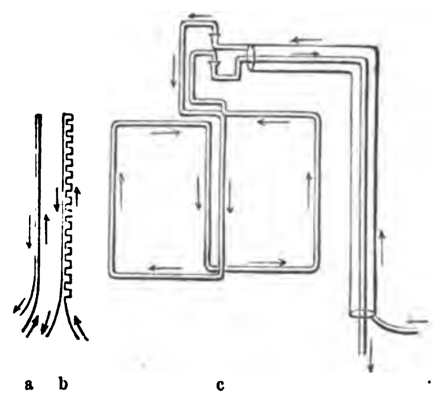


Fig. 27.

geändert. Da der Draht den Strom einmal nach oben und unmittelbar daneben nach unten leitet, so folgt aus der Tatsache, dass die Wage sich in keiner Weise bewegt.

Zwei einander sehr nahe gelegene, gleich starke, aber entgegengesetzt verlaufende Ströme neutralisiren ihre Wirkungen auf einen andern Strom.

Die Neutralisirung findet hier nicht ganz vollständig statt, weil die beiden Ströme nicht genau an derselben Stelle liegen. Bringt man aber

einen isolirten Draht in die Axe einer metallischen Röhre und lässt einen Strom aus der Batterie in den Draht und aus dem Draht durch die Röhre zurück in die Batterie fliessen, so ist die Wirkung dieses Stromes ausserhalb der Röhre nicht blos approximativ, sondern vollständig gleich Null (s. Art. 683). Diese Tatsache hat ausser ihrer Bedeutung für die Theorie auch eine hohe Wichtigkeit für die Praxis, denn sie ermöglicht bei electrischen Apparaten, etwa Galvanometern, die stromzu- und abführenden Drähte gegen einander so zu orientiren, dass der Strom auf seinem Hinwege zum betreffenden Apparat und auf seinem Rückwege von demselben gar keine electromagnetischen Wirkungen ausübt. Für die Praxis genügt es im allgemeinen, wenn man die zuleitenden Drähte mit den ableitenden zusammenbindet. Geht die Strombahn an sehr empfindlichen Teilen des Apparates vorbei, so wird man sie daselbst aus einer Röhre und einem im Innern der Röhre befindlichen Draht herstellen. Immer muss man aber dafür sorgen, dass die zuleitende Bahn von der ableitenden völlig isolirt ist.

506. Zweites Experiment. Im zweiten Experiment bog Ampère die eine Hälfte seines Drahtes kreuz und quer, so dass sie die Form eines Kammes annahm (Fig. 27 b); die Zähne waren aber so kurz gehalten, dass sie sich nur wenig von der andern, geraden Hälfte, des Drahtes entfernten. Ein Strom, der aus der Batterie durch den gezahnten Draht nach dem geraden und durch diesen in die Batterie zurückfloss, übte auch jetzt noch nicht die geringste Wirkung auf einen durch die Wage sich bewegenden Strom aus. Daraus folgt, dass ein Strom, der längs den Rändern der Zähne eines gezahnten Drahtes fliesst, genau so wirkt, wie ein Strom, der durch die Verbindungslinie der einzelnen Zähne hindurchgeht, vorausgesetzt, dass die Zähne gehörig kurz gehalten sind.

Ein kleines Element eines Stromkreises ist also in seinen electromagnetischen Wirkungen durch zwei oder mehr Componenten ersetzbar. Zwischen den Wirkungen des Stromelements und denen seiner Componenten findet dieselbe Beziehung wie zwischen einer Verschiebung oder einer Geschwindigkeit und den bezüglichen Componenten dieser Grössen statt.

507. Drittes Experiment. Beim dritten Experiment maass Ampère den electromagnetischen Effect nicht an der astatischen Wage, sondern an einer Strombahn, die sich in Richtung ihrer Länge, und nur in dieser, bewegen konnte. Sind die Stellen, wo der Strom in den genannten Leiter ein- bezüglich aus demselben austritt, im Raume fixirt, so zeigt sich, dass kein in seiner Nähe befindlicher geschlossener Strom ihn zu bewegen im Stande ist.

Fig. 28 zeigt das Arrangement des angegriffenen Leiters. Die Strombahn ist ein Teil eines Drahtkreises, ein Drahtbogen. Sie ist an einer Stange befestigt, die ihrerseits mit einem Gerüst in Verbindung steht und sich um eine verticale Axe drehen kann. Die Ebene des Drahtbogens ist horizontal gerichtet, der Mittelpunkt des Kreises, aus dem er herausgeschnitten ist, liegt in der Drehungsaxe des Halters. Unterhalb des

Drahtbogens befinden sich zwei Rinnen, die so weit mit Quecksilber gefüllt werden, bis dieses Metall den Draht berührt. Damit der Draht nicht durch das Quecksilber angegriffen wird, stellt man ihn aus Kupfer her und amalgamirt ihn sorgfältig. Verbindet man jetzt die Quecksilberrinnen mit den bezüglichen Polen einer Batterie, so wird der Teil des Drahtbogens, der zwischen den Rinnen liegt, von einem Strome durchflossen.

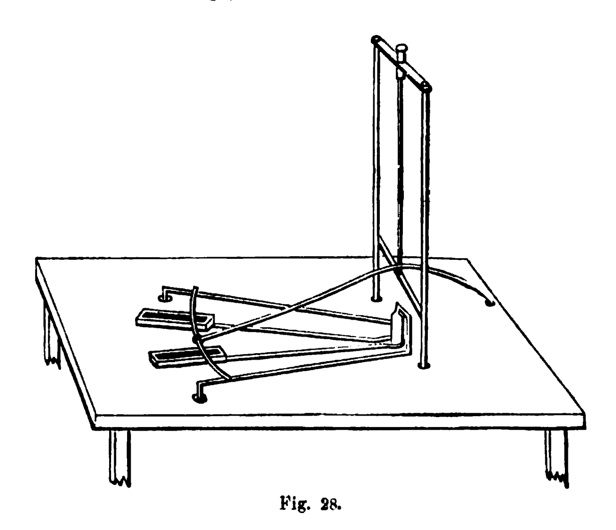


Fig. 28.

Wie man nunmehr dem Draht auch geschlossene Ströme oder Magnete nähern mag, man bemerkt an ihm, trotzdem er sich um die verticale Drehungsaxe seines Halters, also in Richtung seiner Länge, mit beträchtlicher Freiheit bewegen kann, doch nicht die geringste Tendenz zu einer solchen Bewegung.

508. Viertes Experiment. Im letzten Experiment verwendet Ampère wieder seine astatische Wage. Er lässt sie von zwei astatischen Stromkreisen, deren jeder ihrem Stromkreise ähnlich ist, angreifen. Die Dimensionen des einen Kreises C sind n mal grösser, die des andern A sind n mal kleiner als die des Kreises der Wage. Die Kreise sind auf entgegengesetzten Seiten der Bahn B der Wage zu dieser ähnlich gelegen, der Kreis C steht von B n mal weiter als der Kreis A ab. Lässt man jetzt durch die Wage und die beiden Kreise Ströme so fliessen, dass sie in A und C dieselbe Richtung haben, in B aber ebenso wie in A und C oder entgegengesetzt wie in diesen gerichtet sind, so zeigt sich, dass unter den angegebenen Bedingungen für die relativen Dimensionen und relativen Abstände der drei Ströme A, B, C der Strom B unter der Einwirkung von A und C — welche Form auch die drei Strombahnen A, B, C haben, und wie gross, bezüglich wie klein auch ihre absoluten Abstände von einander sein mögen — sich völlig im Gleichgewicht befindet.

Wir benutzen diese Tatsache, um mit Hilfe der drei andern schon angeführten Experimente das Gesetz, dem die Wirkung zweier Stromelemente auf einander folgt, abzuleiten.

Dabei setzen wir voraus, dass die Wirkung voller Ströme auf einander sich aus der ihrer einzelnen Elemente zusammensetzt.

Seien in Fig. 29 A_1, B_1, C_1 entsprechende Elemente der drei Ströme A, B, C; A_2, B_2, C_2 andere ebenfalls entsprechende in andern Teilen der bezüglichen Ströme befindliche Elemente derselben. B_1 liegt dann gegen A_2 ähnlich wie C_1 gegen B_2, Abstand und Dimensionen sind aber bei C_1

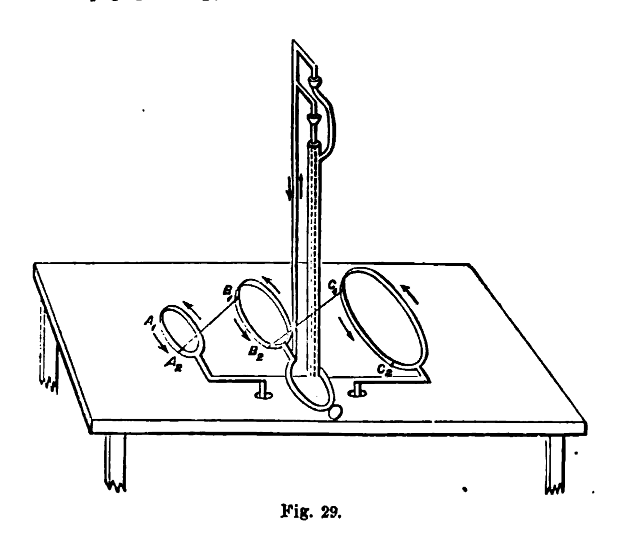


Fig. 29.

und B_2 nach unserer Festsetzung n mal so gross, wie bei B_1 und A_2. Sei das Gesetz, nach dem electromagnetische Kräfte zwischen zwei Stromelementen wirken, eine Function der Entfernung zwischen den betreffenden Stromelementen, wir haben dann für

die Kraftwirkung zwischen B_1 und A_2

$$F = B_1 . A_2 . f(\overline{B_1 A_2})\, a . b,$$

die Kraftwirkung zwischen C_1 und B_2

$$F' = C_1 . B_2 . f(\overline{C_1 B_2})\, c . b,$$

wo a, b, c die Stärken der in den Bahnen A, B, C fliessenden Ströme angeben.

Nun ist

$$C_1 = n B_1, \quad B_2 = n A_2, \quad \overline{C_1 B_2} = n \overline{B_1 A_2}, \quad a = c.$$

Also wird auch

$$F' = n^2 B_1 . A_2 . f(\overline{n B_1 A_2})\, a . b.$$

Das Experiment zeigt an, dass die Strombahn B sich unter der Einwirkung der Ströme A und C nicht bewegt, es wird also

$$F = F'$$

zu setzen sein, und man erhält

$$n^2 f(n.\overline{A_2 B_1}) = f(\overline{A_2 B_1}),$$

eine solche Gleichung kann für alle Werte des n nur bestehen, wenn die Kraftwirkung zwischen zwei Stromelementen dem Quadrate ihrer Entfernung von einander umgekehrt proportional variirt.

Uebergang von der Wirkung geschlossener Ströme aufeinander auf die von Stromelementen.

509. Zur Würdigung der durch diese Experimente gelieferten Tatsachen hebe ich hervor, dass überall, wo Electricität sich bewegt, sie in geschlossenen Bahnen strömt. Für die von Ampère benutzten Ströme gilt das schon deshalb, weil sie von einer Voltaschen Batterie geliefert wurden, deren Ströme bekanntlich stets in sich zurücklaufen.

Bringt man Electricität dadurch in Bewegung, dass man sie von einem Conductor zu einem andern in einem Funken überspringen lässt, so könnte man vielleicht vermuten, nunmehr einen offenen Strom vor sich zu haben.

Allein nach den in diesem Werke adoptirten, vorzugsweise in den Artt. 59 bis 62 auseinandergesetzten Ansichten ist auch dieser Strom geschlossen.

Man hat bis jetzt noch kein einziges Experiment über die gegenseitige Einwirkung zweier nicht geschlossener Ströme angestellt, man besitzt also auch noch keine experimentelle Grundlage für die gegenseitige Wirkung von Stromelementen aufeinander.

Es ist wahr, man kann einen Teil eines Stromes für sich beweglich machen und zusehen, in welcher Weise dieser Teil durch andere Ströme angegriffen wird. Allein diese andern Ströme bilden zusammen mit dem beweglichen Stromteil notwendig geschlossene Ströme, schliesslich ist also auch hier das Endresultat des Experiments die Wirkung eines oder mehrerer geschlossener Ströme auf einen ganzen Strom oder auf einen Teil eines solchen.

510. Für die analytische Behandlung der Erscheinungen wird man indessen die Kraftwirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Element seines eignen Kreises oder der anderer Ströme als die Resultante einer Anzahl von Kräften, die von den Einzelwirkungen der Teile des betreffenden Stromes herrühren, betrachten dürfen.

Rein mathematisch angewendet ist diese Zerlegung der Gesammtkraft eines Stromes in eine Summe von auf seine Elemente sich beziehende Einzelkräfte völlig gerechtfertigt, gleichgiltig, ob jede dieser Einkelkräfte für sich allein tatsächlich zu wirken vermag oder nicht.

Ableitung des Ampèreschen Gesetzes.

Analytische Beziehungen zwischen Linienelementen im Raume.

511. Ich schicke einige rein analytisch-geometrische Betrachtungen über die Beziehungen zwischen zwei im Raume irgendwie gelegenen Linienelementen, die später als Stromelemente angesehen werden sollen, voraus.

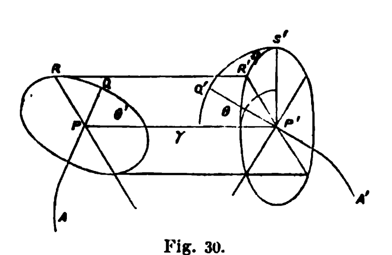


Fig. 30.

Es seien im Raume zwei Curven AQ, $A'Q'$ und auf jeder derselben ein fester Punkt A, A' gegeben, von dem aus man die Bogenlänge der betreffenden Curve rechnet.

PQ, $P'Q'$ mögen zwei den bezüglichen Curven zugehörige Elemente bezeichnen. Ich setze

$$AP = s, \quad A'P' = s';$$
$$PQ = ds, \quad P'Q' = ds', \quad (ds, ds') = \varepsilon;$$
$$PP' = r, \quad P'PQ = \vartheta, \quad PP'Q' = \vartheta';$$

Winkel zwischen den Ebenen $P'PQ$ und $PP'Q'$ gleich η.

Die relative Lage der beiden Elemente ds, ds' ist durch die vier letztgenannten Grössen $r, \vartheta, \vartheta', \eta$ völlig bestimmt, denn wenn dieselben einmal fixirt sind, so ist es ebenso gut, wie wenn die beiden Elemente mit einander ganz starr verbunden wären.

512. Ich zeige jetzt, wie man die Cosinusse der vier Winkel ϑ, ϑ', η, ε durch gewisse Functionen der Differentialquotienten von r nach s und s' auszudrücken vermag.

Führt man ein System rechtwinkliger Coordinaten ein, bezeichnet mit x, y, z die Coordinaten von P, mit x', y', z' die von P' und nennt l, m, n die Richtungscosinusse von PQ und l', m', n' die von $P'Q'$, so ist

$$\frac{dx}{ds} = l, \quad \frac{dy}{ds} = m, \quad \frac{dz}{ds} = n, \tag{1}$$

$$\frac{dx'}{ds'} = l', \quad \frac{dy'}{ds'} = m', \quad \frac{dz'}{ds'} = n', \tag{2}$$

$$l(x' - x) + m(y' - y) + n(z' - z) = r\cos\vartheta, \tag{3}$$

$$l'(x' - x) + m'(y' - y) + n'(z' - z) = -r\cos\vartheta', \tag{4}$$

$$ll' + mm' + nn' = \cos\varepsilon, \tag{5}$$

$$\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta - \cos\vartheta\cos\vartheta' = \cos\varepsilon, \tag{6}$$

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \tag{7}$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich

$$r\frac{\partial r}{\partial s} = -(x'-x)\frac{dx}{ds} - (y'-y)\frac{dy}{ds} - (z'-z)\frac{dz}{ds},$$

also nach den Gleichungen 1) und 3)

$$r\frac{\partial r}{\partial s} = -r\cos\vartheta.$$

Analog erhält man aus 7)

$$r\frac{\partial r}{\partial s'} = (x'-x)\frac{dx'}{ds'} + (y'-y)\frac{dy'}{ds} + (z'-z)\frac{dz'}{ds},$$

damit aus 2) und 4)

$$r\frac{\partial r}{\partial s'} = -r\cos\vartheta',$$

woraus sich $\cos\vartheta$ und $\cos\vartheta'$ bestimmen.

Differenzirt man ferner $r\partial r/\partial s$ nach s', so resultirt

$$r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} + \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} = -\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}$$

$$= -(ll' + mm' + nn').$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung der Gleichungen 5) und 6)

$$\cos\vartheta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \tag{8}$$

$$\cos\vartheta' = -\frac{\partial r}{\partial s'}, \tag{9}$$

$$\cos\varepsilon = -r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}, \tag{10}$$

$$\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta = -r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}. \tag{11}$$

Kraftwirkung zwischen zwei Stromelementen.

513. Berücksichtigung der beiden ersten Experimente. Wir wollen nun annehmen, dass die beiden Elemente ds, ds' Strömen von den bezüglichen Stärken i, i' angehören und untersuchen, wie sich mathematisch betrachtet ihre Wirkung auf einander auffassen lässt. Dabei gehen wir zunächst von der Ansicht aus, dass diese Wirkung nicht notwendig in Richtung der Verbindung der beiden Elemente geschieht.

Nach den Ergebnissen des zweiten Experiments darf man jedes Stromelement in andere Elemente zerlegen, deren Grösse man so zu wählen hat, dass sie, nach den für Vectoren geltenden Regeln zusammengesetzt, das ursprüngliche Stromelement als Resultante finden lassen. Ich betrachte also das Stromelement ds als aus zwei Stromelementen α und β zusammengesetzt, deren erstes α in Richtung von r liegt und

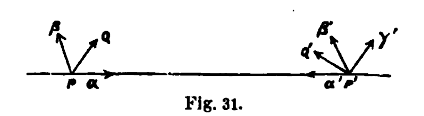


Fig. 31.

$$\cos\vartheta\, ds = \alpha$$

zur Grösse hat, deren zweites β in der Ebene $P'PQ$ liegt, zu r senkrecht steht und von der Grösse

$$\sin\vartheta\, ds = \beta$$

ist.

Das Stromelement ds' soll als Resultirende dreier Stromelemente

$$\cos\vartheta'\, ds' = \alpha',$$
$$\cos\eta \sin\vartheta'\, ds' = \beta',$$
$$\sin\eta \sin\vartheta'\, ds' = \gamma'$$

angesehen werden. Das erste α' fällt in die Linie r, läuft aber dem Element α entgegen; das zweite β' liegt mit dem Element β in der Ebene $PP'Q$, ist diesem parallel und wird nach derselben Richtung wie dieses gemessen; das dritte γ' endlich steht senkrecht zu den beiden vorangehenden.

Die Gesammtwirkung der Stromelemente ds, ds' auf einander sehen wir als Resultante der Einzelwirkungen ihrer oben fixirten Componenten an.

1) α und α' liegen in derselben Geraden r, daher wird auch ihre Wirkung auf einander dieser Geraden folgen. Sie bestehe in einer Anziehung

$$\mathrm{A} = A\alpha\alpha' i i',$$

wo A eine Function von r bezeichnet. Man sieht, dass A mit i und mit i' sein Zeichen wechselt, der für diese Kraft angenommene Ausdruck genügt also dem ersten Experiment.

2) β und β' laufen einander parallel und stehen senkrecht zu r. Ich setze ihre Wirkung auf einander

$$\mathrm{B} = B\beta\beta' i i'.$$

Die Richtung von B wird offenbar in der Ebene, die β und β' enthält, verlaufen, und da diese Kraft sich in keiner Weise ändert, wenn man die Ströme in β und β' zugleich umkehrt, so kann kein Teil ihrer Wirkung in Richtung von β oder β' fallen. B wirkt also in Richtung der die beiden Elemente β und β' verbindenden Linie r. Ein positiver Wert soll anzeigen, dass diese Kraft die Elemente β und β' zu einander hinzieht.

3) β und γ' stehen zu einander und zu der Linie r senkrecht. Diese beiden Elemente könnten also einander nur mit Kräftepaaren angreifen,

und da wir vorläufig nur die Kräfte in Betracht ziehen, lassen wir sie aus der Berechnung fort.

4) Die Wirkung von α und β' auf einander muss, wenn sie existirt, dem Gesetze

$$\Gamma = C\alpha\beta' ii'$$

folgen. Sie wechselt ihr Zeichen, wenn β' umgekehrt wird, sie besteht also entweder in einer Anziehung bezüglich Abstossung in Richtung von β' oder in einem Kräftepaar, das in der Ebene von α und β' gelegen ist. Da, wie schon bemerkt, Kräftepaare für jetzt nicht den Gegenstand unserer Betrachtung bilden, nehmen wir die erstere Alternative an. Γ soll also eine Kraft sein, die α in Richtung von β' auf β' ausübt.

5) α' und β wirken auf einander ähnlich wie α und β', aber, weil α' dem α entgegengerichtet ist, entgegengesetzt wie diese Elemente. Demnach ist

$$\Gamma' = -C\alpha'\beta\, ii'.$$

6) Die letzte Kraftwirkung ist die zwischen α und γ' und da γ' zu α genau so gelegen ist wie β', so werden wir für diese Kraftwirkung den Wert

$$\Gamma'' = C\alpha\gamma' ii'$$

haben.

514. Ziehen wir die sechs Componenten nach den Richtungen, denen ihre Wirkungen folgen, zusammen, so ergiebt sich die Kraftwirkung von ds' auf ds als Resultirende der drei Componenten

$$1)\qquad \begin{aligned} X &= ii'(A\alpha\alpha' + B\beta\beta') && \text{in Richtung von } r,\\ Y &= ii'(C\alpha\beta' - C\beta\alpha') && \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\ \beta,\\ Z &= ii'\ C\alpha\gamma' && \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\ \gamma'. \end{aligned}$$

Wir können jetzt dieselbe Kraftwirkung auch nach irgend welchen drei andern Richtungen zerlegen. Es sei die Kraftwirkung von ds' auf ds die Resultirende der drei Kräfte

$$\begin{aligned} &R\, ii'\, ds\, ds' && \text{in Richtung von } r,\\ &S\, ii'\, ds\, ds' && \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\ ds,\\ &S'\, ii'\, ds\, ds' && \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\ ds'. \end{aligned}$$

Ersetzen wir in den Ausdrücken für X, Y, Z, die α, α', β, β', γ' durch ihre bezüglichen Werte in ds, ds', ϑ, ϑ', η und folgen bekannten Regeln, so erhalten wir

$$2a)\qquad \begin{aligned} R &= \ A\cos\vartheta\cos\vartheta' + B\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\eta,\\ S &= -C\cos\vartheta',\\ S' &= \ C\cos\vartheta, \end{aligned}$$

oder, indem man von den in Art. 512 abgeleiteten Gleichungen 8) bis 10) Gebrauch macht,

$$R = A\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - Br\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

2b) $$S = C\frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$S' = -C\frac{\partial r}{\partial s},$$

oder endlich, wenn man l, m, n; l', m', n', die Richtungscosinusse der bezüglichen Stromelemente, einführt,

$$R = -\frac{A+B}{r^2}(l\xi + m\eta + n\zeta)(l'\xi + m'\eta + n'\zeta) + B(ll' + mm' + nn'),$$

2c) $$S = \frac{C}{r}(l'\xi + m'\eta + n'\zeta),$$

$$S' = \frac{C}{r}(l\xi + m\eta + n\zeta),$$

wo

$$\xi = x' - x,\ \eta = y' - y,\ \zeta = z' - z.$$

515. Wir können auch die Componenten der Kraftwirkung des Elements ds' auf ds nach den Coordinatenaxen berechnen. Sind diese Componenten $ii'\Xi\, ds\, ds'$, $ii'\mathrm{H}\, ds\, ds'$, $ii'Z\, ds\, ds'$, so haben wir

3') $$\Xi = ii'\left\{R\frac{\xi}{r} + Sl + S'l'\right\}.$$

Ersetzt man R, S, S' durch ihre unter 2c) gegebenen Werte und beachtet die Beziehung

$$l'\xi + m'\eta + n'\zeta = r\frac{\partial r}{\partial s'},$$

so resultirt

3a) $$\begin{aligned}\Xi = &- l\left\{(A+B)\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s'}\xi\xi - C\frac{\partial r}{\partial s'} - (B+C)\frac{l'\xi}{r}\right\}\\ &- m\left\{(A+B)\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s'}\xi\eta - C\frac{l'\eta}{r} - B\frac{m'\xi}{r}\right\}\\ &- n\left\{(A+B)\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s'}\xi\zeta - C\frac{l'\zeta}{r} - B\frac{n'\xi}{r}\right\}.\end{aligned}$$

Darin sind A, B, C Functionen von r allein. Ich setze

$$P = \int_r^\infty (A+B)\frac{1}{r^2}dr,\quad Q = \int_r^\infty C\,dr$$

und erhalte

$$(A+B)\frac{1}{r^2} = -\frac{dP}{dr},\quad C = -\frac{dQ}{dr},$$

mithin

$$
\begin{aligned}
\text{3b)} \qquad \Xi = \; & l \left\{\frac{\partial P}{\partial s'}\xi\xi - \frac{\partial Q}{\partial s'} \quad + (B + C)\,\frac{l'\xi}{r}\right\} \\
& + m \left\{\frac{\partial P}{\partial s'}\xi\eta - \frac{\partial Q}{\partial r}\frac{l'\eta}{r} + \qquad B\,\frac{m'\xi}{r}\right\} \\
& + n \left\{\frac{\partial P}{\partial s'}\xi\zeta - \frac{\partial Q}{\partial r}\frac{l'\zeta}{r} + \qquad B\,\frac{n'\xi}{r}\right\}.
\end{aligned}
$$

Entsprechende Gleichungen gelten für H, Z.

516. Berücksichtigung des dritten Experiments. Die Functionen A, B, C bestimmen sich durch die beschriebenen Ampèreschen Experimente, und da wir es in diesen nicht mit Stromelementen, sondern mit endlichen Strömen zu tun haben, so müssen wir mit Hülfe obiger Entwickelungen erst die Kraftwirkungen zwischen endlichen Stromstücken eruiren.

Die Strombahn s erstreckt sich vom Punkte A, für den $s = 0$ ist, bis zum Punkt P, wo s den Wert s haben mag. Die Strombahn s' erstreckt sich vom Punkte A', wo $s' = 0$ ist, bis zum Punkte P', wo s' den Wert s' haben mag. Die Punkte dieser Strombahnen können als Functionen von s bezüglich s' betrachtet werden, ich benutze daher das Symbol

$$F_{(s,0)} = F_P - F_A,$$

um den Ueberschuss des Wertes, den eine Function F, die von der Lage des Punktes P abhängt, im Punkte P über dem, den sie im Punkte A hat, auszudrücken.

Solche Functionen $F_{(s,0)}$ verschwinden notwendig, wenn die Strombahnen geschlossen sind.

Seien die Componenten der gesammten Kraft, mit der das Stromstück $A'P'$ das Stromstück AP angreift, $ii'X$, $ii'Y$, $ii'Z$. Die der x Axe parallele Kraftwirkung von ds' auf ds ist dann

$$ii'\Xi\,ds\,ds' = ii'\frac{\partial^2 X}{\partial s\,\partial s'}\,ds\,ds'.$$

Das dritte Ampèresche Experiment lehrt, dass die Kraft eines geschlossenen Stromes s' auf ein Stromelement ds stets senkrecht zu diesem Stromelement ds wirkt. In Richtung dieses Stromelements ist sie gleich Null. Verlegen wir demnach die xAxe in Richtung von ds und nennen $ii'(\partial\overline{X}/\partial s)ds$ die Kraftwirkung des Stromes s' auf das Stromelement ds genommen für die Richtung dieses Stromelements, so müssen wir nach den Ergebnissen des citirten Experiments

$$ii'\frac{\partial\overline{X}}{\partial s}\,ds = 0$$

haben.

Es ist aber [Art. 515, 3b)]

$$\frac{\partial^2 \overline{X}}{\partial s \partial s'} = \frac{\partial P}{\partial s'}\xi^2 - \frac{\partial Q}{\partial s'} + (B+C)\frac{l'\xi}{r},$$

mithin nach partieller Integration

$$\frac{\partial \overline{X}}{\partial s} = (P\xi^2 - Q)_{(s',0)} - \int_0^{s'} (2Pr - B - C)\frac{l'\xi}{r}\,ds'.$$

Da der Strom s' geschlossen sein sollte, so verschwindet das erste auf der rechten Seite der Gleichung stehende Glied für sich, es bleibt

$$\int_0^{s'} (2Pr - B - C)\frac{l'\xi}{r}\,ds' = 0.$$

Allgemein kann diese Gleichung nur bestehen, wenn

1) $$2Pr - B - C = 0$$

wird. Das dritte Experiment lehrt also, dass

2a) $$\int_r^{\infty} (A+B)\frac{dr}{r^2} = \frac{B+C}{2r}$$

oder

2b) $$\frac{A+B}{r^2} = \frac{B+C}{2r^2} - \frac{1}{2r}\frac{d(B+C)}{dr}$$

sein muss.

517. Darstellung der Kraftcomponenten als vollständige Differentialquotienten. Die Ausdrücke für die Componenten Ξ, H, Z oder $\partial^2 X/\partial s \partial s'$, $\partial^2 Y/\partial s \partial s'$, $\partial^2 Z/\partial s \partial s'$ lassen sich so umformen, dass sie als zweite Differentialquotienten nach s und s' erscheinen.

Zunächst ist nach Art. 515, 3')

$$\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial s'} = R\,\frac{\xi}{r} + lS + l'S'.$$

Es war aber

$$R = A\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - Br\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'},$$

oder

$$R = (A+B)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - B\cos\varepsilon.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\text{a)} \qquad \rho = \frac{1}{2}\int_r^\infty (B - C)\, dr$$

und beachtet die Beziehung

$$\text{b)} \qquad Q = \int_r^\infty C\, dr,$$

so wird nach der Gleichung 2b) des Art. 516

$$\text{c)} \qquad (A + B) = r\frac{d^2}{dr^2}(Q + \rho) - \frac{d}{dr}(Q + \rho).$$

Ferner hat man

$$\text{d)} \qquad B = -\frac{d\rho}{dr} - \frac{d}{dr}(Q + \rho),$$

also wird

$$\text{1)} \qquad \begin{aligned} R &= -\frac{d\rho}{dr}\cos\varepsilon + r\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial s'}(Q + \rho), \\ S &= -\frac{\partial Q}{\partial s'}, \\ S' &= \frac{\partial Q}{\partial s}. \end{aligned}$$

Aus der für $\partial^2 X/\partial s\partial s'$ angegebenen Gleichung 3') des Art. 515 resultirt dann

$$\text{2a)} \qquad \Xi = \frac{\partial^2 X}{\partial s\,\partial s'} = -\cos\varepsilon\frac{d\rho}{dr}\frac{\xi}{r} + \xi\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial s'}(Q + \rho) - l\frac{\partial Q}{\partial s'} + l'\frac{\partial Q}{\partial s},$$

oder

$$\text{2b)} \qquad \Xi = \frac{\partial^2 X}{\partial s\,\partial s'} = \cos\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial^2\xi(Q + \rho)}{\partial s\,\partial s'} + l\frac{\partial\rho}{\partial s'} - l'\frac{\partial\rho}{\partial s}.$$

518. Ich führe sechs neue Grössen F, G, H; F', G', H' ein, die durch die folgenden Gleichungen definirt sind,

$$3_1) \qquad F = \int_0^s l\rho\, ds, \quad G = \int_0^s m\rho\, ds, \quad H = \int_0^s n\rho\, ds;$$

$$4_1) \qquad F' = \int_0^{s'} l'\rho\, ds', \quad G = \int_0^{s'} m'\rho\, ds', \quad H = \int_0^{s'} n'\rho\, ds'.$$

Ihrer Definition entsprechend, haben diese sechs Grössen in jedem Punkte des Raumes endliche eindeutig bestimmte Werte. Sie sind für geschlossene Ströme die Componenten ihrer Vector-Potentiale.

Ferner mache ich

$$\text{e)} \qquad L = \int_0^r r\,(Q+\rho)\,dr,$$

$$5_1) \qquad M = \int_0^s \int_0^{s'} \rho \cos\varepsilon\, ds\, ds'.$$

Nun ist

$$\cos\varepsilon \frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial s'} \int_0^s \int_0^{s'} \cos\varepsilon \frac{\partial\rho}{\partial x}\, ds\, ds',$$

ferner, weil $\xi/r = -\partial r/\partial x$ ist,

$$\xi(Q+\rho) = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^r r(Q+\rho)\,dr,$$

endlich haben wir noch

$$l\frac{\partial\rho}{\partial s'} = \frac{\partial l\rho}{\partial s'} = \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial s'}\int_0^s l\rho\, ds,$$

$$l'\frac{\partial\rho}{\partial s} = \frac{\partial l'\rho}{\partial s} = \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial s'}\int_0^{s'} l'\rho\, ds'.$$

Wir erhalten also

$$\text{2c)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial s\,\partial s'} &= \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial s'}\left\{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x} + F - F'\right\}, \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial s\,\partial s'} &= \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial s'}\left\{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial y} + G - G'\right\}, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial s\,\partial s'} &= \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial s'}\left\{\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial L}{\partial z} + H - H'\right\}. \end{aligned}$$

M ist bei geschlossenen Strömen gleich dem Potential derselben auf einander.

Wirkung eines Stromes auf ein Stromelement.

519. Ersetzt man in der Gleichung 3b) des Art. 515 den Differential-

quotienten $\partial P/\partial s'$ durch einen aus Gleichung 1) in Art. 516 folgenden Wert

$$\frac{\partial P}{\partial s'} = \frac{\partial \frac{B+C}{2r}}{\partial s'},$$

so resultirt

$$\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial s'} = \xi(\xi l + \eta m + \zeta n)\frac{\partial \frac{B+C}{2r}}{\partial s'} - l\frac{\partial Q}{\partial s'} + \frac{C}{r} l'(l\xi + m\eta + n\zeta)$$
$$+ \xi(ll' + mm' + nn')\frac{B}{r}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial s'} = l', \quad \frac{\partial \eta}{\partial s'} = m', \quad \frac{\partial \zeta}{\partial s'} = n', \quad \frac{\partial l}{\partial s'} = \frac{\partial m}{\partial s'} = \frac{\partial n}{\partial s'} = 0,$$

mithin

$$\frac{\partial \xi(l\xi + m\eta + n\zeta)}{\partial s'} = l'(\xi l + \eta m + \zeta n) + \xi(ll' + mm' + nn').$$

Also

$$\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial s'} = \frac{\partial}{\partial s'}\left\{\xi(l\xi + m\eta + n\zeta)\frac{B+C}{2r} - lQ\right\}$$
$$+ m\frac{B-C}{2r}(m'\xi - l'\eta) + n\frac{B-C}{2r}(n'\xi - l'\zeta).$$

Daraus folgt für die in Richtung der x Axe wirkende Kraft eines Stromes s' auf ein Stromelement ds

$$i i'\frac{\partial X}{\partial s}ds = i i' ds\left\{\xi(l\xi + m\eta + n\zeta)\frac{B+C}{2r} - lQ\right\}_{(s',0)}$$
$$+ m i i' ds\int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{m'\xi - l'\eta}{r}ds' + n i i' ds\int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{n'\xi - l'\zeta}{r}ds'.$$

Setzt man

$$\alpha' = \int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{n'\eta - m'\zeta}{r}ds',$$

1)
$$\beta' = \int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{l'\zeta - n'\xi}{r}ds',$$

$$\gamma' = \int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{m'\xi - l'\eta}{r}ds',$$

so ergiebt sich

$$\frac{\partial X}{\partial s}=\left\{\xi(\xi l+\eta m+\zeta n)\frac{B+C}{2r}-lQ\right\}_{(s',0)}+m\gamma'-n\beta',$$

2) $$\frac{\partial Y}{\partial s}=\left\{\eta(\xi l+\eta m+\zeta n)\frac{B+C}{2r}-mQ\right\}_{(s',0)}+n\alpha'-l\gamma',$$

$$\frac{\partial Z}{\partial s}=\left\{\zeta(\xi l+\eta m+\zeta n)\frac{B+C}{2r}-nQ\right\}_{(s',0)}+l\beta'-m\alpha'.$$

Für einen geschlossenen Strom s' verschwindet in jeder dieser Gleichungen das erste, auf der rechten Seite stehende Glied, und es wird

$$\frac{\partial X}{\partial s}=m\gamma'-n\beta',$$

2_1a) $$\frac{\partial Y}{\partial s}=n\alpha'-l\gamma',$$

$$\frac{\partial Z}{\partial s}=l\beta'-m\alpha'.$$

Die Grössen α', β', γ' heissen oft die *Determinanten des Stromes* s' in Bezug auf die Stelle (x, y, z), wo das Stromelement ds des Stromes s sich befindet. Ihre Resultante

3) $$D'=\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}$$

nennt Ampère die *Directrix* der Electrodynamischen Wirkung eines Stromes auf ein Stromelement.

Sind λ', μ', ν' die Richtungcosinusse dieser Directrix, so hat man

4) $$\alpha'=D'\lambda',\quad \beta'=D'\mu',\quad \gamma'=D'\nu',$$

also

$$\frac{\partial X}{\partial s}=D'(m\nu'-n\mu'),$$

2_1b) $$\frac{\partial Y}{\partial s}=D'(n\lambda'-l\nu'),$$

$$\frac{\partial Z}{\partial s}=D'(l\mu'-m\lambda').$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke bezüglich mit l, m, n, so wird

5) $$l\frac{\partial X}{\partial s}+n\frac{\partial Y}{\partial s}+n\frac{\partial Z}{\partial s}=0.$$

Der geschlossene Strom s' wirkt also senkrecht zum Stromelement ds.

Multiplicirt man ferner dieselben Ausdrücke mit λ', μ', ν', so erhält man auch

$$6)\qquad \lambda'\frac{\partial X}{\partial s}+\mu'\frac{\partial Y}{\partial s}+\nu'\frac{\partial Z}{\partial s}=0.$$

Der geschlossene Strom wirkt also auch senkrecht zur Directrix.

Endlich haben wir die Gesammtwirkung des geschlossenen Stromes s' auf das Stromelement ds

$$7)\qquad R=ii'ds D'\sqrt{(m\nu'-n\mu')^2+(n\lambda'-l\nu')^2+(l\mu'-m\lambda')^2}.$$

Fassen wir alles zusammen, so ergeben diese Untersuchungen den Satz:

Ein geschlossener Strom wirkt auf ein Stromelement senkrecht zu der durch dieses Element und die Directrix des Stromes gelegten Ebene. Die Stärke seiner Wirkung ist gleich dem Producte seiner Intensität in die Intensität des Stromelements multiplicirt mit dem Flächeninhalt des aus dem Stromelement und der Directrix construirten Parallelogramms.

Kraftwirkung zweier geschlossener Ströme auf einander.

520. Bei der Bestimmung der Kraftwirkung, die zwischen zwei geschlossenen Strömen platz greift, gehe ich von den in Art. 518 unter 2c) gegebenen Ausdrücken für die Kraftcomponenten zwischen zwei Stromelementen aus.

Aus einer Integration nach s zwischen A und P und nach s' zwischen A' und P' resultirt

$$X=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(L_{PP'}-L_{AP'}-L_{A'P}+L_{AA'}\right)$$
$$+F_{P'}-F_{A'}-F'_P+F'_A.$$

Die Indices der L geben die bezüglichen Werte von r an, von denen die bezüglichen L abhängen; die Indices der F' und F zeigen die bezüglichen Punkte an, auf deren Lagen die Werte der betreffenden Functionen sich beziehen. Ich schreibe

$$a)\qquad F'_P-F'_A=F'_{P-A},\quad F_{P'}-F_{A'}=F_{P'-A'}$$

und

$$b)\qquad L_{PP'}-L_{AP'}=L_{P'(P-A)},\quad L_{A'P}-L_{AA'}=L_{A'(P-A)}$$

und habe

$$
1)\qquad
\begin{aligned}
X &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(L_{P'(P-A)} - L_{A'(P-A)}\right) + F_{P'-A'} - F'_{P-A},\\
Y &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(L_{P'(P-A)} - L_{A'(P-A)}\right) + G_{P'-A'} - G'_{P-A},\\
Z &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(L_{P'(P-A)} - L_{A'(P-A)}\right) + H_{P'-A'} - H'_{P-A}.
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen bezüglich mit dx, dy, dz und addirt, so resultirt unter Benutzung des Symbols D für eine vollständige Differentiation

$$
2)\qquad
\begin{aligned}
X dx + Y dy + Z dz = DM - D\left(L_{P'(P-A)} - L_{A'(P-A)}\right)&\\
- (F' dx + G' dy + H' dz)_{P-A}&\\
+ (F dx + G dy + H dz)_{P'-A'}&.
\end{aligned}
$$

Die beiden ersten Glieder sind vollständige Differentiale, die beiden letzten aber im allgemeinen nicht, darnach ist die Grösse $Xdx + Ydy + Zdz$ für zwei nicht geschlossene Ströme kein vollständiges Differential.

521. Sind beide Ströme geschlossen, so wird

$$
F'_{P-A} = F_{P'-A'} = G'_{P-A} = G_{P'-A'} = H'_{P-A} = H_{P'-A'} = 0,
$$
$$
L_{P'(P-A)} = L_{A'(P-A)} = 0,
$$

und man hat erstens

$$
1_1)\qquad
\begin{aligned}
X &= \frac{\partial M}{\partial x},\\
Y &= \frac{\partial M}{\partial y},\\
Z &= \frac{\partial M}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

und zweitens

$$
2_1)\qquad X dx + Y dy + Z dz = DM.
$$

Die Grösse M ist das Potential zweier Ströme auf einander, deren jeder mit der Intensität Eins fliesst. Sie bezeichnet die Arbeit, die von den electromagnetischen Kräften an einem der beiden Ströme geleistet wird, wenn man diesen aus der Unendlichkeit bis zu der Position, die er gerade inne hat, parallel mit sich selbst hinführt.

Jede Verschiebung eines der Ströme, die eine Vergrösserung von M nach sich zieht, wird von den electromagnetischen Kräften unterstützt.

Ich habe zwar bei der Definition von M als Arbeitsgrösse hervorgehoben, dass der Strom parallel mit sich selbst aus der Unendlichkeit in seine Lage hingeführt werden soll. Man kann aber, wie in den Art. 490 und 596, nachweisen, dass auch in dem Falle, wo der Strom nicht parallel mit sich selbst bewegt wird, die Componenten der ihn angreifenden

electromagnetischen Kräfte immer noch durch die Variation von M, dem Potential des einen Stromes auf den andern, zu berechnen ist.

522. Alle bisherigen Resultate basiren auf den in seinen drei ersten Experimenten von Ampère eruirten Tatsachen. Davon sagen die beiden ersten aus, dass die electromagnetischen Kräfte von Stromelementen auf einander sich wie Vectorgrössen verhalten, das dritte drückt eine bestimmte physikalische Tatsache aus, dass nämlich die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement stets senkrecht zu letzterem verläuft. Abgesehen von dem dritten Experiment, beruht also unsere ganze bisherige Untersuchung auf rein mathematischen Betrachtungen über die Beziehungen, in denen Linien im Raume zu einander stehen. Daraus folgt, dass dieselbe sich weit klarer und bündiger muss führen lassen, wenn man von den Lehren und Symbolen des Teiles der Mathematik Gebrauch macht, der eben speciell dem Ausdrucke geometrischer Beziehungen angepasst ist, ich meine des Hamiltonschen Quaternionencalculs.

Eine derartige Umarbeitung der ursprünglichen Ampèreschen Untersuchung hat Tait in dem *Quarterly Mathematical Journal*, 1866 und in seinem Lehrbuche über Quaternionen § 399 vorgenommen. Der Leser wird leicht nach den Anleitungen, die ihm die Specialwerke über Hamiltons Calcul geben, auch die hier etwas allgemeiner geführten Untersuchungen derselben Methode anpassen können.

Berücksichtigung des vierten Experiments.

523. Von den drei Grössen A, B, C wissen wir bis jetzt nur, dass sie der in Art. 516 unter 2b) gegebenen Gleichung genügen und Functionen von r sind. Wir wenden nun das vierte Ampèresche Experiment an, um den Charakter dieser Functionen, soweit es möglich ist, aufzudecken. Dieses vierte Experiment hat uns (s. Art. 508) gelehrt, dass Aenderungen in einem System von zwei Strömen, bei denen alle linearen Dimensionen und Abstände in demselben Verhältnis variiren, ohne dass dabei die Stromstärken alterirt werden, die Kraftwirkung dieser beiden Ströme auf einander in keiner Weise afficirt.

Die Kraft, mit der zwei Ströme von der Intensität Eins einander in Richtung der x Axe angreifen, ist nach Artikel 521 gleich $\partial M/\partial x$. Diese Kraftwirkung soll nun dem obigen zufolge von den absoluten Dimensionen und Entfernungen der beiden Ströme unabhängig sein, $\partial M/\partial x$ muss also eine Zahl sein. Hiernach kann M nur die Dimensionen einer Linie haben. Es ist aber dieses Potential der beiden geschlossenen Ströme auf einander nach Art. 517. 5)

$$M = \int_0^{s'}\int_0^{s} \rho \cos\varepsilon \, ds\, ds',$$

also wird ρ das Reciproke einer Linie sein.

Da nun nach Art. 517, a)

$$\rho = \frac{1}{2}\int_r^\infty (B - C)\, dr$$

ist, so hat $B - C$ die reciproken Dimensionen des Quadrats einer Linie. Nun sind B und C beide Functionen von r, es muss also $B - C$ entweder direct das Reciproke des Quadrats von r sein oder sich von diesem durch einen Zahlencoefficienten unterscheiden.

524. Das allgemeinere ist natürlich das letztere, setzen wir also

$$B - C = \frac{2\mathfrak{a}}{r^2},$$

so ist $\mathfrak{a}$ eine Zahl und es wird

$$\rho = \frac{\mathfrak{a}}{r},$$

also

$$M = \mathfrak{a}\int_0^{s'}\int_0^{s} \frac{1}{r} \cos\varepsilon\, ds ds.$$

Die Zahl $\mathfrak{a}$ hängt von dem Maasssystem, das wir zur Anwendung bringen, ab. Benutzen wir das electromagnetische Maasssystem, das mit dem für magnetische Messungen etablirten Systeme übereinstimmt, so muss unser M mit dem in Art. 419b unter 3) für das Potential zweier magnetischer Schalen von den Stärken Eins gegebenen bis auf das Zeichen übereinkommen. Wir haben also in diesem electromagnetische Maasssystem

$$1)\qquad M = \int_0^{s'}\int_0^{s} \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds',$$

demnach $\mathfrak{a} = 1$ und

$$B - C = \frac{2}{r^2}, \quad \rho = \frac{1}{r}.$$

525. Nach Berücksichtigung aller vier Ampèreschen Experimente sind die allgemeinsten Ausdrücke für die Componenten der Anziehung zweier Stromelemente ds', ds auf einander.

$$2)\qquad R = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'}\right) i i' ds ds' + r\frac{\partial^2 Q}{\partial s \partial s'} i i' ds ds'$$

in Richtung von r

$$3)\qquad S = -\frac{\partial Q}{\partial s'} i i' ds ds'$$

in Richtung von ds,

4) $$S' = \frac{\partial Q}{\partial s} ii' ds ds'$$

in Richtung von ds'.

Darin ist

$$Q = \int_r^\infty C\, dr$$

gesetzt. Die Form der Function C ist unbekannt, man weiss nur, dass Q eine Function von r ist ohne angeben zu können, welcher Art sie ist.

Verschiedene Annahmen zur Elimination der letzten unbekannten Function.

526. Die Grösse Q lässt sich durch Experimente, in denen der angreifende Strom geschlossen ist, nicht ohne besondere Hypothesen eruiren.

Ampère nimmt an, dass zwei Stromelemente auf einander immer in Richtung ihrer Verbindungslinie wirken. Demnach werden S und S' verschwinden, und das giebt

1) $$Q = \text{Const.}$$

Zwei Stromelemente ziehen sich also in Richtung ihrer Verbindungslinie mit der Kraft

2) $$R = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) ii' ds ds'$$

an.

Ampère hat seine Untersuchungen lange vor Aufstellung des electromagnetischen Maasssystems geführt. In der Formel

$$R = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}\right) jj' ds ds',$$

die er als Schlussresultat giebt, sind also die Stromstärken j, j' electrodynamisch gemessen, während sie in der Formel 2) in electromagnetischen Einheiten ausgedrückt sind. Soll unsere Formel mit der Ampèreschen coincidiren, so haben wir

$$jj' = 2ii'$$

also

$$j = i\sqrt{2}$$

zu setzen.

Ein Einheitsstrom im electromagnetischen Maasse ist demnach im Verhältnis von $\sqrt{2}$ zu 1 stärker als ein Einheitsstrom im electrodynamischen Maasse.

Der einzige Grund, den die electrodynamische Einheit für ihre Berechtigung anzuführen vermag, ist der, dass sie von Ampère, von dem Entdecker des Gesetzes, dem die Wirkung zweier Ströme auf einander folgt, ursprünglich adoptirt worden ist. Indessen ist das Mitschleppen der $\sqrt{2}$, wenn man sich jenes Gesetzes bei Berechnungen bedient, sehr unbequem. Demgegenüber hat das electromagnetische Maasssystem den grossen Vorteil, dass es die Formeln in der Lehre vom Electromagnetismus numerisch genau den in der Lehre vom Magnetismus entsprechen lässt. Da es ferner für den Lernenden nicht leicht zu behalten ist, wann er mit $\sqrt{2}$ zu multipliciren, und wann er mit dieser Grösse zu dividiren hat, so werde ich in diesem Werke fortan nur das electromagnetische Maasssystem, das ja auch Weber adoptirt hat und das sich auch die meisten Schriftsteller zu eigen gemacht haben. berücksichtigen.

Bis jetzt ist es bei keinem Experiment, wo immer mindestens ein Strom geschlossen ist, nötig gewesen, die Form und den Wert von Q selbst zu kennen. Wir dürfen daher für Q irgend einen Wert annehmen, der unsere Formeln vereinfacht.

Ampère setzt, wie wir gesehen haben,

$$1_1)\qquad Q = 0;$$

$$2_1)\qquad R = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right),\quad S = 0,\quad S' = 0.$$

Grassmann*) nimmt an, dass zwei Stromelemente, wenn sie in derselben Linie liegen, auf einander keine Wirkung ausüben, darnach würde sein

$$1_2)\qquad Q = -\frac{1}{2r};$$

$$2_2)\qquad R = -\frac{3}{2r}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},\quad S = -\frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial s'},\quad S' = \frac{1}{2r^2}\frac{\partial r}{\partial s}.$$

Eine andere Annahme ist die, dass zwei Elemente in bestimmter Entfernung einander proportional dem Cosinus des Winkels, der von ihren bezüglichen Richtungen eingefasst wird, anziehen.

Man hat dann

$$1_3)\qquad Q = -\frac{1}{r};$$

$$2_3)\qquad R = \frac{1}{r^2}\cos\varepsilon,\quad S = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s'},\quad S' = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}.$$

Endlich kann man auch noch von der Voraussetzung ausgehen, dass die directe Attraction und die in Richtung der Stromelemente wirkenden Kräfte

*) *Pogg. Ann.* Bd. 64 (1845), p. 1.

nur von den Winkeln abhängen, welche die bezüglichen Elemente mit der sie verbindenden Linie bilden. In diesem Falle ist

$$1_4)\qquad Q = -\frac{2}{r};$$

$$2_4)\qquad R = -\frac{3}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'},\quad S = -\frac{2}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s'},\quad S' = \frac{2}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}.$$

527. Ohne Zweifel ist von den vier genannten Annahmen die Ampèresche die beste, weil nach ihr allein die beiden Elemente mit gleichen und entgegen gerichteten Kräften wirken, und weil zugleich die Wirkung zwischen ihnen in Richtung der sie verbindenden Geraden vor sich geht.

Cap. III.

Induction der electrischen Ströme.

Ampère und Faraday.

528. Oerstedts Entdeckung, dass ein electrischer Strom magnetische Wirkungen ausübt, führte durch eine Reihe directer Schlüsse zu der weitern Entdeckung, dass electrische Ströme das Vermögen zu magnetisiren haben, und ferner, dass sie auf einander mechanische Kräfte ausüben können. Indessen sind die Bedingungen, unter denen eine magneto-electrische Induction stattfindet, von Faraday, nachdem er sich eine Zeitlang abmühte, electrische Ströme durch magnetische oder electrische Wirkungen hervorzubringen, erst im Jahre 1831 aufgefunden worden. In seinen Untersuchungen hat Faraday stets die Methode befolgt, einerseits die Richtigkeit seiner Ansichten und Ideen durch das Experiment zu prüfen und andererseits sich durch Experimente direct zu weitern Ueberlegungen führen zu lassen. Daraus erklärt sich, dass er in seinen Veröffentlichungen seinen Ideen einen Ausdruck verleiht, der sich ganz besonders einer entstehenden Wissenschaft anpasst. In der Tat entfernt sich auch seine Schreibweise beträchtlich von der der Physiker, die wie Ampère dazu berufen waren, ihre Ideen in mathematische Form zu kleiden.

Ampères Untersuchungen, durch die er die Gesetze der mechanischen Wirkung electrischer Ströme auf einander begründete, gehören zu den glänzendsten Taten, die je in der Wissenschaft vollbracht worden sind. Theorie und Experiment scheinen in voller Macht und Ausbildung dem Hirn des ‚Newton der Electricität' entsprungen zu sein. Seine Schrift ist in der Form vollendet, in der Präcision des Ausdrucks unerreichbar, und ihre Bilance besteht in einer Formel, aus der man alle Phänomene, die die Electricität bietet, abzuleiten vermag, und die in allen Zeiten als Cardinal-Formel der Electrodynamik bestehen bleiben wird.

Obgleich er nun bei seinen Auseinandersetzungen der inductiven Methode folgt, so gestattet er uns doch keinen Einblick in die Werkstatt seiner

Gedanken. Wir sehen nicht, wie sich bei ihm selbst Schluss an Schluss gereiht hat, und können kaum glauben, dass Ampère sein Gesetz wirklich mit Hilfe der Experimente ergründet hat, die er uns beschreibt. Wir müssen vermuten — und er erzählt es sogar selbst*) — dass er sein Gesetz auf einem andern Wege, von dem er uns nichts mitteilt, entdeckt hat, und dass er dann, als er für dasselbe einen vollständigen Beweis aufbaute, vom Gerüst, das ihm zur Aufrichtung seines Gebäudes diente, alle Spuren entfernt hat.

Ganz anders verfährt Faraday. Er berichtet von seinen erfolglosen Versuchen nicht minder wie von den erfolgreichen, er teilt seine noch rohen Vorstellungen ebenso wie seine schon ausgebildeten mit. Deshalb fühlt der Leser, wenn er ihn auch an inductiver Kraft bei weitem nicht erreicht, doch mehr Sympathie als Bewunderung für den Forscher, und er wird fast zu dem Glauben verleitet, dass er selbst, wenn ihm nur die Gelegenheit geboten würde, auch ein solcher Entdecker werden könnte.

Der Studirende soll Ampères Schrift lesen, um an einem glänzenden Vorbild zu lernen, wie man bei der Begründung und dem Ausbau einer Entdeckung zu verfahren hat. Er soll aber auch, wenn er seinen wissenschaftlichen Geist bilden will, Faradays Untersuchungen eifrig studiren, denn, indem ihn der Verfasser in die Geschichte seiner Entdeckung und in seinen Ideengang einführt, fordert er ihn zur Kritik des Weges, auf dem er zu seinen Resultaten gelangt ist, heraus und zeigt ihm, wie man wissenschaftlich Forschungen anzustellen hat.

Vielleicht ist es als ein für die Wissenschaft glücklicher Umstand zu bezeichnen, dass Faraday, wenn er auch völlig vertraut mit den Begriffen von Raum, Zeit und Kraft gewesen ist, kein eigentlicher Mathematiker war. So konnte er sich nicht versucht fühlen, in so manche interessante, aber rein mathematische Untersuchungen, zu denen ihn seine Entdeckungen aufforderten, einzudringen. Auch lag es ihm fern, seine Resultate in mathematische Formeln zu kleiden, weder in solche, die von den Mathematikern seiner Zeit gebilligt werden, noch in solche, die ihnen Grund zu Angriffen geben konnten. Dadurch gewann er Musse, die seiner Geistesrichtung zusagenden Arbeiten zu fördern, seine Ideen mit den von ihm entdeckten Tatsachen in Einklang zu bringen und sich zum Ausdruck seiner Resultate eine, wenn nicht technische, doch natürliche Sprache zu schaffen.

Ich habe dieses Werk speciell mit der Hoffnung unternommen, dass es mir gelingen könnte, seinen Ideen und Methoden mathematischen Ausdruck zu verleihen.

529. Man ist heutzutage im allgemeinen geneigt, das Universum als aus einzelnen Teilen aufgebaut zu betrachten, und die Mathematiker beginnen bei physikalischen Untersuchungen gewöhnlich damit, dass sie zunächst jedes dieser Theile für sich betrachten und dann erst die Beziehungen,

*) *Théorie des Phenomènes Electrodynamiques* p. 9.

die zwischen den gesonderten Teilchen platzgreifen, verfolgen. Das scheint der natürlichste Weg zu sein, und ist auch im allgemeinen als solcher angesehen worden. Inzwischen setzt die Betrachtung eines Partikels für sich allein eine gewisse Abstraction voraus, denn da unsere Wahrnehmungen sich ohne Ausnahme auf ausgedehnte Körper beziehen, so wird vielleicht die Idee des Ganzen in unserem Bewusstsein ebenso primär wie die des Individuums sein. Demnach kann es auch mathematische Methoden geben, die den umgekehrten Weg einschlagen, in denen man von dem Ganzen zu den Teilen, statt von den Teilen zu dem Ganzen fortschreitet. Euklid folgt zum Beispiel im ersten Buch der ersten Methode, wenn er eine Linie als durch die Bewegung eines Punktes, eine Fläche als durch die Bewegung einer Linie und einen Körper als durch die Bewegung einer Fläche entstanden betrachtet, dagegen geht er von der zweiten Methode aus, wenn er eine Fläche als Begrenzung eines Körpers, eine Linie als Begrenzung einer Fläche und einen Punkt als Ende einer Linie ansieht. Entsprechend ist nach der ersten Methode das Potential eines materiellen Systems eine gewisse Function, die durch Integration über die einzelnen Massen des Systems gewonnen wird, nach der zweiten haben die Massen keinen andern Zweck als, dass sie zur Entstehung des Raumintegrals $\nabla^2\Psi/4\pi$ Veranlassung geben, wo Ψ dann das Potential bezeichnet. (Art. 95a.)

Bei electrischen Untersuchungen kann man die Formeln von den Abständen einzelner Körper, von ihren bezüglichen Electrisirungen und von den Strömen, die sie durchfliessen, abhängig machen; man kann aber auch Formeln anwenden, die andere Grössen involviren, welche sich continuirlich durch den ganzen Raum erstrecken.

Die erste Methode setzt Integrationen längs endlichen Linien, Flächen oder begrenzten Räumen voraus, die zweite partielle Differentiationen und Integrationen, die den ganzen unendlichen Raum umfassen.

Faradays Verfahrungsweise scheint auf das engste mit der zweiten Methode verknüpft zu sein. Er betrachtet einen Körper niemals für sich allein, er sieht nicht zwischen den Körpern weiter nichts als Distanzen und geht nicht von der Conception aus, als ob sie auf einander nach irgend einer Function ihrer Entfernungen von einander wirken.

Der gesammte Raum ist ihm ein Kraftbereich, die Kraftlinien sind im allgemeinen gekrümmt, sie gehen von jedem Körper nach allen Richtungen aus und werden in ihrem Verlaufe durch die Gegenwart anderer Körper gestört. Er spricht*) von den Kraftlinien eines Körpers wie von in gewissem Sinne Pertinenzstücken desselben, so dass nach ihm ein Körper nicht da zu wirken vermag, wo er nicht vorhanden ist. Doch trifft das nicht den Kern von Faradays Ansichten. Ich glaube, er hat sagen wollen, dass der ganze Raum von vornherein voll von Kraftlinien ist, deren Arrangement von den in ihm befindlichen Körpern abhängt, und dass die mechanischen und

*) *Exp. Res.* II. p. 293; III. p. 447.

electrischen Actionen eines Körpers von den Kraftlinien abhängen, die an ihn anstossen. Des Folgenden wegen empfehle ich dem Leser noch zum Schluss, die erste und zweite Serie von Faradays *Experimental Researches**) nachzulesen.

Erscheinungen der Induction.

Induction in einem Leiter durch Stromschwankungen in einem andern Leiter.

530. Es seien zwei Strombahnen gegeben, von denen wir die eine *primär*, die andere *secundär* nennen wollen. Die primäre stehe mit den Polen einer Voltaschen Batterie in Verbindung und soll nach Belieben geschlossen und geöffnet werden können. Die secundäre Bahn verknüpfen wir mit den Electroden eines Galvanometers, um eventuell in ihr vorhandene Ströme constatiren zu können. Bei der Aufstellung des Galvanometers tragen wir dafür Sorge, dass dasselbe so weit von allen Teilen des primären Stromkreises entfernt ist, dass seine Angaben von den electromagnetischen Wirkungen dieses Stromes in keiner Weise beeinflusst werden. Ich nehme an, dass beide Strombahnen gerade Drähte enthalten und lege diese nahe neben und parallel zu einander hin, während die andern Teile derselben in grösseren Entfernungen von einander verlaufen.

Man hat nun gefunden, dass in dem Augenblick, wo durch den geraden Draht der primären Bahn ein Strom zu fliessen beginnt, das Galvanometer der secundären Bahn auch in dem geraden Draht dieser einen Strom anzeigt, der aber in entgegengesetzter Richtung wie der Strom des primären geraden Drahtes verläuft. Man sagt von diesem secundären Strom, er sei *Inducirt* und nennt ihn den *Inductionsstrom.* Fliesst der primäre Strom, nachdem er einmal geschlossen ist, stationär fort, so verschwindet der inducirte Strom rasch, und der primäre Strom scheint weiter keine Wirkung auf die secundäre Strombahn auszuüben. Hält man dann den primären Strom plötzlich an, indem man seine Bahn irgendwo unterbricht, so tritt in dem secundären Kreis von neuem ein inducirter Strom auf, der aber diesmal den geraden Draht nach derselben Richtung wie der primäre Strom durchfliesst.

Ueberhaupt bringt jede Veränderung des primären Stromes eine electromotorische Kraft in dem secundären Stromkreis hervor. Nimmt die Stärke des primären Stromes zu, so wirkt die inducirte electromotorische Kraft in entgegengesetzter Richtung wie im primären Stromkreis; nimmt sie ab, so folgt die Wirkung dieser inducirten electromotorischen Kraft derselben

*) *Pogg. Ann.* Bd. XXV.

Richtung wie im primären Stromkreis; bleibt sie constant auf gleicher Höhe, so wird im secundären Stromkreis gar keine electromotorische Kraft erweckt.

Je näher die beiden geraden Drähte der bezüglichen Bahnen einander liegen, um so markanter sind die Inductionswirkungen des einen auf den andern. Ferner wird die Induction verstärkt, wenn man den beiden Bahnen die Form von Ringen oder von spiralig gewundenen Rollen giebt und sie nahe zusammen legt, und noch mehr treten ihre Wirkungen hervor, wenn man in jede der Rollen ein Stück Eisen oder ein Bündel von Eisendrähten einschiebt.

Induction durch relative Bewegung von Strömen und Leitern.

531a. Induction in einem Leiter durch Verschiebung eines Stromes. Im vorigen Artikel habe ich hervorgehoben, dass wenn der primäre Strom constant auf gleicher Stärke erhalten wird, er in der secundären Bahn keinen Strom inducirt. Hier müssen wir hinzufügen, dass das nur so lange gilt, als der primäre Stromkreis keine Ortsveränderungen erleidet. Wir lassen den primären Strom stationär mit derselben Stärke fliessen, nähern aber seinen geraden Draht dem geraden Draht der secundären Bahn. Ein Blick auf das Galvanometer lehrt uns, dass jetzt in dieser wieder ein Strom inducirt ist, der dem primären Strom entgegen läuft. Führen wir jetzt den primären Strom von dem secundären fort, so zeigt sich abermals in diesem ein inducirter Strom, der nunmehr mit dem primären Strom nach derselben Richtung fliesst.

531b. Induction in einem Leiter durch seine Verschiebung gegen einen Strom. Wir lassen durch den primären Kreis den Strom immer mit derselben Stärke fliessen und erhalten ihn in der ihm einmal erteilten Lage. Verschiebt man den secundären Kreis, so tritt in ihm ein Inductionsstrom auf, der dem primären Strom entgegenfliesst, wenn die Verschiebung zu diesem hin geschieht, und der mit ihm gleichgerichtet ist, wenn der secundäre Kreis von ihm fort bewegt wird.

Anticipirend bemerken wir, dass nach dem Lenzschen Gesetz die Richtung des inducirten Stromes sich so bestimmt, dass die mechanische Wirkung, die zwischen primärem und inducirtem Strom platzgreift, stets der Verschiebung widerstrebt. Da zwei Ströme sich einander zu nähern suchen, wenn sie gleichgerichtet und sich von einander zu entfernen streben, wenn sie entgegengerichtet sind, so wird eine Näherung eines der Leiter einen entgegengerichteten, eine Entfernung desselben einen gleichgerichteten Strom hervorrufen.

532. Induction in einem Leiter durch Lagenänderung gegen einen Magnet. Ersetzt man den primären Strom durch eine von ihm begrenzte Schale, die zu seiner Stärke magnetisirt ist und ihre australe Fläche nach derselben Seite kehrt wie die positive Fläche des Stromes, so bringt eine

relative Bewegung dieser Schale gegen den secundären Kreis und ebenso eine relative Bewegung des secundären Kreises gegen die Schale genau dieselben Inductionswirkungen wie eine relative Bewegung des primären Stromes gegen den secundären Kreis, bezüglich eine relative Bewegung dieses gegen den primären Strom hervor.

All diese Erscheinungen folgen der einen Regel: Wenn die Zahl der in positiver Richtung durch den secundären Stromkreis gehenden magnetischen Inductionslinien geändert wird, so wird längs dieses Stromkreises eine electromotorische Kraft wachgerufen, deren Stärke durch den Betrag der Abnahme der magnetischen Induction durch seine Fläche gemessen wird.

Ich gebe zur Klarstellung dieser Regel einige Beispiele.

533a. Es mögen die zwei Schienen eines Eisenbahngeleises von der Erde isolirt sein und an einem Ende mit den Electroden eines Galvanometers leitend verbunden werden. Wir lassen auf dem Geleise einen Wagen fahren, dessen Räder und Axen gänzlich aus Metall bestehen. Wagen und Geleise bilden zusammen einen geschlossenen Leiter, auf den der Erdmagnetismus inducirend einwirkt. Vernachlässigt man die geringe Höhe der Wagenaxen über dem Geleise, so wird die gesammte Induction in dem genannten Kreise lediglich von der, in unseren Breiten nach unten wirkenden, Verticalcomponente der erdmagnetischen Kraft hervorgebracht. Sei in einem bestimmten Augenblick x die Entfernung des Wagens von dem Ende des Geleises, das das Galvanometer enthält, bezeichne b die Spurweite des Geleises, bx ist dann der Inhalt der horizontalen Fläche, die von unserer Strombahn eingefasst wird, und Zbx giebt das auf diese Fläche bezogene Flächenintegral der magnetischen Induction durch die Verticalcomponente Z der erdmagnetischen Kraft. Da Z nach unten wirkt, so haben wir die untere Seite der von der Strombahn umgebenen Fläche als positiv, die obere als negativ anzusehen und ein Strom, der diese Bahn etwa durchfliesst, ist positiv, wenn er, wie die Sonne es täglich scheinbar tut, von Norden durch Osten und Süden nach Westen geht.

So lange der Wagen still steht, bleibt unser Kreis, wie das Galvanometer zeigt, ganz stromlos, setzen wir ihn aber in Bewegung, so ändert sich x, und der in Art. 532 gegebenen Regel zufolge wird in der Axe des Wagens eine electromotorische Kraft von der Grösse $-Zb\,dx/dt$ für einen Mann, der in dem Wagen einen Vordersitz inne hat, von rechts nach links hervorgerufen.

Entfernt sich der Wagen immer mehr von der Verbindungsstelle der beiden Schienen, so wächst x mit t, demnach ist dx/dt positiv, folglich die inducirte electromotorische Kraft negativ, der inducirte Strom fliesst also Nord-West-Süd-Ost. Fährt der Wagen in entgegengesetzter Richtung, so nimmt x ab, dx/dt ist negativ. Die absolute Richtung der inducirten electromotorischen Kraft ist dann entgegengesetzt wie im vorigen Fall, da aber der Beobachter stets so sitzen soll, dass er sein Gesicht dem Fahrziele zukehrt, so wird diese Kraft in der Wagenaxe für ihn auch diesmal von rechts

nach links wirken. Die Richtung des inducirten Stromes ist positiv, geht also Nord-Ost-Süd-West. In südlichen Breiten pointirt das Südende einer Nadel nach unten, dort kehren sich demnach die Verhältnisse um.

Wir können aus dieser Betrachtung eine bequeme Regel zur Bestimmung der Richtung, nach der in einem Draht eine electromotorische Kraft inducirt wird, wenn er sich in einem electromagnetischen Felde bewegt, ableiten.

Wir legen uns in Richtung einer im magnetischen Felde befindlichen Magnetnadel mit dem Kopf nach dem Nordende, mit den Füssen nach dem Südende derselben und wenden das Gesicht der positiven Seite der umflossenen Fläche und immer dem Bewegungsziele des Drahtes zu; die in dem Draht inducirte electromotorische Kraft wirkt dann von links nach rechts.

533b. Bei der Wichtigkeit, welche diese Richtungsbeziehungen für uns haben, wird es gut sein, wenn wir sie noch in anderer Weise klar zu stellen suchen.

Wir legen rings um den Aequator der Erde einen Metallgürtel und ziehen längs des Meridianquadranten, der vom Aequator durch Greenwich zum Nordpol führt, einen Draht. Dann verfertigen wir uns einen Quadrantbogen aus Metall, befestigen das eine Ende desselben drehbar an den Pol der Erde und führen das andere Ende, in dem wir es auf dem äquatorealen Metallgürtel gleiten lassen, um den Aequator der Erde herum. Wir haben so eine Strombahn, die aus zwei Erdquadranten und einem veränderlichen Aequatorstück gebildet wird, hergestellt. Setzt man voraus, dass die Erde ruht und führt den beweglichen Quadranten in Richtung des täglichen Sonnenlaufs, also von Osten nach Westen, so wird in ihm durch den Erdmagnetismus eine electromotorische Kraft inducirt, die vom Norden zum Aequator hin wirkt.

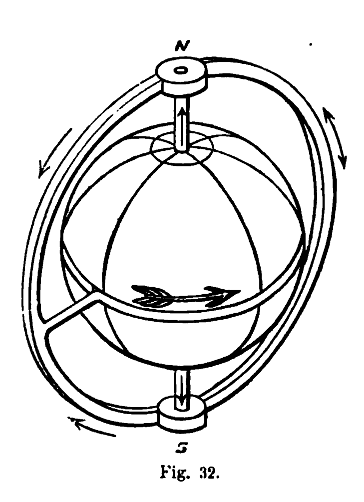


Fig. 32.

Derselbe Effect tritt aber auch ein, wenn der betreffende Quadrant im Raume festgelegt wird, und die Erde zusammt dem andern Quadranten und dem Aequator unter ihm sich dem Sonnenlauf entgegen von Westen nach Osten dreht. In diesem Falle ist es auch gleichgiltig, welche Form wir diesem im Raume festen Quadranten verleihen, wenn nur sein eines Ende immer einen Pol, sein anderes den Aequator berührt. Es ist auch gleichgiltig, ob er vom Nord- oder vom Südpol aus zum Aequator führt, der inducirte Strom fliesst in ihm stets vom Pol zum Aequator hin.

Auch der zweite an der Erde befestigte Quadrant darf jede beliebige Form haben, er darf ausserhalb oder innerhalb der Erde liegen, immer durchfliesst ihn der inducirte Strom vom Aequator zum Pol.

Gesetze der Induction.

Unabhängigkeit der Induction von der Natur der Körper, zwischen denen sie wirkt.

534. Die Stärke der inducirten electromorischen Kraft ist, sowohl wenn sie von Magneten, als auch wenn sie von inducirenden Strömen herrührt, gänzlich unabhängig von der Substanz der inducirenden Magnete bezüglich Stromleiter und ebenso gänzlich unabhängig von der Substanz der inducirten Leiter.

Den Beweis für diese Behauptung hat Faraday geliefert.*) Er nahm zwei aus verschiedenen Metallen gezogenen Drähte, umgab jeden für sich mit einer isolirenden Seidenhülle und drehte sie beide um einander. Die einen Enden derselben verlötete er mit einander, die andern verband er mit den bezüglichen Electroden eines Galvanometers. Brachte er in die Nähe derselben einen primären Strom, so waren beide Drähte zu diesem in ganz gleicher Weise gelegen, und wenn einer von ihnen stärker als der andere inducirt worden wäre, hätte das Galvanometer einen Strom anzeigen müssen. Faraday konnte aber, wie grosse electromotorische Kräfte er auch in dieser Drahtcombination inducirte, nie am Galvanometer einen Ausschlag bemerken. Das Galvanometer blieb auch ruhig, wenn er einen der Drähte durch ein Electrolyt ersetzte.**)

Wir müssen aus diesen Ergebnissen schliessen, dass die in einem Conductor inducirte electromotorische Kraft nur von der Form, Lage und etwaigen Bewegung desselben, sowie von der Stärke und Bewegung der im Felde befindlichen Ströme und Magnete, nicht aber von der substanziellen Beschaffenheit der einzelnen Träger abhängt.

Die electromotorische Kraft bringt als solche keine mechanischen Wirkungen hervor.

535. Eine zweite negative Eigenschaft der electromotorischen Kraft besteht darin, dass sie für sich keine Tendenz hat, mechanische Wirkungen auf einen Körper auszuüben, dass sie lediglich Ströme in demselben zu erzeugen sucht.

Hat die electromotorische Kraft den Strom wirklich zu Stande gebracht, so tritt die mechanische Wirkung infolge der Existenz dieses Stromes ein, sie zeigt sich aber nicht, wenn man die Bildung des Stromes verhindert. Erst wenn der betreffende Körper electrisirt ist, sucht die electromotorische Kraft ihn, wie wir in der Electrostatik gesehen haben, zu bewegen.

---

*) *Exp. Res.* 195.
**) Ib. 200.

Specielle Gesetze der Induction.

536 a. Die Gesetze, denen die Induction in fixirten Leitern folgt, lassen sich mit grosser Sicherheit nach Methoden, in denen die electromotorische Kraft und damit der Strom im Galvanometer auf Null reducirt wird, experimentell untersuchen. Ich will das an einem Beispiele klar machen. Es soll entschieden werden (siehe beistehende Figur 33), ob die Induction der Rolle A auf die Rolle X grösser oder kleiner als die Induction der Rolle

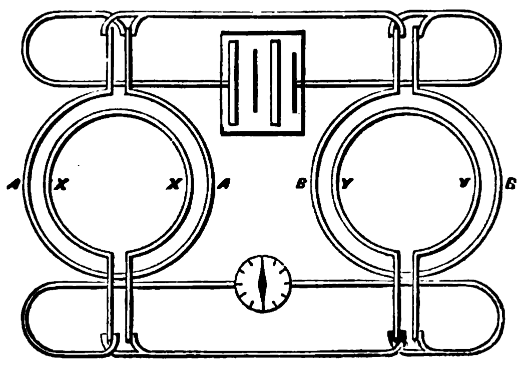


Fig. 33.

B auf die Rolle Y ist. Wir legen das erste Rollenpaar A, X in genügender Entfernung vom zweiten B, Y hin und stellen zwischen A, B und einer galvanischen Batterie eine derartige Verbindung her, dass der Strom diese beiden Rollen zugleich, aber A in der positiven, B in der negativen Richtung durchfliesst. Wir bilden auch zwischen X und Y und einem Galvanometer eine Verbindung ganz derselben Art wie zwischen A und B und der Batterie. Die Inductionsströme fliessen dann in den Rollen X und Y so, dass jeder von ihnen durch beide Rollen X und Y hinter einander geht. Der eine fliesst in Richtung X, Y, Galvanometer, X, der andere in Richtung Y, X, Galvanometer, Y. Ist die Induction von A auf X ebenso gross wie die von B auf Y, so wird das Galvanometer, weil es von beiden Inductionsströmen mit gleicher Stärke, aber nach entgegengesetzten Richtungen angegriffen wird, keinen Inductionsstrom anzeigen, wenn der Stromkreis der Batterie geschlossen oder geöffnet wird.

Durch derartige Experimente lassen sich die betreffenden Resultate viel leichter als durch electromagnetische Anziehungsversuche erhalten, da diese eine sehr delicate Aufhängung eines der Conductoren verlangen. Die Sicherheit der angeführten Methode wächst mit der Stärke des primären Stromes und mit der Empfindlichkeit, die das Galvanometer für plötzliche Stromstösse zeigt.

Felici in Pisa hat eine sehr instructive Reihe solcher wohldurchdachter Experimente ausgeführt, auf die ich den Leser aufmerksam mache.*)

*) *Annales de Chimie et de Physique* XXXIV. p. 66 (1852) und *Nuovo Cimento* IX. p. 345 (1859).

536b. Ich will nur kurz einige der Gesetze erwähnen, die man nach dieser Methode nachweisen kann.

I. Die electromotorische Kraft, die ein Strom in einem Leiter inducirt, ist unabhängig von der substantiellen Beschaffenheit sowohl des inducirenden als des inducirten Leiters.

II. Sie ist ferner unabhängig von dem Flächeninhalt eines Querschnitts der Leiter. In der Tat kann man, wie Versuche lehren, beliebig einen Leiter durch einen dem Material und dem Querschnitt nach von ihm verschiedenen andern Leiter ersetzen, wenn man nur dafür sorgt, dass die Form dieselbe bleibt.

III. Die Induction eines Stromes A auf eine Strombahn X ist ebenso gross wie die Induction des Stromes X auf die Strombahn A.

Schaltet man nämlich beide Leiter in den Kreis der Batterie und des Galvanometers ein, so zeigt das Galvanometer, dass das Gleichgewicht der electromotorischen Kräfte beim Oeffnen oder Schliessen der Batterie ungestört bleibt.

IV. Die Induction ändert sich der Stärke des inducirenden Stromes proportional.

Zum Beweise dieser Behauptung justirt man drei Leiterpaare A, X; B, Y; C, Z; nach der in Art. 536a gegebenen Methode so lange, bis A den Leiter X so inducirt, wie B den Leiter Y, und B den Leiter Y, so wie C den Leiter Z, lässt den Strom erst durch A fliessen und verzweigt ihn dann nach irgend einem Verhältnis zwischen B und C. Verbindet man dann X, Y, Z hinter einander mit einem Galvanometer, aber X umgekehrt, Y und Z direct (X so wie in der Fig. 33 die Rolle X; Y, Z, so wie die Rolle Y in derselben Fig. 33), so bleibt die Nadel derselben ungestört, die in X inducirte Kraft balancirt gerade die in Y und Z zusammen inducirte.

V. Bilden zwei Stromkreise geometrisch ähnliche Configurationen, so ist die in ihnen inducirte Kraft ihren linearen Dimensionen proportional. Bildet man nämlich, wie beim Beweis des Satzes IV. drei Leiterpaare, die sich einander ähnlich sind, wählt aber die linearen Dimensionen des ersten Paares gleich der Summe der entsprechenden linearen Dimensionen des zweiten und dritten Paares, verbindet A, B, C hinter einander mit der Batterie und X, Y, Z in der früher angegebenen Weise hinter einander mit dem Galvanometer, so bleibt das letztere beim Oeffnen und Schliessen der Batterie in stetem Gleichgewicht.

VI. Die electromotorische Kraft, welche eine Rolle von m Windungen in einer Rolle von n Windungen inducirt, variirt proportional dem Producte mn der Windungszahlen der beiden Rollen.

537. All diese Gesetze lassen sich nach der angegebenen Methode nachweisen. Das Galvanometer muss aber sehr empfindlich und seine Nadel so leicht als möglich sein, damit selbst sehr schwache vorübergehende Ströme zur Anzeige gelangen. Mit denselben Hülfsmitteln lassen sich auch Versuche über Induction durch Bewegung von Leitern anstellen. Hier hat

man aber dafür zu sorgen, dass die Nadel des Galvanometers verhältnismässig langsam schwinge, damit man genügend Zeit behält, den betreffenden Leitern die gewünschten Bewegungen zu erteilen, während die Nadel noch nicht zu weit von ihrer Ruhelage entfernt ist. Man benutzt daher bei solchen Versuchen etwas längere Nadeln.

Die Methode ist dieselbe, wie die früher befolgte. Man lässt während der Beobachtungsdauer die electromotorischen Kräfte in den einzelnen inducirten Leitern sich stets das Gleichgewicht halten.

Ich habe nun eine andere Versuchsmethode vorzuführen, bei der die electromotorischen Kräfte erst nach einer und dann nach einer andern Richtung wirken, und so zwei auf einander folgende Ströme hervorbringen, die nach entgegengesetzten Richtungen durch das Galvanometer fliessen. Bei gewissen Anordnungen sind die Impulse, die die beiden Ströme auf die Galvanometernadel ausüben, wie ich zeigen werde, einander gleich und entgegengesetzt. Die Theorie des Galvanometers in seiner Anwendung zur Messung der Stärke kurz andauernder Ströme wird erst im Art. 748 des genauern auseinandergesetzt werden können. Für jetzt genügt die Bemerkung, dass, so lange die Nadel sich in der Nähe ihrer Gleichgewichtslage befindet, die ablenkende Kraft eines Stromes seiner Stärke proportional ist, und wenn die ganze Dauer der Wirkung des Stromes auf die Nadel nur unerheblich gegen die Dauer einer Schwingung derselben ausfällt, wird die schliessliche vom ganzen Strom der Nadel erteilte Geschwindigkeit proportional der gesammten Electricitätsmenge, die dieser Strom während seiner Wirkung mit sich fortführt. Daraus ist der Schluss zu ziehen, dass zwei unmittelbar auf einander folgende gleich starke, aber entgegengesetzt gerichtete, sehr kurze Zeit andauernde Ströme der Nadel zusammen schliesslich gar keine Geschwindigkeit mitteilen werden. Darnach lässt sich leicht experimentell der Satz beweisen.

VI. Beim Schliessen des inducirenden Kreises wird in dem inducirten Kreise im G a n z e n genau so viel Electricität inducirt, wie beim Oeffnen desselben, obgleich der Oeffnungsinductionsstrom intensiver wie der Schliessungsinductionsstrom verläuft.

Wir verbinden den primären Stromkreis mit einer Batterie und einem Stromschlüssel, mit Hülfe dessen man den Strom leicht schliessen und öffnen kann. Drückt man den Schlüssel mit einem Finger nieder, so ist der primäre Stromkreis geschlossen und das Galvanometer des secundären Kreises zeigt in diesem den dem primären Strom entgegenlaufenden Schliessungsinductionsstrom an. Lässt man den primären Strom geschlossen, so verschwindet der inducirte Strom. Oeffnet man ihn dann, indem man den Finger vom Schlüssel entfernt, so erscheint der mit dem primären gleichgerichtete Oeffnungsinductionsstrom, und die Galvanometernadel schlägt nach der entgegengesetzten Seite wie beim Schliessen des primären Stromes aus. Man kann nun das Schliessen und Oeffnen des primären Stromes sehr rasch auf einander folgen lassen, die Nadel des Galvanometers

wird dann unmittelbar hinter einander von zwei antagonistischen Impulsen getroffen; ehe sie noch Zeit gefunden, dem ersten Impulse folgend sich aus ihrer Ruhelage zu entfernen, wirkt auf sie schon der zweite nach der entgegengesetzten Richtung. Wie die Erfahrung lehrt, bewegt sich die Nadel scheinbar überhaupt nicht aus ihrer Ruhelage heraus, nur ein sehr genaues Hinsehen zeigt, dass sie plötzlich aus der einen Ruhelage in eine andere, der erstern sehr nahe gelegene geworfen wird. Daraus müssen wir schliessen, dass die beiden Impulse an Stärke gleich sind, das heisst, dem frühern zufolge, dass der Oeffnungsinductionsstrom genau so viel Electricität mit sich fortführt, wie der Schliessungsinductionsstrom.

538. Ich beschreibe noch eine zweite Anwendung, die Felici von dieser Methode gemacht hat.

Man kann einer secundären Rolle B immer mehrere von einander verschiedene Lagen erteilen, in denen sie beim Schliessen oder Oeffnen des inducirenden primären Stromes nicht mehr inducirt wird.

Zwei Rollen, die so gelegen sind, dass die eine in der andern beim Oeffnen oder Schliessen ihres Stromes keinen Strom inducirt, heissen *Conjugirte* Rollen.

Seien B_1 und B_2 zwei solche inductionslose Lagen einer secundären Rolle B. Bringt man B plötzlich von B_1 nach B_2, so muss die algebraische Summe aller in dieser Rolle während der Bewegung inducirten vorübergehenden Ströme genau gleich Null sein. Das Galvanometer bleibt also, wenn die Verlegung der Rolle B von B_1 nach B_2 vollführt ist, in seiner Ruhelage.

Das gilt, auf welchem Wege auch B von B_1 nach B_2 gebracht wird, es gilt auch noch, wenn der primäre Strom während der Translocirung von B seine Stärke beliebig abändert.

Ich bezeichne nun mit B' eine andere Lage von B, die nicht mehr zum primären Kreise A conjugirt ist. Liegt B in B', so wird das Schliessen wie das Oeffnen des primären Stromes in B' einen Strom induciren.

Wir schliessen den primären Strom A, wenn B sich in der zu A conjugirten Lage B_1 befindet. Es wird in B kein Strom inducirt. Wir führen dann B nach B'. In Folge dieser Bewegung muss dann in B ein Strom inducirt werden, geschieht aber diese Bewegung sehr rasch und wird der primäre Strom gerade, wenn B nach B' gelangt ist, unterbrochen, so bleibt, wie ein Blick auf das Galvanometer lehrt, die Nadel in ihrer Ruhelage. Demnach neutralisirt der durch das Unterbrechen des primären Stromes in B inducirte Strom den durch die Bewegung von B nach B' entstandenen.

Wir schliessen daraus:

VII a. Der Strom, der in einer secundären Rolle durch ihre Bewegung aus einer conjugirten Lage in eine andere Lage inducirt wird, führt eine genau ebenso grosse aber entgegengesetzte Electricitätsmenge mit sich wie der Strom, der in der secundären Rolle in ihrer neuen Lage beim Oeffnen des primären Stroms inducirt wird.

Da nach dem sechsten Satz Oeffnen und Schliessen eines Stromes gleich grosse entgegengesetzte Electricitätsmengen induciren, so folgt auch

VII b. Das Schliessen eines Stromes inducirt in einer secundären Rolle ebensoviel Electricität wie das Ueberführen dieser Rolle aus einer conjugirten Lage in die betreffende Lage, während der primäre Strom fliesst.

Dasselbe tritt ein, wenn man nicht die secundäre, sondern die primäre Rolle bewegt.

Theorie der Induction.

Charakter der Function, von der die Induction abhängt.

539. Wir lassen die primäre Rolle A von A_1 nach A_2 und zugleich die secundäre Rolle B von B_1 nach B_2 sich bewegen. Der Strom in A kann sich während der Bewegung ändern, sei seine Stärke in A_1 gleich γ_1, in A_2 gleich γ_2. Der ursprüngliche Zustand beider Rollen ist dann durch A_1, B_1, γ_1, der Endzustand durch A_2, B_2, γ_2 charakterisirt. Die obigen Experimente lehren, dass die durch die bezeichneten Bewegungen in B im Ganzen inducirte Electricitätsmenge nur von dem Anfangs- und Endzustande, nicht aber von den Zwischenzuständen abhängen kann. Bezeichnet demnach F eine Function von A, B und γ, so wird der Wert dieser gesammten inducirten Electricitätsmenge von der Form

$$E = F(A_2, B_2, \gamma_2) - F(A_1, B_1, \gamma_1)$$

sein müssen.

Wenn gar keine Bewegung stattfindet, der primäre Strom lediglich seine Stärke von γ_1 bis γ_2 erhöht, haben wir $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, und wir wissen aus Artikel 536, dass der inducirte Strom dem inducirenden proportional ist. F muss also so von γ abhängen, dass F/γ nach γ constant ist, und lediglich von der Lage der beiden Rollen A und B bestimmt wird.

Nun hängt die Induction nicht von der absoluten Lage der beiden Rollen, sondern nur von ihrer relativen Orientirung gegen einander ab. F/γ muss sich also durch die Abstände der einzelnen Elemente der beiden Rollen von einander und durch die Winkel, die diese Elemente mit einander einschliessen, berechnen lassen. Ich bezeichne eine Function, die nur von diesen Abständen und Winkeln der Elemente der Rollen abhängt, durch M und habe

$$E = C(M_1\gamma_1 - M_2\gamma_2)$$

Darin ist C eine Constante, M_1, M_2 sind die bezüglichen Werte von M in den bezüglichen Lagen A_1, B_1; A_2, B_2 der beiden Rollen; γ_1 ist die Stärke des primären Stromes in der Position A_1, γ_2 die in A_2.

Die gesammte inducirte Electricität hängt also ab von der Aenderung, die eine gewisse Grösse $M\gamma$ erleidet, einer Aenderung, die entweder von der Variation des primären Stromes oder von Lagenänderungen der Rollen gegen einander herrühren kann.

Faradays Theorie der Induction.

540. Aeltere Theorie des electrotonischen Zustandes. Die Idee von der Existenz einer solchen Grösse, von deren Veränderung, nicht absolutem Werte, der inducirte Strom abhängen sollte, ist Faraday schon im ersten Stadium seiner Untersuchungen gekommen.*) Er machte nämlich die Beobachtung, dass eine secundäre Rolle keine electrischen Eigenschaften zeigte, wenn sie sich in einem schon fertigen und sich in seiner Stärke gleichbleibenden electromagnetischen Felde befand, dass sie aber sofort einen Inductionsstrom aufwies, wenn man dieses Feld plötzlich hervorbrachte. Er bemerkte ferner, dass ein Inductionsstrom sich auch zeigte, wenn man das magnetische Feld plötzlich etwa durch Entfernung des primären Stromkreises vernichtete, nur dass bei der Vernichtung der inducirte Strom entgegengesetzt wie bei der Schaffung des electromagnetischen Feldes floss. Daher nahm er an, dass die Substanz einer secundären Rolle in einem electromagnetischen Felde sich in einer ganz besondern electrischen Bedingung befinden müsse, die er als *Electrotonisch* bezeichnete. Später erkannte er, dass er sich von der Conception eines solchen besondern electrischen Zustandes befreien konnte, wenn er von seinen magnetischen Kraftlinien**) Gebrauch machte. Aber selbst in seinen letzten Untersuchungen***) sagt er noch, ‚Wieder und wieder zwingt sich diese Idee von dem electrotonischen Zustande†) meinem Geiste auf.‘

Die Geschichte, wie diese Idee in Faradays Geiste entstand, ist wohl des Studiums wert. Durch eine Reihe von Experimenten, bei denen er mit dem intensivsten Gedankenaufwand, aber ohne den Schutz mathematischen Calcüls vorging, war er zur Erkenntnis gelangt, dass etwas existiren müsse, wovon allein die Induction abhängt. Heutzutage wissen wir, dass dieses Etwas eine mathematische Grösse ist, die man billig als die fundamentale Grösse in der Theorie des Electromagnetismus betrachten darf. Faraday ist aber zu ihrer Conception auf rein experimentellem Wege geführt worden, desshalb schrieb er ihr eine physikalische Existenz zu, deshalb glaubte er, sie sei ein ganz besonderer Zustand der Materie, trotzdem er später dieser Supposition nicht mehr benötigt war, als er die Inductionserscheinungen durch andere der Auffassung näher liegende Annahmen entwickeln konnte.

Sehr viel später sind auch andere Forscher, und zwar durch rein mathematische Betrachtungen zu derselben Idee gelangt, doch hat, soviel ich weiss, keiner von ihnen in der kunstreichen mathematischen Conception vom Potential zweier Stromkreise auf einander Faradays alte Hypothese vom electrotonischen Zustand erkannt. Daher rühren die Schwierigkeiten, die diejenigen, welche sich mit unserm Wissenszweige auf dem Wege,

*) *Exp. Res.*, series I. 60.

**) Ibid., II. (242).

***) Ibid., 3269.

†) Ibid., 60, 1114, 1661, 1729, 1733.

den ihnen die hervorragenden Erforscher der mathematischen Gesetze zeigten, vertraut gemacht haben, oft finden, wenn es ihnen darauf ankommt, die Gesetze, die Faraday in den beiden ersten Serien seiner *Researches* in so wunderbarer Vollständigkeit gegeben hat, auf ihre wissenschaftliche Exactheit zu prüfen.

Der wissenschaftliche Wert der Faradayschen Idee von einem electrotonischen Zustand liegt eben darin, dass sie die Gedanken auf eine gewisse Grösse lenkt, von deren Veränderung die wirklich eintretenden Phänomene abhängen. Doch führt diese Idee, wenn man sie nicht beträchtlich weiter, als Faraday es getan hat, entwickelt, nicht leicht von selbst zu einer Erklärung der diesbezüglichen Erscheinungen. Ich kehre im Artikel 584 noch einmal zu diesem Gegenstande zurück.

541. Spätere Theorie der Kraftlinien. Weit mächtiger haben sich in Faradays Händen die magnetischen Kraftlinien erwiesen, die, so oft er seine Magnete oder electrischen Ströme betrachtete, vor sein geistiges Auge traten, und deren Abzeichnung durch Eisenfeilicht er ganz entschieden als die beste Unterstützung für den Experimentator ansah*).

Faraday wollte durch diese Linien nicht blos die Richtung der magnetischen Kraft darstellen, in ihrer Zahl und Concentration sah er eine Repräsentation der Stärke derselben, und in seinen spätern Untersuchungen zeigte er, was man unter Einheitskraftlinien zu verstehen hat. Ich habe in diesem Werke schon bei verschiedenen Gelegenheiten (Artt. 82, 404, 490) die Beziehung, die Faraday zwischen den Eigenschaften der Kraftlinien und den mathematischen Bedingungen der electrischen und magnetischen Kräfte erkannt hat, auseinandergesetzt, ich habe auch Faradays Angaben über Einheitslinien und die Zahl derselben, die sich in einem abgegrenzten Gebiete befindet, mathematisch auszudrücken gelehrt.

In der ersten Reihe seiner Untersuchungen**) setzt er klar auseinander, wie die Richtung eines in einem Leiter, von dem ein Teil sich durch ein magnetisches Kraftgebiet bewegt, inducirten Stromes von der Art, in der dieser Teil bei seiner Bewegung die Kraftlinien des betreffenden Feldes durchschneidet, abhängt.

In der zweiten Reihe***) zeigt er, dass die Inductionserscheinungen, die die Stärkeänderungen eines Stromes oder eines Magnets begleiten, sich erklären lassen, wenn man voraussetzt, dass ein Strom oder ein Magnet, wenn er sich verstärkt, seine Kraftlinien zurückstösst, und wenn er geschwächt wird, sie zu sich heranzieht.

Ich kann nicht sagen, ob bei ihm schon damals die Doctrin sich so klar ausgebildet hatte, die er später†) der Nachwelt in so präciser Fassung

*) *Exp. Res.*, 3234.
**) Ibid., 114.
***) Ibid., 238.
†) Ibid., 3082, 3087, 3113.

überliefert hat, dass nämlich ein Conductor bei seiner Bewegung durch ein magnetisches Feld in sich eine Wirkung aufsummirt, die durch den Flächeninhalt der Querschnitte aller Kraftlinien, die er durchschneidet, gemessen wird. Doch würde diese Doctrin nach den Untersuchungen der genannten zweiten Reihe*) keinen wesentlich neuen Gesichtspunkt mehr bieten.

Nun ging Faraday von der Ansicht aus, dass die Kraftlinien continuirliche Existenz hätten. Darnach konnten Kraftlinien nicht plötzlich in Gebieten entstehen, wo vorher keine vorhanden waren. Sollte also trotzdem die Zahl der Kraftlinien, die durch das von einem Leiter eingeschlossene Gebiet hindurchgingen, variirt werden, so konnte das nur dadurch geschehen, dass man entweder den Leiter durch die Kraftlinien nach andern Stellen des Feldes hindurchführte oder dadurch, dass man die Kraftlinien zwang, durch den Leiter hindurchzugehen. In beiden Fällen wird dann in dem Leiter ein Strom inducirt.

Die Zahl der Kraftlinien, die in einem bestimmten Augenblick den Leiter passiren, ist mathematisch äquivalent dem von Faraday früher angenommenen electrotonischen Zustande des Leiters und sie wird durch die Grösse $M\gamma$ repräsentirt.

Hauptgesetze der Induction nach Faraday.

Wir befinden uns Faraday gegenüber in der vorteilhaften Lage, die electromotorische Kraft präcis definiren und sie genauen Messungen unterwerfen zu können (Artt. 69, 274), und sind dadurch in den Stand gesetzt, mit seiner Nomenclatur und nach seinen Ideen dem wahren Gesetze der magneto-electrischen Induction die folgende strenge Fassung zu verleihen:

Differentialgesetz. *Die in der ganzen Ausdehnung eines Leiters zu einer bestimmten Zeit wirkende electromotorische Kraft wird durch das Verhältnis, in dem die von ihm eingefassten magnetischen Kraftlinien in der Zeiteinheit an Zahl gerade abnehmen, gemessen.*

Dies ist das *Differentialgesetz* der electromagnetischen Induction. Daraus folgt das *Integralgesetz*:

Integralgesetz. *Das Zeitintegral der in der ganzen Ausdehnung eines Leiters wirkenden electromotorischen Kraft bildet zusammen mit der Zahl der magnetischen Kraftlinien, die während des betreffenden Zeitintervalls durch den Leiter hindurchgehen, eine unveränderliche Grösse.*

Statt der Zahl der magnetischen Kraftlinien hätten wir auch die magnetische Induction durch den Leiter, oder das Flächenintegral dieser Induction erstreckt über irgend eine von dem Leiter begrenzte Fläche einführen können.

Ich komme später nochmals auf Faradays Theorie zurück, einstweilen habe ich noch dem Leser von den andern auf ganz differenten Betrachtungen gestützten Theorien der Induction Rechenschaft zu geben.

*) Ibid., 217.

Das Lenzsche Gesetz.

542. Im Jahre 1834 sprach Lenz*) sein bemerkenswertes Gesetz, welches zwischen den durch die Ampèresche Formel fixirten Erscheinungen der mechanischen Wirkung electrischer Ströme auf einander und ihrer Induction bei Bewegung ihrer Leiter waltet, aus. Etwas früher, nämlich im Januar desselben Jahres, hatte schon Ritchie**) einen Versuch gemacht, eine solche Beziehung festzusetzen, aber seine Bestimmung der Richtung des Inductionsstromes war in jedem Falle unrichtig.

Das Lenzsche Gesetz lautet:

Fliesst in dem primären Kreise A ein Strom und wird in dem secundären Kreise B dadurch, dass man den primären oder auch den secundären Kreis bewegt, ein Strom inducirt, so verläuft die Richtung dieses derartig, dass die electromagnetische Kraftwirkung zwischen dem inducirenden und inducirten Strom der relativen Bewegung der Kreise Widerstand leistet.

Neumanns Theorie der Induction.

Auf dieser Regel hat F. Neumann seine mathematische Theorie der Induction gegründet. Er hat daraus die mathematischen Gesetze, welche die inducirten Ströme mit der Bewegung des inducirenden oder inducirten Kreises verknüpfen, abgeleitet. Er zeigte, dass die Grösse M, die wir als das Potential des einen Stromkreises auf den andern bezeichnet haben, völlig mit dem electromagnetischen Potential dieser Stromkreise auf einander, das wir schon bei der Untersuchung des Ampèreschen Gesetzes kennen gelernt haben, zusammenfällt. Man darf daher behaupten, dass F. Neumann die mathematische Behandlung, die Ampère nur für die mechanischen (ponderomotorischen) Wirkungen der Ströme auf einander kennen gelehrt hat, auch auf die inducirenden (electromotorischen) Wirkungen ausgedehnt hat.

Helmholtz' Theorie der Induction.

543. Noch wichtiger für die Wissenschaft ist die Theorie geworden, die Helmholtz in seiner Abhandlung *Erhaltung der Kraft****) auseinandergesetzt hat, uud auf die später unabhängig von jenem Physiker auch W. Thomson†) gekommen ist. In dieser grundlegenden Theorie wird

*) *Pogg. Ann.*, XXXI. 483 (1834).

**) *Phil. Mag.*, Januar 1834.

***) Am 23. Juli 1847 vor der physikalischen Gesellschaft in Berlin gelesen. *Gesammelte Abhandlungen.*

†) *Trans. Brit. Ass.* 1848 und *Phil. Mag.* Dec. 1851, ferner in der Abhandlung *Transient Electric currents*, Phil. Mag. 1853.

der Nachweis geführt, dass die von Faraday entdeckte Induction electrischer Ströme wegen des Princips der Erhaltung der Energie eine notwendige Folge der von Oerstedt und Ampère gefundenen electromagnetischen Wirkungen der Ströme aufeinander und auf Magnete sei. Helmholtz betrachtet den Fall eines Leiters vom Widerstande R, in dem eine von einem Voltaschen Element oder einer thermoelectrischen Kette hervorgebrachte electromotorische Kraft wirkt und einen Strom von der Stärke J in Fluss setzt und erhält. Er nimmt dann an, dass sich in der Umgebung des Leiters ein Magnet bewegt. Sei das Potential des Magnets in Bezug auf den Leiter gleich V, die electromagnetische Kraftwirkung wird in der Zeit dt dem Magnete der Energie $J(dV/dt)\,dt$ mitteilen.

Nach dem in Art. 242 behandelten Jouleschen Gesetz ist nun die in dem Leiter während derselben Zeit dt entwickelte Wärmemenge gleich $J^2 R dt$. Ferner verbraucht die electromotorische Kraft A zur Erhaltung des Stromes die Zeit dt hindurch die Arbeit $AJdt$, und da nach dem Princip der Erhaltung der Kraft diese Arbeit ebenso gross sein muss, wie die durch die Erwärmung des Leiters und Bewegung des Magnets getane, so haben wir

$$1) \qquad A J dt = J^2 R dt + J \frac{dV}{dt} dt.$$

Daraus folgt für die Intensität, mit der der electrische Strom unter dem Einfluss des sich bewegenden Magnets fliesst,

$$2) \qquad J = \frac{A - \frac{dV}{dt}}{R}.$$

Der electromotorischen Kraft A können wir jede beliebige Grösse erteilen; lassen wir den Leiter einen überall gleich temperirten lediglich metallischen Kreis bilden, so haben wir $A = 0$ und

$$3) \qquad J = -\frac{1}{R}\frac{dV}{dt}.$$

Diese Gleichung sagt aber aus, dass in einem Leiter durch die Bewegung eines Magnets ein Strom inducirt wird, der in jedem Augenblicke mit derselben Stärke fliesst, wie wenn er von einer electromotorischen Kraft $-dV/dt$ getrieben würde.

Bewegt sich der Magnet aus einer Position, in der das electromotorische Potential zwischen ihm und dem Leiter gleich V_1 ist, in eine andere, in der es den Wert V_2 besitzt, so ist die gesammte in dem Leiter durch diesen Uebergang inducirte Electricitätsmenge

$$4) \qquad \int J dt = -\frac{1}{R}\int \frac{dV}{dt} dt = \frac{1}{R}(V_1 - V_2).$$

Diese gesammte inducirte Electricitätsmenge hängt also nicht von der Geschwindigkeit, mit der der Magnet sich bewegt, ab, sie wird lediglich durch die Anfangs- und Endlage des Magnets gegen den Leiter bestimmt.

Helmholtz hat sich in seiner ersten Untersuchung eines Maasssystems bedient, das sich auf der in dem Leiter entwickelten Wärmemenge gründete. Betrachtet man das Maass für die Stromstärke als beliebig gegeben, so ist nach seinem Maasssystem die Einheit des Widerstandes der Widerstand, den ein Leiter zeigen muss, wenn ein Strom von der Einheit der Intensität in der Zeiteinheit in ihm eine Wärmeeinheit entwickeln soll. Die Einheit der electromotorischen Kraft ist dann so gross, dass sie in einem Leiter, dessen Widerstand der eben definirten Einheit gleich ist, einen Strom von der Einheit der Intensität ins Leben ruft. Adoptirt man dieses Helmholtzsche Maasssystem, so ist man gezwungen, in die Gleichungen eine Grösse a einzuführen, die das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit angiebt. Bei uns erscheint in den entwickelten Formeln ein solcher Factor nicht, weil wir uns überall des electrostatischen oder des electromagnetischen Maasssystems bedienen.

544. Helmholtz leitet auch die Existenz und Stärke des Inductionsstromes ab, der in einem Leiter auftritt, wenn seine relative Lage gegen einen Stromkreis geändert wird.

Seien R_1 und R_2 die Widerstände zweier Stromkreise, J_1 und J_2 die Stärken der sie durchfliessenden Ströme, A_1 und A_2 die entsprechenden äussern electromotorischen Kräfte, endlich gebe V das Potential des einen Stromkreises auf den andern an, wenn in beiden Stromkreisen Einheitsströme fliessen.

Wir haben dann nach dem Princip der Erhaltung der Kraft

$$5)\qquad A_1 J_1 + A_2 J_2 = J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2 + J_1 J_2 \frac{dV}{dt}.$$

J_1 soll die Stärke des inducirenden, J_2 die des inducirten Stromes sein, ist dann J_2 gegen J_1 so geringfügig, dass der inducirte Strom seinerseits den inducirenden in seiner Stärke nicht merkbar alterirt, so darf man $J_1 = A_1/R_1$ setzen und erhält

$$6_1)\qquad J_2 = \frac{A_2 - J_1 \dfrac{dV}{dt}}{R_2},$$

eine Gleichung, die in ganz derselben Weise wie die entsprechende Formel 2) des vorangehenden Artikels zu interpretiren ist.

Wäre J_2 der inducirende, J_1 der inducirte Strom, so hätten wir

$$6_2)\qquad J_1 = \frac{A_1 - J_2 \dfrac{dV}{dt}}{R_1}.$$

Daraus folgt, dass zwei gleiche Ströme auf einander gleiche electromotorische Kräfte ausüben, welche Form auch ihre Bahnen haben mögen.

Den Fall, wo eine Induction durch Verstärkung oder Abschwächung des inducirenden Stromes entsteht, zieht Helmholtz in der genannten

Abhandlung eben so wenig wie die Induction eines Stromes auf sich selbst in Betrachtung.

Thomson*) hat dasselbe Princip zur Bestimmung des mechanischen Aequivalents eines Stromes angewendet.

Er weist darauf hin, dass wenn durch die gegenseitige Wirkung zweier constant erhaltener Ströme Arbeit geleistet wird, ihr mechanischer Wert um die Arbeitsgrösse zunimmt. Die Batterie hat also, wenn die Ströme in ihrer Stärke erhalten bleiben sollen, den doppelten Betrag jener Arbeit zu ersetzen**).

Webers Theorie der Induction.

545. Wir haben dem grossen Weber unendlich viel auf dem Gebiete der Electricitätslehre zu verdanken. Er hat unsere Wissenschaft mächtig gefördert, als er die absoluten Einheiten zur Messung der electrischen Grössen einführte. Erst hat er im Verein mit Gauss die Messung der magnetischen Grössen auf die höchste Stufe der Präcision gebracht, dann gab er in seinen *Electrodynamischen Maassbestimmungen* die Grundlagen zur Fixirung der Maasseinheiten, die eine Anwendung finden sollten, und schliesslich lehrte er die einzelnen electrischen Grössen mit einem nie geahnten Grade von Genauigkeit in diesen Einheiten zu messen.

Seinen Untersuchungen haben wir die theoretische Ausbildung und praktische Anwendung des electrodynamischen wie des electromagnetischen Maasssystems zu verdanken.

Seine allgemeine Theorie der electrischen Wirkungen umfasst neben den electrostatischen und electromagnetischen auch die Inductionserscheinungen. Doch gehe ich einstweilen nicht darauf ein, da ich ihr selbst und den Auseinandersetzungen, zu denen sie neuerdings Veranlassung gegeben hat, später ein besonderes Capitel zu widmen gedenke.

---

*) *Mechanical Theorie of Electrolysis, Phil. Mag.*, 1851 Dec.

**) *Reprint.* § 571.

Cap. IV.

Induction eines Stromes auf sich selbst.

— ⁘ —

Entdeckung der Selbstinduction.

546. Die neunte Reihe seiner *Researches* widmet Faraday der Erforschung der Erscheinungen, die ein Strom in einem Drahte, der als Windungsdraht eines Electromagnets dient, hervorbringt.

Fasst man die Electroden einer genügend starken Voltaschen Säule mit den Händen an, so fühlt man bei Schliessen und Oeffnen des Stromes derselben eine physiologische Erschütterung, einen Schlag. Besteht die Säule aus nur einem Plattenpaar, so ist ihre electromotorische Kraft gering, und man verspürt weder bei dem Schliessen noch bei dem Oeffnen irgend welche Wirkung. Jenkin fand aber, dass auch eine so schwache Batterie einen electrischen Schlag zu erteilen vermag, wenn man ihren Schliessungsdraht um ein Stück weiches Eisen windet. Hält man die Enden des Drahtes in je einer Hand, so fühlt man jetzt beim Oeffnen des Stromes eine leichte Erschütterung; beim Schliessen desselben verspürt man eine solche nicht.

Diese und eine Reihe anderer Erscheinungen gehören, wie Faraday nachgewiesen hat, in die Kategorie der Inductionserscheinungen, die nach seinen Beobachtungen ein Strom bei der Aenderung seiner Stärke in andern umgebenden Leitern hervorruft. Sie unterscheiden sich aber von den zuerst beschriebenen Phänomenen darin, dass bei ihnen der Strom auf seinen eigenen Leiter inducirend wirkt. Zudem treten sie, weil ja kein Draht dem primären Leiter sich näher anschmiegen kann, als er selbst es tut, mit grösserer Energie auf.

Vergleichung der Induction mit einer hydrodynamischen Erscheinung.

547. Bei dieser Gelegenheit macht Faraday die Bemerkung*), der erste Gedanke, der einem bei der Beobachtung der Selbstinduction aufstosse,

*) *Exp. Res.* 1077

sei der, dass die Electricität sich in ihrem Leiter so bewege, wie wenn sie etwas besässe, was dem Moment oder der Trägheit entspricht. In der Tat, fasst man ein Stück des Leiters ins Auge, so kann man beim Oeffnen des Stromes in ihm Phänomene beobachten, die genau den Erscheinungen entsprechen, die in einer Röhre auftreten, wenn man einen durch sie fliessenden Wasserstrom plötzlich zum Stillstand bringt. Schliesst man bei einer solchen Röhre, während sie vom Wasser durchströmt wird, plötzlich das Abflussende derselben, so bringt das Moment des Wassers einen Druck hervor, der den Druck, unter dem es strömt, bei weitem übersteigt, und der sogar die Röhre zu zersprengen genügen kann. Besitzt die Röhre eine kleine Seitenöffnung, so stürzt das Wasser aus dieser mit einer weit grössern Geschwindigkeit, als seinem Gefälle entspricht, es kann auch in einen Recipienten strömen, in dem ein stärkerer Druck als der, unter dem es durch die Röhre floss, herrscht.

Diese Erscheinung ist bei der Construction des Pulsometers verwendet, wo eine grosse Wassermasse, die ein nur geringes Gefälle besitzt, eine kleine Menge Wasser hoch in die Höhe schleudert.

Die Selbstinduction kann nicht einer Trägheit der Electricität zugeschrieben werden.

548. Die hervorgehobene Analogie dieser Erscheinung mit der der Selbstinduction eines Drahtes ist aber nicht vollständig. Die Stärke, mit der die beschriebene Trägheitswirkung des Wassers auftritt, hängt ausser von der Flüssigkeitsmenge, die durch die Röhre in der Zeiteinheit strömt, noch von der Länge dieser Röhre und der Weite, die sie an den einzelnen Stellen besitzt, ab; sie wird aber gar nicht von der Form, die man der Röhre, ohne ihre Länge zu ändern, verleiht, noch auch von irgend welchen ausserhalb der Röhre wirkenden Kräften beeinflusst.

Dagegen wird die Induction eines Drahtes ganz bedeutend durch die Form, die er hat, bestimmt. Biegt man zum Beispiel einen Draht so zusammen, dass er doppelt gelegt erscheint, so ist seine Induction nur sehr gering; biegt man ihn auf, so verstärkt sich die Induction; windet man ihn in Form einer Raumspirale, so wird sie noch grösser. Die Induction des Drahtes wird auch durch ausserhalb wirkende Agentien beeinflusst, denn, wenn man in den zu einer Spirale gewundenen Draht ein weiches Eisenstück einschiebt, erreicht sie den grössten Betrag.

Wickelt man ferner mit dem ersten Leiter zusammen noch einen zweiten Draht zu einer Spirale auf, so ist dieser Draht auf die Induction unseres Leiters ganz ohne Einfluss, so lange er keinen geschlossenen Kreis bildet, so wie man aber seine beiden Enden mit einander leitend verbindet, wird auch er inducirt, und dadurch der Verlauf der Selbstinduction des ersten Drahtes verlangsamt, wodurch die impulsive Wirkung desselben abnimmt.

549. Die angeführten Tatsachen zeigen auf das Klarste, dass wenn man die Selbstinduction eine Trägheitserscheinung nennen will, die Trägheit sicher nicht der den Draht durchfliessenden Electricität zugeschrieben werden darf, denn wir haben gesehen, dass die Induction von der Form des Drahtes und dazu auch noch von ausserhalb desselben wirkenden Agentien, wie etwa in der Nähe befindlichen Eisenstücken oder geschlossenen Drahtkreisen bestimmt wird.

550. Indessen fällt es dem Geiste, wenn er einmal eine Analogie zwischen den Erscheinungen der Selbstinduction und denen der Bewegung materieller Körper gefunden hat, schwer, sich die Unterstützung dieser Analogie ganz zu versagen, oder gar sie als oberflächlich und irreführend zu betrachten. Die grundlegende dynamische Auffassung der Materie, nach der diese durch ihre Bewegung ein Receptor für Moment und Energie sein soll, ist so eng mit der Art und Weise unserer Erkenntnis verwebt, dass uns überall da, wo wir auch nur die geringste Aufforderung ihr zu folgen erhalten, sofort das Gefühl überkommt, als ob wir jetzt wirklich einen Pfad entdeckt haben, der uns früher oder später notwendig zum vollständigen Verständnis unseres Gegenstandes führen müsse.

551. Die Erfahrung lehrt, dass eine electromotorische Kraft, wenn sie zu wirken anfängt, nicht sofort auf einmal den Strom in seiner vollen Stärke in Bewegung setzt, vielmehr bemerkt man, dass dieser allmälig anwächst. Was tut nun diese Kraft in der ganzen Zeit, wo der Strom anwächst, da sie doch in dem Leiter keinen andern Widerstand als den, den sie auch sonst zu überwinden hat, findet? Die einzige Antwort, die wir darauf geben können, ist die: sie verstärkt den Strom und lässt ihn zu seiner vollen Intensität ansteigen.

Etwas ganz Analoges finden wir aber auch bei einer im gewöhnlichen Sinne so genannten Kraft. Wirkt eine solche continuirlich auf einen Körper in Richtung seiner Bewegung, so vermehrt sie sein Bewegungsmoment, sie teilt ihm kinetische Energie mit und giebt ihm dadurch die Möglichkeit, durch seine Bewegung Arbeit zu leisten, ganz so wie auch der Teil der electromotorischen Kraft, der nicht zur Ueberwindung des Widerstandes verbraucht wurde, die Stärke des Stromes anwachsen liess.

Hat nun der electrische Strom, da er so wie angegeben entsteht, Moment, oder kinetische Energie?

Dass er etwas ähnliches wie ein Moment besitzt, wissen wir aus den in den vorangehenden Artikeln gemachten Bemerkungen, er widersteht, wenn man ihn plötzlich aufhält, und er kann dabei für eine kurze Zeit eine sehr bedeutende electromotorische Kraft entwickeln.

Andererseits vermag ein leitender Kreis, in dem sich ein Strom bewegt, in Folge dieses Stromes Arbeit zu leisten, aber diese Leistungsfähigkeit kann nicht als der Energie ähnlich angesehen werden, sie ist wirklich und wahr Energie selbst.

Ueberlässt man zum Beispiel einen Strom, der von einer Voltaschen Batterie genährt wird, sich selbst, so fliesst er so lange, bis die disponible Energie der Batterie so weit aufgebraucht ist, dass sie den Widerstand des Stromkreises nicht mehr zu überwinden vermag. Während seiner Existenz hat er aber in seiner Bahn eine gewisse Wärmemenge erzeugt, und diese Wärmemenge ist dynamisch gemessen völlig der Energie gleich, die ursprünglich in dem Strome existirte. Ferner kann man den Strom dadurch eine Arbeit leisten lassen, dass man ihn Magnete bewegen macht. Wir wissen, dass in Folge der Bewegung der Magnete in dem Leiter, der den Strom führt, Ströme inducirt werden, und aus dem Lenzschen Gesetz folgt, dass deshalb unser Strom früher zu fliessen aufhören muss, als er es tun würde, wenn er lediglich den Widerstand seines Leiters zu überwinden hätte. So vermag man also einen Teil der Energie des Stromes statt in Wärme direct in mechanische Arbeit umzuwandeln.

552. Demnach scheint ein System, das einen electrischen Strom enthält, der Sitz von Energie einer besondern Art zu sein. Man kann aber einen electrischen Strom nicht anders, denn als kinetische Erscheinung auffassen*), seine Energie muss also kinetische Energie, das heisst Energie von der Form sein, wie sie ein Körper, wenn er sich bewegt, in Folge seiner Bewegung besitzt. Da aber einerseits die Energie eines sich bewegenden Körpers in keiner Weise von dem, was ausser ihm vorhanden ist, abhängt, und andererseits bei einem Strom die Gegenwart anderer Körper, wie wir wissen, seine Energie beeinflusst, so kann die in dem Leiter sich bewegende Electricität nicht als Träger der kinetischen Energie des Stromes betrachtet werden.

Dieser Zwiespalt veranlasst uns zu untersuchen, ob nicht, wenn ein Strom durch einen Leiter fliesst, in dem Raume ausserhalb dieses Leiters, wo also der Strom nicht vorhanden ist, wo aber seine electromagnetischen Wirkungen sich abspielen, irgend welche Bewegungsvorgänge sich zeigen.

Ich werde an dieser Stelle weder die Gründe discutiren, die die Existenz solcher Bewegungsvorgänge dem einen Orte mehr als dem andern zuschreiben, noch werde ich die Natur dieser Bewegungen zu fixiren suchen.

Augenblicklich geht mein Streben dahin, die Annahme, dass nämlich die Erscheinungen des electrischen Stromes die eines in Bewegung begriffenen Systems sind, und dass die Bewegung eines Teiles dieses Systems auf einen andern durch gewisse Kräfte übertragen zu werden vermag, in allen ihren Consequenzen zu verfolgen. Natur und Wirkungsweise dieser Kräfte werde ich, da sie nach Lagranges Methode aus den Bewegungsgleichungen eliminirt werden können, zu definiren auch nicht einmal versuchen. Die fünf nächsten Capitel dieses Werkes sind der Ableitung der Hauptgesetze der Theorie der Electricität aus der eben angeführten dynamischen Hypothese gewidmet. Ich verlasse damit den

*) Faraday, *Exp. Res.* (283).

Weg, der Weber und nach ihm so viele andere Forscher zu den vielen bemerkenswerten Entdeckungen und Experimenten geführt hat, der sie Ideen hat fassen lassen, die durch ihre Schönheit nicht minder als durch ihre Kühnheit hervorragen. Ich will aber dem Leser zeigen, dass man auch auf anderen Wegen zu denselben Resultaten zu gelangen vermag. Zudem scheint mir meine Methode naturgemässer zu sein, sie entspricht auch den in den andern Teilen dieses Buches angewendeten Untersuchungsweisen mehr, als die durch die Annahme einer Wirkung in die Ferne gebotene.

Cap. V.

Bewegungsgleichungen eines Systems mit einander verbundener Agentien.

——×——

Gesichtspunkte, die bei der Behandlung der Dynamik maassgebend sein können.

553. In der vierten Section des zweiten Teiles seiner *Mécanique Analytique* hat Lagrange seine berühmte Reduction der in der Dynamik gewöhnlich gebräuchlichen Bewegungsgleichungen eines Systems mit einander verbundener Körper auf eine Zahl von Gleichungen, die der Anzahl von Freiheitsgraden, dessen das System sich erfreut, gleich ist, gegeben.

Später hat Hamilton den Bewegungsgleichungen eines solchen Systems eine andere Form verliehen und damit*) das Gebiet der höhern Dynamik bedeutend erweitert.**)

Da mein Bestreben dahin geht, die Theorie der electrischen Phänomene in das Gebiet der Dynamik zu verlegen, so will ich, damit der Leser zur Anwendung seines dynamischen Wissens auf rein physikalische Fragen auch wohl vorbereitet sei, in diesem Capitel eine Auseinandersetzung der dynamischen Begriffe vom Standpunkte des Physikers geben.

554. Lagrange hat sich in seinem citirten Werke die Aufgabe gestellt, die Dynamik der Macht des Calculs zu unterwerfen. Demzufolge beginnt er damit, dass er die elementaren Relationen für die dynamischen Grössen genau in der Ausdrucksweise der entsprechenden Relationen, die zwischen rein algebraischen Grössen walten, aufstellt. Aus den so erhaltenen Grundgleichungen leitet er dann lediglich durch Rechnung seine Endgleichungen ab. Lagranges Methode besteht vom mathematischen Standpunkt betrachtet in der Elimination gewisser Grössen, die in den ge-

*) S. Cayley's *Report on Theoretical Dynamics*, British Association 1857 Thomson und Tait, *Theoretische Physik*.

**) Eine dritte und vierte Form der Bewegungsgleichungen findet der Leser in einer vom Uebersetzer dieses in *Wiedemann's Annalen für Physik und Chemie* Bd. XV. p. 675—680 veröffentlichten Abhandlung. Anm. d. Uebers.

wöhnlichen Gleichungen für die Bewegung der zusammensetzenden Teile eines Systems auftreten, aus denselben, in der Herstellung der von diesen Grössen befreiten Endformeln.

Die Verfolgung der einzelnen Schritte dieser Elimination ist sehr dazu angetan, den Studirenden mit mathematischen Rechnungen und Operationen vertraut zu machen, für diesen Zweck ist es daher von Vorteil, wenn man in die Ableitung der Endgleichungen von dynamischen Begriffen möglichst wenig Gebrauch macht. Wir wollen aber gerade für unser dynamisches Wissen Vorteil ziehen, daher werden wir uns zwar der Vorarbeit der Mathematiker bedienen, ihre Resultate aber aus der Sprache des Calculs in die der Dynamik übersetzen. Die Sätze, zu denen wir gelangen, sollen dann dem Leser nicht mathematische Operationen, sondern gewisse Eigenschaften, die den Körpern, wenn sie sich bewegen, zukommen, vor sein geistiges Auge führen.

Die Sprache der Dynamik hat seit Lagrange durch das Bestreben vieler Forscher, die Lehre von der Erhaltung der Energie gemeinverständlich zu machen, eine sehr bedeutende Bereicherung erfahren. Dementsprechend sind viele der im Folgenden zu berührenden Untersuchungen mit den Ausdrucksmitteln der gegenwärtigen Wissenschaft geführt worden. Ich werde mich auf die von Thomson und Tait veröffentlichte *Theoretische Physik* stützen und der Methode der genannten Physiker namentlich darin folgen, dass ich wie sie mit der Theorie der impulsiven Kräfte beginne.

Doch habe ich diese Methode so umgearbeitet, dass ich die besondere Betrachtung der Bewegung der einzelnen Teile des Systems umgehe und mich nur mit den Coordinaten oder Variabeln des ganzen Systems beschäftige. Zwar ist es von hoher Wichtigkeit, dass der Studirende die Verbindung, die zwischen der Bewegung der einzelnen Teile des Systems und den Veränderungen, die die Variabeln desselben erfahren, abzuleiten versteht, uns kommt es aber nur auf die Endgleichungen an, und diese sind auch ohne besondere Kenntnis jener Verbindungen deducirbar.

Die Variabeln.

555. Unter der Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems versteht man die Anzahl von Daten, die gegeben sein müssen, wenn die Lage und Configuration des Systems völlig bestimmt sein soll.

Die einzelnen Daten können zwar in verschiedenen Formen erteilt werden, ihre Anzahl hängt aber von der Natur des Systems selbst ab, und kann nicht beliebig verändert werden.

Um der Vorstellung zu Hilfe zu kommen, wollen wir uns das System durch einen geeigneten Mechanismus mit einer Anzahl beweglicher Stücke verbunden denken. Die beweglichen Stücke sollen sich nur längs geraden Linien verschieben können, und sonst keiner Bewegung fähig sein. Der

Mechanismus darf keine Trägheit besitzen, er soll durch keine der ins Spiel kommenden Kräfte deformirt werden können und nirgends Reibungswiderstand zu überwinden haben. Ich führe diesen rein gedanklichen Mechanismus nur ein, um dem Leser für die Begriffe, Lage, Geschwindigkeit und Moment, die bei Lagrange lediglich als rein algebraische Grössen aufgefasst werden, auch eine mechanische Vorstellung geben zu können.

Ich fixire die Lage eines der beweglichen Stücke, indem ich seinen Abstand q von einem auf seiner Bewegungsgeraden liegenden festen Punkt gebe. Handelt es sich um ein einzelnes Stück, so bleibt diese Grösse q, wie später noch einzuführende Symbole, ohne weitere Bezeichnung, wollen wir aber alle Stücke in Betracht ziehen, so unterscheiden wir die ihnen bezüglich zugehörenden Grössen durch die Indices $_1, _2, \ldots$

Wenn für jedes der Stücke seine ihm zugehörige Grösse q gegeben ist, so ist die Lage aller beweglichen Stücke bekannt, daher durch den eingeführten Mechanismus auch die Configuration unseres Systems bestimmt. Die Grössen q sind also die Variabeln unseres Systems.

Die Geschwindigkeiten.

556. Während der Bewegung des Systems ändert sich seine Configuration in bestimmter Weise. Diese Configuration ist aber in jedem Augenblick durch die Werte, die die Variabeln q in diesem Augenblick haben, gegeben. Daher wird die Geschwindigkeit und ebenso die Configuration für jeden Teil des Systems vollständig definirt sein, wenn die Variabeln q und die Veränderungen, die diese in der Zeiteinheit erleiden, das heisst, die Geschwindigkeiten dq/dt (oder in der Newtonschen Schreibweise $\dot{q}$) bekannt sind.

Die Kräfte.

557. Durch geeignete Regulirung der Geschwindigkeiten, mit denen die Variabeln sich ändern, kann man dem System irgend eine mit den Verbindungen seiner einzelnen Teile verträgliche Bewegung erteilen. Man wird zu dem Behufe die beweglichen Stücke, die mit dem System durch unsern Mechanismus verknüpft sind, längs ihren Bewegungsgraden in besonderer Weise zu verschieben haben. Das kann man nicht ausführen, ohne dass man an jedem Stück eine gewisse dasselbe längs seiner Bewegungsgraden treibende Kraft wirken lässt.

Ich bezeichne die Kraft, die an einem Stücke, dessen Variabele q_r ist, um den betreffenden Erfolg in der Bewegung des Systems zu erzielen, angebracht werden muss, mit F_r. Das System der Kräfte F ist dann infolge der Verbindungen, die zwischen unserm System und den beweglichen Stücken bestehen sollten, dem System von Kräften, welches die vorgeschriebene Bewegung unseres Systems wirklich zu Stande bringt, wie auch sonst diese Kräfte beschaffen sein mögen, mechanisch äquivalent.

Die Momente.

558. Bewegt sich ein Körper in der Weise, dass seine Configuration in Bezug auf die ihn angreifende Kraft stets dieselbe bleibt (was z. B. bei einem einzelnen in Richtung der Kraftwirkung sich bewegenden Partikel stattfindet), so wird die ihn bewegende Kraft durch das Verhältnis, in dem sein Moment anwächst, gemessen. Wir haben demnach, falls wir mit F die bewegende Kraft, mit p das Moment des betreffenden Körpers bezeichnen,

$$F = \frac{dp}{dt},$$

also

$$p = \int F dt.$$

Das Zeitintegral einer Kraft heisst der *Impuls* derselben, darnach ist das Moment eines sich bewegenden Körpers zu einer bestimmten Zeit der Kraftimpuls, der den Körper aus einem Ruhezustand in den zu dieser Zeit ihm eigenen Bewegungszustand versetzen würde.

Bei einem zusammengesetzten System ändert sich die Configuration fortwährend nach einem Verhältnis, welches von allen Geschwindigkeiten $\dot{q}$ abhängt, hier kann man also das Moment nicht mehr als das Zeitintegral der auf dasselbe wirkenden Kraft ansehen.

Man gelangt aber auch hier zu dem Begriffe des Moments, wenn man den Impuls auf sehr kleine Zeitintervalle reducirt.

Bezeichnet man mit δq das Increment einer Variabelen q während der Zeit δt und mit $\dot{q}'$ den grössten Wert, den die Geschwindigkeit dieser Variabelen in dem Zeitintervall δt besitzt, so wird jenes Increment δq nicht grösser als $\dot{q}'\delta t$ sein.

In dem Falle, wo das System aus dem Ruhezustande heraustritt, und unter der Einwirkung von Kräften sich constant nach derselben Richtung bewegt, ist $\dot{q}'$ offenbar die Endgeschwindigkeit am Ende des Zeitintervalls δt. Im allgemeinen trifft das nicht zu. Wenn aber die Configuration (q) unseres Systems im Beginne und die Geschwindigkeiten $(\dot{q})$ am Ende des Zeitintervalls δt gegeben sind, so können wir uns vorstellen, dass diesem System in der kurzen Zeit δt seine ganze Endgeschwindigkeit $(\dot{q})$ mitgeteilt wird, die Endconfiguration wird dann $(q + \delta q)$, und die Incremente δq_1, $\delta q_2 \ldots$ werden jedenfalls kleiner als die bezüglichen Grössen $\dot{q}_1 \delta t$, $\dot{q}_2 \delta t \ldots$ sein.

Je kleiner man das Zeitintervall δt voraussetzt, um so grössere Kräfte muss man auf das System einwirken lassen, wenn es innerhalb dieses Intervalls wirklich seine ganze Endgeschwindigkeit plötzlich annehmen soll. Die Kräfte wachsen so ins Unbegrenzte, ihr Zeitintegral erstreckt über das Zeitintervall δt, ihr Impuls, bleibt aber endlich.

Man bezeichnet den Grenzwert, gegen den der Impuls convergirt, wenn man die Wirkungsdauer der den Impuls hervorbringenden Kraft bis zum Verschwinden verkleinert, als *Instantanen Impuls*.

Das *Moment* in Bezug auf eine Variabele ist dann zu einer bestimmten Zeit der der betreffenden Variabelen entsprechende instantane Impuls, den das System erfährt, wenn es ganz plötzlich aus dem Ruhezustand in den Bewegungszustand, den es zu der bestimmten Zeit besitzt, versetzt wird.

Die Momente eines Systems zu einer bestimmten Zeit hängen an sich lediglich von der zu dieser Zeit gerade herrschenden Bewegung des Systems ab, sie werden in keiner Weise durch die vorangegangenen Zustände beeinflusst. Man darf daher unsere Conception, dass die Momente durch instantane Impulse, die das System aus der Ruhe in den betreffenden Bewegungszustand versetzen, hervorgebracht werden, nur als zur Definition ihrer Grösse dienend betrachten.

Bei einem einfachen Partikel ist das Moment proportional seiner Geschwindigkeit, bei einem zusammengesetzten System ist dasselbe in Bezug auf jede der Variabeln eine lineare Function der Geschwindigkeiten aller Variabeln.

Sind $p_1, p_2, \ldots$ die Momente des Systems in Bezug auf die Variabeln $q_1, q_2, \ldots$ zur Zeit t, wenn die Variabeln die Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots$ besitzen, und geben $p_1', p_2', \ldots$ ihre Werte zu einer andern Zeit t', wenn die Geschwindigkeiten sich um die Beträge $\dot{q}_1' - \dot{q}_1, \dot{q}_2' - \dot{q}_2, \ldots$ geänder haben, so erhält man für die Impulse, die diese Geschwindigkeitsänderungen hervorzubringen im Stande sind, die Grössen

$$p_1' - p_1, \; p_2' - p_2, \ldots$$

Arbeit eines kleinen Impulses.

559. Die Arbeit, die die Kraft F_1 während des Impulses leistet, ist

$$W = \int F_1 dq_1$$

oder

$$W = \int F_1 \dot{q}_1 dt.$$

Sei $\dot{q}_1'$ der grösste und $\dot{q}_1''$ der kleinste Wert, den die Geschwindigkeit $\dot{q}_1$ während der Wirkungsdauer der betreffenden Kraft besitzt. Wir haben dann die Ungleichungen

$$W < \dot{q}_1' \int F dt \text{ oder } W < \dot{q}_1'(p_1' - p_1),$$

$$W > \dot{q}_1'' \int F dt \text{ oder } W > \dot{q}_1''(p_1' - p_1).$$

Lässt man den Impuls $\int F dt$ ins Unbegrenzte abnehmen, so nähern

sich q_1' und q_1'' von beiden Seiten dem q_1 und fallen schliesslich mit dieser Grösse zu einer zusammen. Schreibt man demnach $p_1' - p_1 = \delta p_1$, so wird

$$W = q_1 \delta p_1.$$

δp_1 ist der sehr kleine Impuls, daher können wir sagen:

Die Arbeit, die ein sehr kleiner Impuls zu einer bestimmten Zeit in Bezug auf eine Variabele des Systems leistet, ist gleich dem Product aus diesem kleinen Impuls in die zu der betreffenden Zeit herrschende Geschwindigkeit, mit der sich die betrachtete Variabele ändert.

Die kinetische Energie als Function der Momente und Variabeln, ihre Variation.

560. So oft man an einem conservativen System dadurch, dass man es in Bewegung setzt, Arbeit leistet, teilt man ihm Energie mit, welche ihm die Möglichkeit giebt, seinerseits den gleichen Betrag an Arbeit gegen Widerstände, die sich seiner Bewegung entgegen stellen, aufzuwenden.

Man bezeichnet diese Energie, die ein System infolge seiner Bewegung besitzt, als *Kinetische Energie*. Sie rührt von der Arbeit her, die die Kräfte, während sie das System in Bewegung setzen und in Bewegung erhalten, aufwenden müssen.

Dieser Definition entsprechend ist die Aenderung δT, welche die kinetische Energie T eines Systems erfährt, wenn diesem ein momentan wirkender Impuls von den Componenten $\delta p_1, \delta p_2, \ldots$ erteilt wird, nach den Resultaten des vorangehenden Artikels

$$\text{1 a)} \qquad \delta T = q_1 \delta p_1 + q_2 \delta p_2 + \ldots = \Sigma q \delta p.$$

Wir können aber dieselbe Variation auch noch in anderer Weise bilden. Die kinetische Energie eines Systems hängt nämlich zu einer bestimmten Zeit nur von dem zu dieser Zeit stattfindenden Bewegungszustande des Systems ab, und da dieser Zustand vollständig definirt ist, wenn die Variabeln und die Momente gegeben sind, so folgt, dass die kinetische Energie sich als Function dieser Variabeln und Momente des Systems muss darstellen lassen. Ich bezeichne die so zuerst von Hamilton definirte kinetische Energie in ihrer Abhängigkeit von den Variabeln q und den Momenten p durch T_p, und habe für die vollständige Variation dieser Grösse

$$\text{1 b)} \qquad \delta T_p = \Sigma \left(\frac{\partial T_p}{\partial p} \delta p \right) + \Sigma \left(\frac{\partial T_p}{\partial q} \delta q \right).$$

Für jede wirklich stattfindende Bewegung ist aber

$$\delta q = \dot{q} \delta t,$$

lässt man also die Zeit δt des Impulses unendlich abnehmen, so verschwindet

schliesslich δt und damit auch δq*). Die Vergleichung der beiden Formeln 1a) und 1b) ergiebt nunmehr die Beziehung

2) $$\dot{q} = \frac{\partial T_p}{\partial p}.$$

Die der Variabeln q entsprechende Geschwindigkeit ist also gleich dem partiellen Differentialquotienten der kinetischen Energie (als Function der Variabeln und der Momente aufgefasst) mit Bezug auf das dieser Variabeln entsprechende Moment.

Wir sind bei der Ableitung dieses Resultats von der Betrachtung impulsiver Kräfte ausgegangen und haben demzufolge die Configuration des Systems während der Wirkung dieser Kräfte in keiner Weise berücksichtigt. Nun kann man ein System in einen bestimmten Zustand entweder durch plötzliche momentane, oder durch allmälige successive Ueberführung in denselben versetzen. Die Variabeln und die entsprechenden Geschwindigkeiten und Momente hängen zu einer bestimmten Zeit nur von dem Zustand ab, in dem das System sich zu dieser Zeit wirklich befindet; sie werden nicht von den diesem Zustande vorausgegangenen Zuständen bestimmt.

Daher bleibt unsere Gleichung 2) unter allen Umständen bestehen, wir mögen das System durch instantane Impulse oder sonst wie in seinen wirklichen Zustand versetzen.

Wir dürfen also fortan von der Hilfsbetrachtung impulsiver Kräfte wieder absehen, wir dürfen auch die enge Begrenzung, die wir der Wirkung solcher Kräfte gezogen haben, und ebenso die Beschränkung hinsichtlich der während der Wirkung dieser Kräfte eintretenden Configurationsänderungen fallen lassen.

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

561. Die vollständige Variation von T_p ist

1a) $$\delta T_p = \Sigma \left(\frac{\partial T_p}{\partial p} \delta p + \frac{\partial T_p}{\partial q} \delta q \right),$$

und diese Gleichung gilt für jede beliebige Bewegung des Systems. Ebenso findet auch die im vorigen Artikel abgeleitete Beziehung

2a) $$\frac{\partial T_p}{\partial p} \delta p = \dot{q} \delta p$$

ganz allgemein auf jede beliebige Bewegung ihre Anwendung.

---

*) Die Grössen δp reduciren sich nicht auf Null. Es ist nämlich $\delta p = \int F \delta t$, F bedeutet die Kraft, die man anwenden muss, um innerhalb der unendlich kleinen Zeit δt dem System die ganze Geschwindigkeit $\dot{q}$ zu erteilen. Je kleiner nun δt ausfällt, desto grösser muss F werden, $F \delta t$ wird sich also im allgemeinen mit δt nicht zugleich auf Null reduciren. Immerhin ist der Beweis der Formel 2) nicht sehr streng. Anm. d. Uebers.

Bewegt sich das System in irgend welcher Weise, aber so, dass den Bedingungen, die die Verbindungen seiner einzelnen Teile auferlegen, genügt wird, das heisst, geht die Bewegung so vor sich, wie sie bei der betreffenden Sonderart des betreffenden Systems vor sich gehen **kann**, so hat man

$$\delta p = \frac{dp}{dt}\,\delta t, \quad \delta q = \dot{q}\,\delta t,$$

mithin

2b) $$\frac{\partial T_p}{\partial p}\,\delta p = \frac{dp}{dt}\,\dot{q}\,\delta t = \frac{dp}{dt}\,\delta q.$$

Die Gleichung 1a) geht also über in

1b) $$\delta T_p = \Sigma\left[\left(\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T_p}{\partial q}\right)\delta q\right].$$

Die Aenderung, die die kinetische Energie erleidet, rührt aber daher, dass die auf das System wirkenden Kräfte F an demselben eine Mehrarbeit leisten, deren Grössen gleich $\Sigma(F\delta q)$ ist.

Wir haben daher nach dem Princip der Erhaltung der Energie auch

1c) $$\delta T_p = \Sigma(F\delta q)$$

oder

3) $$\Sigma\left(\left(\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T_p}{\partial q} - F\right)\delta q\right) = 0.$$

Die Variabeln δq sind alle von einander unabhängig, sie variiren also auch unabhängig von einander.

Demnach löst sich die Gleichung 3) in die Einzelgleichungen

4) $$F_r = \frac{dp_r}{dt} + \frac{\partial T_p}{\partial q_r}\,.$$

auf.

Die Kraft F_r und das Moment p_r entsprechen der Variabeln q_r. Die Anzahl der Gleichungen von der unter 4) gegebenen Form ist so gross wie die Anzahl der **unabhängigen** Variabeln, von denen die Configuration des Systems notwendig und hinreichend bestimmt wird.

Die eben abgeleitete Form der Bewegungsgleichungen ist zuerst von **Hamilton** aufgestellt und bewiesen worden. Darnach besteht die einer Variabeln entsprechende Kraft aus zwei Teilen. Der erste ist gleich dem Verhältnis, in dem das der betreffenden Variabeln entsprechende Moment sich mit der Zeit ändert, der zweite gleich dem Verhältnis, in dem die als Function der Momente und Variabeln aufgefasste kinetische Energie mit der bezüglichen Variabeln variirt.

Die kinetische Energie als Function der Momente und Geschwindigkeiten.

562. Es seien $p_1, p_2, \ldots$ die Momente, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots$ die Geschwindigkeiten eines Systems zu einer bestimmten Zeit. Ich nehme an, dass das System sich so bewegt, dass zu einer andern Zeit seine Momente $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ und seine Geschwindigkeiten $\dot{\mathfrak{q}}_1, \dot{\mathfrak{q}}_2, \ldots$ das $n$fache ihrer frühern Beträge erreichen, so dass

$$\mathfrak{p}_1 = n p_1, \quad \mathfrak{p}_2 = n p_2, \ldots; \quad \dot{\mathfrak{q}}_1 = n \dot{q}_1, \quad \dot{\mathfrak{q}}_2 = n \dot{q}_2, \ldots$$

ist. Offenbar wird dadurch den Bedingungen des Systems in keiner Weise zu nahe getreten.

Aendert sich n um δn, so erleiden diese Momente und Geschwindigkeiten die bezüglichen Aenderungen

$$\delta \mathfrak{p}_1 = p_1 \delta n, \quad \delta \mathfrak{p}_2 = p_2 \delta n, \ldots; \quad \delta \dot{\mathfrak{q}}_1 = \dot{q}_1 \delta n, \quad \delta \dot{\mathfrak{q}}_2 = \dot{q}_2 \delta n, \ldots.$$

Die Arbeiten, die die Kräfte F dabei leisten, sind also

$$F_1 \delta \mathfrak{q}_1 = \dot{\mathfrak{q}}_1 \delta \mathfrak{p}_1 = \dot{q}_1 p_1 n \delta n, \quad \mathfrak{F}_2 \delta \mathfrak{q}_2 = \dot{\mathfrak{q}}_2 \delta \mathfrak{p}_2 = \dot{q}_2 p_2 n \delta n, \ldots.$$

Ich lasse jetzt n von 0 bis 1 ansteigen, das System geht dabei aus seinem Ruhezustande in den Zustand über, wo es die Geschwindigkeiten $\dot{q}$ und die Momente p besitzt.

Die gesammte Arbeit, die dazu nötig ist, um diesen Bewegungszustand hervorzubringen, hat dann dem obigen zufolge den Wert

$$W = (\dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 + \ldots) \int_0^1 n\, dn,$$

oder weil

$$\int_0^1 n\, dn = \frac{1}{2}$$

ist, und die so aufgewendete Arbeit der kinetischen Energie, die das System in seinem durch die Arbeit hervorgebrachten Zustande besitzt, äquivalent ist,

$$1) \qquad T_{p\dot{q}} = \frac{1}{2} (p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + \ldots).$$

$T_{p\dot{q}}$ bezeichnet die kinetische Energie des Systems in ihrer Abhängigkeit von den Momenten und Geschwindigkeiten desselben.

Man bemerke, dass dieser neue Ausdruck für die kinetische Energie die Variabeln q nicht mehr enthält und gleich der halben Summe der Producte der Momente in die entsprechenden Geschwindigkeiten ist.

Ich reserviere das Symbol $T_{p\dot{q}}$ für die so als Function der Momente und Geschwindigkeiten und nur dieser definirte kinetische Energie.

Die kinetische Energie als Function der Geschwindigkeiten und Variabeln.

563. Es giebt noch eine dritte — und wie man im allgemeinen mit Recht annimmt — fundamentale Darstellung für die kinetische Energie. Durch Auflösung des Systems der Gleichungen

$$\dot{q}_r = \frac{\partial T_p}{\partial p_r}$$

nach den p erhält man nämlich die Momente als Functionen der Geschwindigkeiten ausgedrückt. Setzt man dann ihre so erlangten Werte in der für $T_{p\dot{q}}$ gegebenen Gleichung 1) ein, so resultirt eine neue mit $T_{\dot{q}}$ zu bezeichnende Darstellung für die kinetische Energie, die nur durch die Geschwindigkeiten und Variabeln, nicht aber durch die Momente des Systems bestimmt wird. In dieser Form ist die kinetische Energie in den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen vertreten.

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.

564. Die drei Symbole T_p, $T_{p\dot{q}}$, $T_{\dot{q}}$ stellen eine und dieselbe Grösse, die kinetische Energie, dar, daher ist identisch

$$T_p + T_{\dot{q}} - 2T_{p\dot{q}} = 0.$$

Beachtet man den für $T_{p\dot{q}}$ in Art. 562 gegebenen Wert, so folgt

$$T_p + T_{\dot{q}} - p_1\dot{q}_1 - p_2\dot{q}_2 - \ldots = 0,$$

und wenn alle Grössen $p, \dot{q}, q$ variiren,

$$\begin{aligned} 0 = \; & \left(\frac{\partial T_p}{\partial p_1} - \dot{q}_1\right)\delta p_1 + \left(\frac{\partial T_p}{\partial p_2} - \dot{q}_2\right)\delta p_2 + \ldots \\ & + \left(\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_1} - p_1\right)\delta \dot{q}_1 + \left(\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_2} - p_2\right)\delta \dot{q}_2 + \ldots \\ & + \left(\frac{\partial T_p}{\partial q_1} + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_1}\right)\delta q_1 + \left(\frac{\partial T_p}{\partial q_2} + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_2}\right)\delta q_2 + \ldots \end{aligned}$$

Die Variationen der q und $\dot{q}$ sind zwar von einander unabhängig, aber die Variationen der p werden durch die der q und $\dot{q}$ mit bestimmt, man darf daher die Factoren der einzelnen Variationen nicht für sich der Null gleich setzen.

Allein, da das System der Gleichungen

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_r} = \dot{q}_r \tag{1}$$

nach Art. 560 für jede beliebige Bewegung besteht, so verschwinden die Factoren der δp von selbst schon, und nunmehr darf man die Factoren der δq und $\delta \dot{q}$ einzeln der Null gleich setzen.

Indem man das zunächst für die Factoren der $\delta \dot{q}$ tut, erhält man das System der Gleichungen

$$\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_r} = p_r, \tag{2}$$

die den Satz aussprechen, dass das einer Variabeln q_r entsprechende Moment p_r gleich dem Differentialquotienten der als Function der Geschwindigkeiten und Variabeln ausgedrückten kinetischen Energie nach der zur betreffenden Variabeln gehörenden Geschwindigkeit ist.

Weiter folgt, weil die δq von einander und von den $\delta \dot{q}$ unabhängig sind, das System der Gleichungen

$$\frac{\partial T_p}{\partial q_r} + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_r} = 0. \tag{3}$$

Das Verhältnis, in dem sich die als Function der Momente und Variabeln aufgefasste kinetische Energie für eine Variabele q_r ändert, ist entgegengesetzt gleich dem Verhältnis, in dem sich die als Function der Geschwindigkeiten und Variabeln aufgefasste kinetische Energie ändert.

Wir haben nunmehr nur noch die Formel 3) mit der in Art. 561 angeführten Hamiltonschen Form der Bewegungsgleichungen zu verbinden, um sofort in dem Gleichungssysteme

$$F_r = \frac{dp_r}{dt} - \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_r} \tag{4}$$

die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen eines zusammengesetzten Systems zu erhalten.

Explicite Darstellung der kinetischen Energie als Function der Momente bezüglich der Geschwindigkeiten.

565. Bis jetzt ist nur für eine Darstellung der kinetischen Energie, für die, wo die betreffende Energie als Function der Momente und Geschwindigkeiten auftrat, ein expliciter Ausdruck abgeleitet worden, von den beiden andern Darstellungen ist uns zwar die Form noch nicht bekannt, sie lässt sich aber leicht mit Hilfe der schon eruirten Darstellung unter Zuziehung der Sätze 1) und 2) des vorangehenden Artikels eruiren.

Ersetzt man in

$$T_{p\dot{q}} = \frac{1}{2}(p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + \ldots), \tag{1}$$

einmal die Geschwindigkeiten $\dot{q}$ und ein andermal die Momente p durch ihre aus den citirten Sätzen folgenden bezüglichen Werte $\partial T_p/\partial p$, $\partial T_{\dot{q}}/\partial \dot{q}$, so ergiebt sich

$$2') \qquad T_p = \frac{1}{2}\left(p_1 \frac{\partial T_p}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial T_p}{\partial p_2} + \ldots\right).$$

$$3') \qquad T_{\dot{q}} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1 \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_2} + \ldots\right).$$

Daraus folgt nach dem Eulerschen Satz über homogene Functionen, das T_p eine homogene quadratische Function der Momente, $T_{\dot{q}}$ eine solche der Geschwindigkeiten ist. Die ersten Differentialquotienten von T_p nach den Momenten sind also homogene lineare Functionen dieser Momente, die von $T_{\dot{q}}$ nach den Geschwindigkeiten sind homogene lineare Functionen dieser Geschwindigkeiten, demnach sind in den beiden Gleichungssystemen

$$4) \qquad \frac{\partial T_p}{\partial p_r} = p_1 \frac{\partial^2 T_p}{\partial p_r \partial p_1} + p_2 \frac{\partial^2 T_p}{\partial p_r \partial p_2} + \ldots,$$

$$5) \qquad \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_r} = \dot{q}_1 \frac{\partial^2 T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_2} + \ldots$$

die zweiten Differentialquotienten nur noch von den Variabeln q abhängig.

Der Bequemlichkeit wegen setze ich

$$Q_{11} = \frac{\partial^2 T_p}{\partial p_1^2}, \quad Q_{12} = \frac{\partial^2 T_p}{\partial p_1 \partial p_2}, \ldots \quad Q_{rs} = \frac{\partial^2 T_p}{\partial p_r \partial p_s}, \ldots$$

$$P_{11} = \frac{\partial^2 T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_1^2}, \quad P_{12} = \frac{\partial^2 T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2}, \ldots \quad P_{rs} = \frac{\partial^2 T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s}, \ldots$$

und erhalte

$$2) \qquad T_p = \frac{1}{2}\left\{Q_{11} p_1^2 + 2 Q_{12} p_1 p_2 + \ldots\right\} = \frac{1}{2} \Sigma\Sigma\, Q_{rs} p_r p_s,$$

$$3) \qquad T_{\dot{q}} = \frac{1}{2}\left\{P_{11} \dot{q}_1^2 + 2 P_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \ldots\right\} = \frac{1}{2} \Sigma\Sigma\, P_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s.$$

Darin sind die P und Q Functionen der Variabeln q und nur dieser, sie sind also namentlich von den Momenten und Geschwindigkeiten unabhängig.

Die Momente als Functionen der Geschwindigkeiten; die Geschwindigkeiten als Functionen der Momente.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen 1) und 2) des vorangehenden und der Gleichungen 4) und 5) dieses Artikels folgen noch die beiden Gleichungssysteme

1) $$p_r = P_{r1} \dot{q}_1 + P_{r2} \dot{q}_2 + \dots,$$

2) $$\dot{q}_r = Q_{r1} p_1 + Q_{r2} p_2 + \dots.$$

Das erste System stellt die Momente als homogene lineare Functionen der Geschwindigkeiten, das zweite die Geschwindigkeiten als homogene lineare Functionen der Momente dar.

Trägheits- und Beweglichkeits-Momente und Producte.

Ist unser System ein starrer Körper, so heissen die Coefficienten P_{rr} mit gleichen Indices die *Trägheitsmomente* des Körpers, die Coefficienten P_{rs} mit ungleichen Indices weniger allgemein die *Trägheitsproducte* desselben. Beide Classen von Coefficienten sind dann absolute Constanten. Wenn das System keinen starren Körper constituirt, hängen diese Coefficienten, wie wir wissen, von den Variabeln des Systems ab, nichts desto weniger wird man aber jene Namen auch auf diesen allgemeinern Fall übertragen dürfen, wenn man nur im Auge behält, dass diese Momente und Producte von der Configuration, die das System in dem betreffenden Augenblick gerade hat, abhängen.

Entsprechend kann man die Coefficienten Q_{rr} mit gleichen Indices als *Beweglichkeitsmomente*, die Q_{rs} mit ungleichen Indices als *Beweglichkeitsproducte* bezeichnen. Doch werden wir nicht oft in Verlegenheit kommen, von diesen Beweglichkeitscoefficienten zu sprechen.

566. Ihrer Natur nach ist die kinetische Energie, wenn sie nicht verschwindet, eine positive Grösse. Demnach müssen die Coefficienten P und Q so mit einander verbunden sein, dass die Ausdrücke für $T_p, T_{\dot{q}}$ für keine Werte der Momente, bezüglich der Geschwindigkeiten negative Beträge zu ergeben vermögen. Wie die Theorie der bilinearen Functionen lehrt, haben die P und Q den folgenden Bedingungen zu genügen.

1) Die Trägheitsmomente P_{rr} und die Beweglichkeitsmomente Q_{rr} müssen alle positive Grössen sein, das giebt, wenn die Configuration von n Variabeln abhängt, $2n$ Bedingungen.

2) Die $(n-1)$ Determinanten $(n-1)$ten Grades die aus der Determinante

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & P_{n3} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

so gebildet sind, dass erst alle P mit dem Index $_1$, dann alle mit den Indices $_1$ oder $_2$, dann alle mit den Indices $_1$ oder $_2$ oder $_3$ u. s. f. fortfallen,

müssen ebenso wie die entsprechenden $n-1$ Determinanten der Q alle positive Grössen sein.

Im Ganzen sind also $2(2n-1)$ Bedingungsgleichungen zu erfüllen.

Schlussbemerkung.

567. Ich habe in diesem Grundriss der fundamentalen Principien aus der Dynamik eines zusammengesetzten Systems den Mechanismus, der die einzelnen Teile des Systems in vorgeschriebener Weise zusammenhält, ganz unberücksichtigt lassen können. Ich habe nicht einmal die Gleichungen hingeschrieben, mit Hilfe deren man aus den Veränderungen der Variabeln des ganzen Systems auf die Bewegung eines seiner Teile zu schliessen vermöchte. Alle Betrachtungen, die hier angestellt sind, beziehen sich lediglich auf diese Variabeln, ihre Geschwindigkeiten, ihre Momente und die Kräfte, welche sie abzuändern zwingen. Die Ableitungen beruhen auf den beiden Annahmen, dass erstens die Teile des Systems in solchen Beziehungen zu einander stehen, dass die Gleichungen, welche diese Beziehungen fixiren, die Zeit nicht explicite enthalten, und zweitens, dass die Veränderungen des Systems dem Principe der Erhaltung der Energie genügen.

Diese Uebersetzung der Methoden der reinen Dynamik in die Sprache der Physik ist keineswegs so unnötig wie es scheinen möchte. Lagrange und mit ihm die meisten seiner Nachfolger haben sich beim Ausbau jener Methoden im allgemeinen begnügt, ihre Richtigkeit zu beweisen. Dabei haben sie, um ihre ganze Aufmerksamkeit den Symbolen, mit denen sie operirten, zuwenden zu können, von der Bedeutung dieser Symbole ganz abstrahirt. Sie haben sich bestrebt, alle Begriffe ausser dem der reinen Grösse, ihren Betrachtungen fern zu halten, und nachdem sie einmal für die Begriffe der Geschwindigkeit, des Moments und der Energie in den Ausgangsgleichungen Symbole aufgestellt hatten, recurrirten sie nicht mehr auf dieselben. Wir haben, ganz im Gegensatz dazu, uns immer die Bedeutung der einzelnen Symbole vor Augen gehalten und haben auch die Hauptgleichungen in Worte gefasst, die die Resultate ohne Benutzung von Symbolen verkündeten.

Wir dürfen aber bei der Begründung der dynamischen Theorie einer andern Wissenschaft nicht von den Methoden der reinen Mathematik ganz absehen. Denn die Entwickelung dieser Methoden hat es ermöglicht, bei dem Ausbau der mathematischen Dynamik viele Wahrheiten ans Tageslicht zu bringen, die ohne den mathematischen Calcul nicht hätten entdeckt werden können. Das Richtige ist, dass wir die Dynamik sowohl physikalisch als mathematisch uns zu Eigen machen, wir müssen jede ihrer Formeln einerseits physikalisch zu interpretiren und andererseits mathematisch abzuleiten und zu verfolgen verstehen.

Noch eins muss ich erwähnen.

Will man Begriffe und Nomenclatur einer Wissenschaft ausbilden, die wie die Electricitätslehre es mit Kräften und deren Wirkungen zu tun hat, so müssen einem immer die Begriffe und Bezeichnungen, die die fundamentale Wissenschaft, die Dynamik, besitzt, vorschweben. Denn wenn man in der Ausbildung der betreffenden Wissenschaft noch nicht weit genug vorgeschritten ist, vermeidet man dadurch Widersprüche mit schon feststehenden Resultaten, und wenn man über dieselbe zu klareren Begriffen gelangt ist, dann hat man in der adoptirten Ausdrucksweise eine Hilfe, nicht ein Hindernis.

Cap. VI.

Dynamische Theorie des Electromagnetismus.

—×—

Kinetische und Potentielle Energie.

568. Ein electrischer Strom, der einen Leiter durchfliesst, besitzt, wie wir in Art. 552 gesehen haben, die Fähigkeit Arbeit zu leisten, und zwar besitzt er diese Fähigkeit ganz unabhängig von der Art der äussern electromotorischen Kraft, die ihn unterhält. Nun ist einerseits die Fähigkeit Arbeit zu leisten, wie sie auch entstehen mag, weiter nichts als Energie selbst, und andererseits ist Energie, wenn sie auch in sehr mannigfaltigen Formen auftreten kann, doch immer eine Grösse derselben Art. Die Energie eines electrischen Stromes wird sich also der Art nach von der sonst so genannten Energie nicht unterscheiden. Der Form nach kann sie aber entweder die Energie sein, die in der wirklichen Bewegung der Materie besteht, oder die Energie, welche sich bei Körpern, die auf einander Kraftwirkungen ausüben, in der Fähigkeit sich in Bewegung zu setzen, äussert.

In der zuerst genannten Form tritt die Energie als *Kinetische Energie* auf, und sie scheint in dieser Form, wenn man sich ihre Bedeutung einmal klar gemacht hat, eine so fundamentale physikalische Tatsache zu sein, dass man kaum an die Möglichkeit, sie in irgend etwas anderes auflösen zu können, glauben mag. In der zweiten Form ist sie die *Potentielle Energie*, und entsteht durch die Wirkung dessen, was wir Kraft nennen, das heisst der Tendenz zu Aenderungen der relativen Lage. Die Existenz der Kräfte wird man zwar als eine bewiesene Tatsache ansehen können, es ist aber doch merkwürdig, dass überall, wo es uns gelingt, den innern Mechanismus der Bewegung von Körpern aufzudecken, wir stets von dem Gefühl durchdrungen werden, als ob wir nunmehr eine wirkliche Bereicherung unseres endgiltigen Wissens erlangt hätten.

Natur des electrischen Stromes.

569. Der electrische Strom kann nur als kinetisches Phänomen aufgefasst werden. Die Tatsachen, die dafür sprechen, sind so zwingend, dass

selbst Faraday, der stets von den Unterstellungen, zu denen Bezeichnungen wie ‚electrischer Strom‘, ‚electrische Flüssigkeit‘ nur zu leicht verleiten, sich frei zu halten bemüht gewesen ist, von dem electrischen Strom, wie von etwas Sichfortbewegendem, nicht Angeordnetem spricht. Er ist für ihn ein progredirendes, nicht arrangirtes Etwas*).

Seine Wirkungen — man denke nur an die Electrolyse, an die Uebertragung der Electrisirung von einem Körper auf einen andern — sind alle progressiver Art. Zum Eintreten ihres vollen Effects gehört eine mehr oder minder grosse Zeit, sie haben die wesentlichen Eigenschaften der Bewegungen.

Von der Geschwindigkeit, mit der ein electrischer Strom von bestimmter Stärke sich in einem Leiter bewegt, weiss man freilich, wie ich schon bemerkt habe, noch nichts, sie mag einen Millimeter oder viele Hunderttausende von Kilometern in der Secunde betragen, ja man kann nicht einmal sagen, nach welcher Richtung die Electricität sich im Strome bewegt, ob die Richtung, die wir in einem Falle als die positive Richtung des Stromes bezeichnen, wirklich die Richtung ist, in der die Electricität fliesst**).

Auf diese nähern Verhältnisse kommt es aber in den nachfolgenden Untersuchungen gar nicht an, die Erkenntnis, dass ein electrischer Strom irgend eine Bewegungsart involvirt, genügt schon völlig für unsere Entwickelungen.

Dasjenige, was einen electrischen Strom in Bewegung setzt, hat man als electromotorische Kraft bezeichnet, ein Name, dessen man sich schon seit langer Zeit mit grossem Vorteil und ohne Schaden für die Präcision des wissenschaftlichen Ausdrucks bedient. Man muss aber unter electromotorischer Kraft stets eine solche Kraft verstehen, die nur auf Electricität, nie auf Körper wirkt. Sie darf also auch niemals mit dem, was wir mechanische Kraft nennen, confundirt werden, denn diese wirkt gerade umgekehrt auf Körper, nie auf Electricität, die sich in ihnen etwa befindet. Wie die electromotorischen Kräfte mit den mechanischen formell zusammenhängen, werden wir nicht eher erfahren können, als bis uns die Beziehungen, in denen die Electricität zur Materie steht, völlig klar geworden sind.

570. Die Arbeit, die eine gewöhnliche, mechanische Kraft an einem Körper, der ihrer Einwirkung nachgiebt, leistet, wird durch das Product dieser Kraft in den Betrag, um welchen der Körper nachgegeben hat, gemessen. Wird also Wasser durch eine Röhre hindurchgedrückt, so ist die Arbeit, die der Druck an einer bestimmten Stelle der Röhre in einer be-

*) *Exp. Res.* 283.

**) Seitdem Maxwell dieses geschrieben, hat man bekanntlich mit Hilfe des Hallschen Phänomens sowohl die absolute Geschwindigkeit eines Stromes als seine Richtung zu bestimmen versucht. Darnach würde der Strom einer Voltaschen Batterie nach der als negativ bezeichneten Richtung, also ausserhalb eines Daniellschen Elements vom Zink- zum Kupferpol fliessen und sich mit einer nur geringen Geschwindigkeit fortbewegen. Siehe A. v. Ettingshausen in *Wiedemanns Annalen* XI. p. 432 ff. Anm. des Uebers.

stimmten Zeit verrichtet, gleich diesem daselbst herrschenden Druck multiplicirt mit der Menge Wasser, die dort in der bestimmten Zeit vorbeigeht.

Das Joulesche Gesetz lehrt aber, dass ganz analog die Arbeit einer electromotorischen Kraft an einem Querschnitt eines Leiters durch das Product dieser Kraft in die Electricitätsmenge, die sie durch diesen Querschnitt hindurchtreibt, gemessen wird.

Demnach hat man unter *Arbeit einer electromotorischen Kraft* eine Grösse von ganz derselben Art wie unter Arbeit einer mechanischen Kraft zu verstehen. Beide Arbeiten werden durch dieselben Einheiten bestimmt.

Von der gesammten Arbeit, die eine electromotorische Kraft an einem Leiter leistet, wird ein Teil zur Ueberwindung des Widerstandes, den der Leiter dem durch sie in Bewegung gesetzten Strome entgegensetzt, verbraucht und erscheint als Wärme wieder. Ein zweiter Teil lässt die durch Ampère beobachteten electromagnetischen Phänomene zu Stande kommen, vermöge deren Leiter, während sie von Strömen durchflossen werden, sich gegen einander zu bewegen gezwungen werden. Der Rest wird zur Vermehrung der kinetischen Energie des Stromes verwandt und manifestirt sich in den von Faraday entdeckten Inductionserscheinungen der Ströme auf sich selbst.

Alles das berechtigt wol zu der Annahme, dass ein System materieller, von Strömen durchflossener Leiter, ein dynamisches System constituirt, das eine Ladung von Energie besitzt, von dem ein Teil potentiell, der andere Teil kinetisch ist.

Wie die einzelnen Teile dieses Systems mit einander verbunden sind, hat man noch nicht zu eruiren vermocht, allein wir besitzen Methoden, mit Hilfe deren wir die Dynamik eines Systems auch ohne Kenntnis seines innern Mechanismus zu verfolgen vermögen, und können diese auf unsern Fall anwenden.

Kinetische Energie eines von Strömen durchflossenen Leitersystems.

571. Allgemeinste Form. Ich fange die dynamische Untersuchung des von Strömen durchflossenen Leitersystems damit an, dass ich seine kinetische Energie in der möglich allgemeinsten Form aufstelle.

Es bestehe unser System aus einer Anzahl von Strombahnen, deren Gestalt und Lage durch die Werte eines Systems von Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ fixirt ist, die in ihrer Anzahl der Zahl von Freiheitsgraden, welche das System besitzt, gleich sind.

Rührte die ganze kinetische Energie dieses Systems lediglich aus der sichtbaren Bewegung seiner Teile her, so hätten wir für sie den Ausdruck

$$\begin{aligned} T_m = & \frac{1}{2}\left\{(x_1 x_1)\dot{x}_1\dot{x}_1 + (x_1 x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2 + (x_1 x_3)\dot{x}_1\dot{x}_3 + \ldots\right\} \\ & + \frac{1}{2}\left\{(x_2 x_1)\dot{x}_1\dot{x}_2 + (x_2 x_2)\dot{x}_2\dot{x}_2 + (x_2 x_3)\dot{x}_2\dot{x}_3 + \ldots\right\} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Allein in einem System von Leitern, die von electrischen Strömen durchflossen werden, verdankt ein Teil der kinetischen Energie der Existenz dieser Ströme seine Entstehung. Bezeichnet man also die Variabeln, von denen die Bewegung der Electricität und alles dessen, was etwa durch die Electricität regiert wird, mit $y_1, y_2, \ldots$, so wird die wirkliche kinetische Energie unseres Systems von Leitern in ihrer allgemeinsten Form durch eine homogene Function der Quadrate und Producte der Geschwindigkeit beider Variabelnsysteme dargestellt werden. Demnach wird man diese Energie in drei Teile zerlegen können. Der eine, T_m, enthält nur die Geschwindigkeiten des ersten Variabelnsystems $x_1, x_2, \ldots$, der zweite, T_e, hängt lediglich von den Geschwindigkeiten des zweiten Variabelnsystems $y_1, y_2, \ldots$, ab. Der dritte endlich, T_{me}, wird durch die Geschwindigkeiten beider Variabelnsysteme bestimmt.

Wir haben dann für die gesammte kinetische Energie T des Systems

$$T = T_m + T_e + T_{me}$$

$$T_m = \frac{1}{2}(x_1 x_1)\dot{x}_1^2 + (x_1 x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2 + \ldots + \frac{1}{2}(x_2 x_2)\dot{x}_2^2 + \ldots$$

$$T_e = \frac{1}{2}(y_1 y_1)\dot{y}_1^2 + (y_1 y_2)\dot{y}_1\dot{y}_2 + \ldots + \frac{1}{2}(y_2 y_2)\dot{y}_2^2 + \ldots$$

$$T_{me} = (x_1 y_1)\dot{x}_1\dot{y}_1 + (x_1 y_2)\dot{x}_1\dot{y}_2 + \ldots + (x_2 y_2)\dot{x}_2\dot{y}_2 + \ldots$$

572. Unabhängigkeit von den Electricitätsmengen. Wenn die Variabeln y ebenso wie die x reine dynamische Veränderungen bestimmten, so wären die Coefficienten (xx), (yy), (xy) im allgemeinen Functionen aller Coordinaten, der x sowohl als der y; die Variabeln y sollten sich aber auf electrische Vorgänge beziehen, und hier lässt sich aus leicht beobachtbaren Tatsachen schliessen, dass sie in den genannten Coefficienten nicht vertreten sein können.

Wenn man nämlich die Leiter des Systems in Ruhe und die sie durchfliessenden Ströme constant auf gleicher Höhe erhält, so lehrt die Erfahrung, dass der einmal im Felde etablirte Zustand sich in keiner Weise ändert. Allein in diesem Falle sind zwar die x und die $\dot{y}$ constant, die y aber variabel, und da, wie gesagt, die kinetische Energie unseres Systems sich nicht ändern sollte, dürfen die y weder in dem Ausdrucke der kinetischen Energie noch in den Formeln, die das, was sonst etwa tatsächlich vor sich geht, beschreiben, enthalten sein.*)

*) Der im Text gegebene Beweis für die Unabhängigkeit der kinetischen Energie T von den Variabeln y scheint nicht recht stichhaltig zu sein, denn in dem angenommenen Falle $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \ldots = 0$ fallen T_m und T_{me} überhaupt fort, es bleibt nur T_e, und der Beweis kann sich eigentlich nur auf diese Grösse beziehen.

Anm. des Uebers.

Ist ein Leiter linear (Definition in Art. 273), so genügt in Folge der Continuitätsgleichung eine einzige Variabele y, um den in ihm verlaufenden Strom zu charakterisiren. Wenn daher unser System nur lineare Leiter enthält, so wird je eine der Variabeln y zu je einem der Leiter gehören, und $\dot{y}_\varkappa$ wird die Stärke des in dem $\varkappa$ten Leiter fliessenden Stromes angeben.

Die bisherigen Ableitungen und Bemerkungen bleiben noch richtig, wenn man statt der Leiter biegsame Röhren und statt der Ströme von Electricität solche einer incompressibeln Flüssigkeit substituirt. Hier würde die kinetische Energie T sowohl von den Geschwindigkeiten, mit denen sich die Röhren für sich bewegen, als auch von den Geschwindigkeiten, mit denen die betreffende Flüssigkeit durch ihr Inneres strömt, abhängen, ihre Coefficienten, könnten aber nur Functionen der Variabeln x, der Grössen, die die Configuration und Lage der Röhren fixiren, sein. Das stimmt mit dem, was wir vorhin für diese Grösse eruirt haben, als unser System aus Leitern, in denen sich Ströme bewegten, bestehen sollte. Die beiden Fälle werden aber durch eine tiefe Kluft von einander getrennt.

Wenn nämlich Flüssigkeiten durch Röhren strömen, so afficirt die Bewegung der Flüssigkeit in der einen Röhre nicht direct die der Flüssigkeit in einer andern Röhre und ebenso wenig die Bewegung dieser Röhre selbst. Demnach werden in T_e nur die Quadrate, nicht aber die Producte der Strömungsgeschwindigkeiten vertreten sein. Ferner kann T_{me} nur noch aus Gliedern zusammengesetzt sein, in denen die Geschwindigkeiten den einzelnen bezüglichen Röhren zugehören, die Geschwindigkeit $\dot{y}_\varkappa$, mit der die Flüssigkeit durch die $\varkappa$te Röhre strömt, wird also nur mit der Geschwindigkeit $\dot{x}_\varkappa$ multiplicirt sein, mit der sich d i e s e Röhre bewegt.

Im Gegensatz dazu wirken electrische Ströme, wie wir wissen, direct aufeinander. Hier wird die Vereinfachung nicht eintreten, und wir müssen annehmen, dass T_e auch Glieder von der Form $(y_r y_s)\, \dot{y}_r \dot{y}_s$ enthält, das heisst, dass sich irgend etwas bewegt, dessen Bewegung von den Stromstärken b e i d e r Ströme $\dot{y}_r$ und $\dot{y}_s$ abhängt. Dieses sich bewegende Etwas, ist, was es auch sein mag, nicht blos auf das Innere der bezüglichen beiden Stromleiter beschränkt, sondern erstreckt sich wahrscheinlich durch den ganzen sie umgebenden Raum.

Ponderomotorische Kräfte.

573. Wir wenden nun auf unser System die L a g r a n g e schen Gleichungen an.

Sei X' die Kraft, welche die Veränderung einer Variabelen x, also einer der Coordinaten, von denen Form und Lage der Leiter abhängen, bewirkt, die bezeichnete Grösse ist dann eine Kraft im gewöhnlichen Sinne des Wortes, also eine solche, die sich in einer Tendenz zu Configurationsänderungen äussert.

Den Lagrange'schen Gleichungen zufolge haben wir

$$X' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x}. \tag{1}$$

Da T aus drei Teilen besteht, so folgt auch

$$X' = X'_m + X'_e + X'_{me}, \tag{2}$$

und hierin ist

$$\begin{aligned} X'_{me} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_m}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T_m}{\partial x}, \\ X'_e &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_e}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T_e}{\partial x}, \\ X'_{me} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{me}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T_{me}}{\partial x}, \end{aligned} \tag{3}$$

Mechanische Kraft. Die Grösse X'_m bedarf, da sie eine Kraft im gewöhnlichen mechanischen Sinne des Wortes darstellt, weiter keiner Erläuterung.

Electromagnetische Kraft. Ferner ist T_e von $\dot{x}$ unabhängig, demnach wird

$$X'_e = -\frac{\partial T_e}{\partial x}$$

und diese Grösse stellt die mechanische Kraft dar, die man auf einen Leiter muss wirken lassen, wenn die ihn angreifende electromagnetische Kraft neutralisirt werden soll. Sie wird durch das Verhältnis, in dem die rein electrokinetische Energie mit wachsender Coordinate x abnimmt, gemessen. Da Wirkung und Gegenwirkung einander gleich sind, so ist

$$X_e = -X'_e = \frac{\partial T_e}{\partial x}$$

die electromagnetische Kraft, von der der Leiter angegriffen wird, und gleich dem Verhältnis, in dem die rein electrokinetische Energie mit wachsender Coordinate x zunimmt. Offenbar hängt X_e von den Quadraten und Producten der Stromstärken ab, die electromagnetische Kraftwirkung bleibt also ihrem Sinne nach ungeändert, wenn man alle Ströme zugleich umkehrt.

Trägheitswirkung. Der dritte Teil von X' war

$$X'_{me} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{me}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T_{me}}{\partial x}.$$

Die Grösse T_{me} ist eine lineare Function der Producte von der Form $\dot{x}\dot{y}$, daher stellt $\partial T_{me}/\partial \dot{x}$ eine lineare Function der Stromstärken $\dot{y}$ dar. Hier-

nach hängt das erste Glied in dem Ausdrucke für X'_{me}, nämlich $d(\partial T_{me}/\partial \dot{x})/dt$ von der Geschwindigkeit, mit der die Stromstärken sich mit der Zeit ändern, ab. Es zeigt eine den Leiter angreifende mechanische Kraft an, welche für stationäre Ströme verschwindet und sonst in dem einen oder andern Sinne wirkt, je nachdem die Ströme in ihrer Stärke ansteigen oder abnehmen.

Im Gegensatz dazu wird der zweite Teil der Kraft X'_{me}, nämlich $-\partial T_{me}/\partial x$, nicht von den Veränderungen der Ströme, sondern von ihren wirklichen Werten bestimmt. Er ist eine lineare Function der Stromstärken, wechselt also mit ihnen sein Zeichen. Ausserdem involvirt aber jedes der Glieder, aus dem sein Ausdruck besteht, eine Geschwindigkeit $\dot{x}$, und darum verschwindet er, wenn die Leiter in Ruhe erhalten werden.

Die letztere Bemerkung gilt auch für die Glieder des ersten Teiles der genannten Kraft, welche aus der Differentiation der Coefficienten von T_{me} nach der Zeit resultiren.

Die ganze Kraft X'_{me} zerfällt also in zwei Componenten, die eine verschwindet, wenn die Leiter in Ruhe verharren, die andere, wenn die Ströme constant auf gleicher Stärke erhalten werden. Ihre Existenz hängt von der Existenz der kinetischen Energie T_{me} ab. Es ist nun von der höchsten Bedeutung, experimentell zu entscheiden, ob in der gesammten Energie ein Teil T_{me}, der nur von den Producten zwischen gewöhnlichen Geschwindigkeiten und Stromstärken abhängt, vertreten ist, und man wird den diesbezüglichen Versuchen nicht genug Sorgfalt zuwenden können.

574. *Experimentelle Untersuchung über* $d(\partial T_{me}/\partial \dot{x})/dt$. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem ersten Teil jener Kraft X_{me}, mit dem von den Beschleunigungen der electrischen Ströme abhängenden.

Die Existenz dieses Teiles der genannten Kraft wird sich offenbar am leichtesten beobachten lassen, wenn man die Bewegung eines Leiters nach der Richtung, nach welcher ihn der Strom durchsetzt, oder nach der dazu entgegengesetzten vor sich gehen lässt. Dadurch ist die allgemeine Anordnung des Apparates vorgeschrieben. Man hängt eine aus vielen Windungen bestehende Rolle horizontal an einem Draht auf, so dass sie um den Draht als verticale Axe zu rotiren vermag. Etwaige Bewegungen der Rolle werden an einem an ihr befestigten vertical stehenden Spiegel nach bekannten Methoden constatirt.

Das eine Ende ihres Drahtes verbindet man leitend mit dem Aufhängungsdraht, das andere mit einem von dem Aufhängungspunkt herabhängenden und in einem mit Quecksilber gefüllten Gefäss tauchenden zweiten Draht. Zieht man dann Leitungen vom obern Aufhängungsdraht zum Kupferpol, vom Quecksilbergefäss zum Zinkpol einer Daniellschen Batterie, so fliesst der Strom durch den Aufhängungsdraht von oben nach unten, durch die Rolle von Norden durch Osten nach Süden und Westen, durch den herabhängenden Draht von oben nach unten in das Quecksilbergefäss und von da zur Batterie zurück.

Während dieser Strom sich in der angegebenen Richtung bewegt, strebt die erdmagnetische Horizontalintensität die Rolle um eine horizontale Axe zu drehen und sie quer gegen den Draht zu stellen, man muss daher entweder das Experiment an einem magnetischen Pole der Erde anstellen, oder die Wirkung des Erdmagnetismus durch einen in der Nähe der Rolle geeignet aufgestellten Magnet neutralisiren.

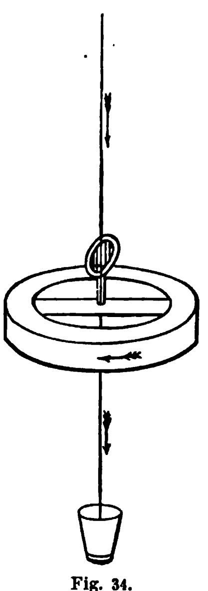


Fig. 34.

Wir denken uns nunmehr, dass unsere dem Einfluss des Erdmagnetismus entzogene Rolle von einem electrischen Strom in Richtung Nord-Ost-Süd-West durchflossen wird. Bewegte sich der electrische Strom genau so wie eine Flüssigkeit, so würde, während er einsetzt, und so lange seine Geschwindigkeit anwächst, eine Kraft nötig sein, um ihm bei seiner Bewegung rings um die Rolle das dazu nötige angulare Moment zu erteilen. Diese Kraft liefert die Elasticität des Aufhängungsdrahtes, desshalb würde die Rolle zuerst sich entgegengesetzt wie der Strom von Westen durch Süden nach Osten und Norden drehen. Beim Anhalten des Stromes müsste dann die Rolle in ihre Ruhelage zurückkehren, sie würde also diesmal in Richtung des Stromes von Osten durch Süden nach Westen und Norden rotiren. Beide Bewegungen könnte man am Spiegel der Rolle constatiren und messen. Das würde, wie gesagt, der Fall sein, wenn eben die Electricität genau die Eigenschaften einer materiellen Flüssigkeit hätte, wenn sie namentlich Trägheit besässe. Allein man hat bis jetzt noch in keinem Falle eine solche Erscheinung, wie sie unserer Beschreibung nach eine von einem Strome durchflossene Rolle zeigen müsste, beobachtet. Und doch würde sich dieselbe, wenn sie wirklich existirte, leicht durch die folgenden Besonderheiten von den andern wohlbekannten Wirkungen des Stromes unterscheiden lassen.

1. Erstens würde diese Erscheinung der Drehung der Rolle sich nur dann manifestiren, wenn der Strom zu fliessen beginnt oder aufhört, oder wenn er in seiner Stärke variirt. Sie würde sich aber nicht zeigen, so lange der Strom sich mit constanter Geschwindigkeit bewegt.

Nun hängt zwar die Induction auch von Stromschwankungen ab, allein ihre Phänomene sind so ganz besonderer Art, dass sie nie mit solchen dynamischen Vorgängen verwechselt werden können. Alle bekannten mechanischen Wirkungen des Stromes werden aber von den Stärken der Ströme selbst, nicht von ihren Variationen, bestimmt.

2. Die Richtung, nach der sich jene Erscheinung äussert, würde in die entgegengesetzte umschlagen, wenn man alle Ströme des Feldes umkehrt.

Dieses zweite Kennzeichen bringt die genannte Erscheinung in directen Gegensatz zu den electromagnetischen Phänomenen der Ströme, da diese ihren Sinn beibehalten, wenn alle Ströme umgekehrt werden.

Der electrische Strom hat kein Bewegungsmoment. Bis jetzt hat man trotz dieses markanten Signalements eine Trägheitswirkung des Stromes nicht entdecken können. Sollte aber doch eine solche durch noch bedeutend verfeinerte Beobachtungsmittel gefunden werden, so würden wir eine der beiden Electricitätsarten, die positive oder negative als reelle Substanz ansehen müssen. Wir könnten dann den electrischen Strom als die wirkliche nach einer gewissen Richtung vor sich gehende Bewegung dieser Substanz ansehen.

Wären also Bewegungen der Electricität irgendwie vergleichbar mit denen der gewöhnlichen Materie, so müsste ihre kinetische Energie Glieder von der Form T_{me} aufweisen, deren Existenz sich durch die Kraftwirkung X_{me} verraten würde.

Folgt man freilich der Fechnerschen Hypothese von der Constitution des electrischen Stromes, derzufolge jeder electrische Strom aus zwei gleich starken, aber entgegengesetzt gerichteten Strömen, deren einer positive, deren anderer negative Electricität mit sich führt, bestehen sollte, und nimmt an, dass beide Electricitätsarten gleich grosse Trägheit besitzen, so würde die Kraft X_{me} auch verschwinden, selbst wenn man die Electricitäten als Materie betrachtete, weil jedem dem positiven Strom zugehörenden Term in T_{me} ein von dem negativen herrührender gleich grosser entsprechen würde.

Doch glaube ich, dass man zwar von den vielen Vorteilen, die die Analogie zwischen den Bewegungen der Electricität und denen der materiellen Flüssigkeiten bietet, im weitesten Umfange Gebrauch machen darf, dass man sich aber hüten muss, aus dieser Analogie fundamentale Schlüsse zu ziehen, für die man keinen experimentellen Beweis besitzt. Bis jetzt aber existirt noch keine durch den Versuch zu bewahrheitende positive Tatsache*), die den electrischen Strom wirklich als Strom materieller Flüssigkeit erscheinen lässt, ebenso wenig hat man einen Beweis, dass jeder Strom, wie Fechner will, aus zwei gleich starken entgegengesetzt gerichteten Strömen besteht, man weiss auch nicht, ob ein electrischer Strom sich rasch oder langsam bewegt.

Erst wenn wir einen sicheren Beweis für die materielle Beschaffenheit der Electricität besitzen, wird sich die dynamische Theorie der Electricität in Vollständigkeit bearbeiten lassen. Man wird dann die Wirkungen der Electricität nicht mehr, wie es hier, in diesem Werke, noch geschehen muss, einem unbekannten Etwas, das nur den allgemeinen Gesetzen der Dynamik folgt, zuzuschreiben brauchen. Man wird sie aus bekannten Bewegungen bekannter Teile von Materie ableiten, und nicht, wie das ebenfalls hier noch

*) Siehe jedoch die Abhandlungen von Herz und von Colley, *Wiedemanns Annalen* Bd. 14 p. 190, bezüglich Bd. 17 p. 55. Anm. d. Uebers.

geschehen muss, bei dem Totaleffect und den Schlussresultaten stehen bleiben, sondern den ganzen innern Mechanismus und alle Details der Bewegung der Untersuchung unterwerfen können.

575. *Experimentelle Untersuchung von* $\partial T_{me}/\partial x$. Schwieriger ist die experimentelle Untersuchung des zweiten Teiles der Kraft X_{me}, die von $\partial T_{me}/\partial x$, weil man dazu die Wirkung von Kräften auf einen in rapider Bewegung begriffenen Körper beobachten muss.

Zur Constatirung der Existenz bezüglich Nichtexistenz dieser Kraft habe ich im Jahre 1861 den in beistehender Figur schematisch abgebildeten Apparat construirt. Die Einrichtung desselben ist aus der Darstellung un-

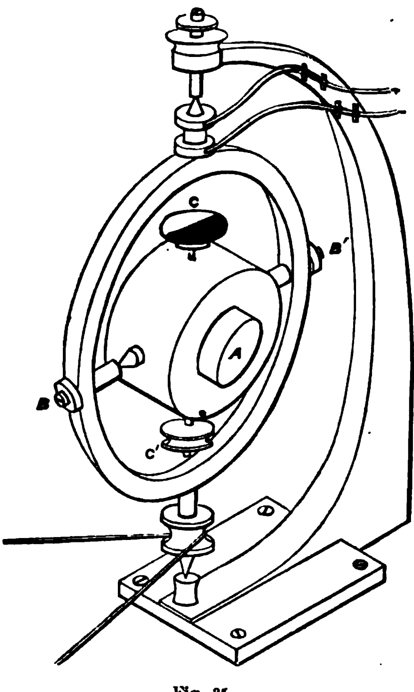


Fig. 35.

mittelbar ersichtlich, ich hebe nur hervor, dass A ein Electromagnet ist, der sich um die horizontale Axe BB' zu drehen vermag und zugleich mit dem Ringe um eine verticale Axe rotirt.

Es seien A, B, C die bezüglichen Trägheitsmomente des Electromagnets hinsichtlich seiner eigenen Axe, hinsichtlich der horizontalen Drehungsaxe B, B' und hinsichtlich der dazu senkrechten Axe CC'.

Ich bezeichne ferner mit ϑ den Winkel, den die Axe CC' mit der Verticalen einschliesst, mit φ das Azimut der Axe BB' und mit ψ eine

Variabele, von der die Bewegung der Electricität in den Drahtwindungen des Electromagnets abhängt.

Die kinetische Energie des Electromagnets hat dann den Wert

$$T = \frac{1}{2}\left\{A\,\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + B\dot{\vartheta}^2 + C\,\dot{\varphi}^2\cos^2\vartheta + E\,(\dot{\varphi}\sin\vartheta + \dot{\psi})^2\right\}.$$

Darin ist E eine Grösse, die von den Eigenschaften des electrischen Stromes abhängt, und als sein Trägheitsmoment, wenn er durch die Drahtwindungen des Electromagnets geht, bezeichnet werden kann.

Die Ablenkung der Axe CC' während der Rotation des Magnets um die Verticalaxe aus der Verticalebene geschieht mit einer gewissen Kraft Θ, die den Winkel ϑ zu vergrössern strebt, und nach den Lagrangeschen Gleichungen ist

$$\Theta = B\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \left\{(A-C)\,\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta + E\dot{\varphi}\cos\vartheta\,(\dot{\varphi}\sin\vartheta + \dot{\psi})\right\}.$$

Im Falle, dass man das Trägheitsmoment C etwas grösser als das Trägheitsmoment A wählt, kann sich der Electromagnet schliesslich, wenn die Rotation des Ringes um die verticale Axe stationär geworden ist und zugleich der Strom so regulirt ist, dass $\dot{\psi}$ sich mit der Zeit nicht mehr ändert, in eine stabile Gleichgewichtslage begeben, Θ sowohl wie $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ verschwinden dann, und man erhält

$$(A-C)\,\dot{\varphi}\sin\vartheta + E\,(\dot{\varphi}\sin\vartheta + \dot{\psi}) = 0,$$

woraus folgt

$$\sin\vartheta = \frac{E\gamma}{(C-A)\,\dot{\varphi}}.$$

Die Grösse

$$\gamma = \dot{\varphi}\sin\vartheta + \dot{\psi}$$

ist unter den gedachten Umständen eine Constante und kann als die Stromstärke in den Drahtwindungen des Electromagnets betrachtet werden. Sie wechselt ihr Zeichen, wenn der Strom umgekehrt wird, das Zeichen von $\sin\vartheta$ hängt also von der Richtung des betreffenden Stromes ab.

Man lässt nun den Strom durch eine schleifende Feder in den Ring, von da durch das eine Lager der Axe BB' in die Rolle des Electromagnets eintreten, aus dieser in das andere Lager der bezeichneten Axe, in den Ring, durch eine zweite schleifende Feder zurück in die Batterie fliessen.

Zur Bestimmung des Winkels ϑ habe ich auf C eine Papierscheibe aufgeklebt, dieselbe durch einen der Axe BB' parallelen Diameter in zwei Teile geteilt, und von diesen den einen rot, den andern grün bemalt. Ist das Instrument in Bewegung, so dreht sich die Scheibe um die verticale Axe CC', und je nachdem diese in dem einen oder andern Sinne ausweicht,

ϑ also positiv oder negativ ist, erscheint auf ihr ein roter oder grüner, die verticale Rotationsaxe umgebender Kreis, dessen Radius die Grösse des Winkels ϑ angenähert berechnen lässt.

Bei C' habe ich an dem Electromagnet noch eine Schraube angebracht, mit Hilfe deren die Axe CC' sich zu einer Hauptträgheitsaxe desselben machen und das Moment um CC' sich so justiren lässt, dass es gerade noch das Moment um AA' übersteigt.

Man kann also dem Apparat eine bedeutende Empfindlichkeit erteilen. Indessen sind die Versuche schwer mit einigermaassen genügender Präcision durchzuführen, namentlich, weil der Erdmagnetismus auf den Electromagnet wie auf eine Inclinationsnadel wirkt. Demnach sind auch die so für die Winkelgrösse ϑ erlangten Zahlen nur roh, sie lassen aber doch ganz unzweideutig erkennen, dass der Winkel ϑ sich durch Verstärkung oder Abschwächung des Stromes in keiner Weise ändert, und selbst dann keine Variation aufweist, wenn man die Rolle durch Einschiebung eines Eisenkerns zu einem sehr mächtigen Electromagnet gestaltet.

Das angulare Moment des die Rolle während ihrer Rotation durchfliessenden Stromes muss hiernach kleiner als jede messbare Grösse sein. Daraus folgt, dass man bis jetzt die Existenz der Kraft $\partial T_{me}/\partial x$ ebensowenig wie die der Kraft $d(\partial T_{me}/\partial \dot{x})/dt$ aus irgend einer Tatsache abzuleiten vermag.

Die ganze mechanische Kraft X_{me} wird hiernach auf Null zu reduciren sein.

Electromotorische Kräfte.

576. Das zweite System von Kräften enthält die Kräfte, welche auf die Electricität selbst wirken, also electromotorische Kräfte.

Sei Y eine durch Induction in einem Leiter entstandene electromotorische Kraft. Die electromotorische Kraft Y', die von ausserhalb auf den Leiter wirken muss, um jene inducirte electromotorische Kraft zu neutralisiren, ist

$$Y' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y},$$

und da sie einen ebenso grossen, aber entgegengesetzten Wert wie die inducirte hat, so wird

$$Y = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Aus Art. 572 wissen wir, dass T von den y nicht abhängt, wir haben also

$$1) \qquad Y = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right).$$

Ferner ist

2) $$Y = Y_m + Y_e + Y_{me},$$

also allgemein

3)
$$Y_m = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_m}{\partial \dot{y}}\right),$$
$$Y_e = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_e}{\partial \dot{y}}\right),$$
$$Y_{me} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{me}}{\partial \dot{y}}\right).$$

Induction durch mechanische Kräfte. Da T_m von den Stromgeschwindigkeiten nicht abhängt, so haben wir als erstes Resultat

$$Y_m = 0.$$

Induction durch Stromschwankungen und relative Lagenänderungen. Die zweite electromorische Kraft

$$Y_e = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_e}{\partial \dot{y}}\right)$$

ist gleich der Geschwindigkeit, mit der die nach den Stromstärken lineare Function $\partial T_e / \partial \dot{y}$ mit wachsender Zeit abnimmt. Sie stellt die von Faraday entdeckte electromotorische Kraft durch Induction dar, und soll bei anderer Gelegenheit sorgfältig untersucht werden.

577. Induction durch Bewegungsänderungen. Drittens haben wir

$$Y_{me} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{me}}{\partial \dot{y}}\right).$$

$\partial T_{me} / \partial \dot{y}$ ist eine lineare Function der Geschwindigkeiten der einzelnen Leiter. Existirte also die Energie T_{me}, so müsste man ganz unabhängig von allen etwa vorhandenen Strömen in Leitern auch dadurch Ströme induciren können, dass man die Geschwindigkeiten, mit der sich die Leiter bewegen, variirt.

Hätten wir zum Beispiel den in Art. 574 betrachteten Fall, wo eine Drahtrolle an einem Draht aufgehängt ist, so müsste, falls die Energie T_{me} eine reelle Existenz haben sollte, in dieser Rolle, selbst wenn sie von einem ganz constanten Strome durchflossen wird, ein Strom sofort inducirt werden, sowie man sie in Rotation um die verticale Axe setzt. Die so inducirte electromotorische Kraft würde der Beschleunigung, die die Rotation der Rolle erfährt, proportional sein. Sie würde verschwinden, wenn diese

Rotation gleichförmig geworden ist, und würde den Sinn ihrer Wirkung umkehren, wenn die Bewegung verlangsamt wird.

Nun vermag aber die Wissenschaft wenig Beobachtungen mit solcher Präcision und Sicherheit des Resultats anzustellen, wie die, welche sich auf Entscheidung der Existenz oder Nichtexistenz eines Stromes in einem Leiter beziehen. In der Tat übertrifft die Genauigkeit und Empfindlichkeit des Galvanometers für electrische Ströme bei weitem alles, was man bis jetzt an Instrumenten zur Anzeige und Messung mechanischer Kräfte ersonnen hat. Man darf daher wol annehmen, dass wenn Ströme in der angegebenen Weise lediglich durch Geschwindigkeits**änderungen** hervorgebracht werden könnten, selbst wenn sie sehr schwach sein sollten, hätten constatirt werden müssen. Von den gewöhnlichen Inductionsströmen würden sie die folgenden Besonderheiten unterscheiden.

1. Sie würden lediglich von den Bewegungen der Leiter und in keiner Weise von den im Felde etwa schon fliessenden Strömen oder vorhandenen magnetischen Kräften abhängen.

2. Sie würden nicht durch die absoluten Geschwindigkeiten der Leiter, sondern durch die Beschleunigungen derselben und durch Producte der Geschwindigkeiten bestimmt werden.

3. Sie würden beim Uebergang der Beschleunigung in eine gleich grosse Verlangsamung in ihren Beträgen verändert werden, wenn auch die absoluten Geschwindigkeiten dieselben sein sollten.

In allen Fällen, in denen man bisher Inductionsströme beobachtet hat, hat man immer gefunden, dass dieselben von den Stärken selbst sowohl als von den Schwankungen der im Felde befindlichen Ströme und Magnete abhängen. Man hat ferner noch nie in einem stromlosen Leiter einen Inductionsstrom constatiren können, wenn in seiner Umgebung weder Ströme, noch Magnete vorhanden waren. Wenn ferner Inductionsströme durch Lagenänderungen von Leitern gegen Ströme oder Magnete inducirt werden, so hängen sie stets von den **Beträgen** der relativen **Geschwindigkeiten** der Leiter, nicht aber von den **Aenderungen**, welche diese Geschwindigkeiten erleiden, ab.

Hiernach würden sich die beregten Inductionserscheinungen durch drei ganz markante Merkmale vor allen andern Inductionserscheinungen auszeichnen. Trotzdem hat man ihre Existenz noch aus keinem dieser Merkmale constatiren können.

Man wird bemerken, dass ich mich über den Teil T_{me} der kinetischen Energie hier und in den Artt. 574—576 ziemlich weitläufig ausgelassen habe. Ich glaubte aber eine solche genaue Auseinandersetzung nicht umgehen zu dürfen, damit über einen Punkt von so grosser Tragweite für die Electricitätslehre keine Ungewissheit bleibt.

Da also bisher noch keine Tatsache für, alle aber gegen die Existenz der Energie T_{me} zu sprechen scheinen, so werde ich bei den weitern Unter-

suchungen von dieser Energie — sei es, dass sie wirklich nicht vorhanden ist, sei es, dass ihre Wirkungen sich gänzlich der Wahrnehmung entziehen — abstrahiren und dadurch eine beträchtliche Vereinfachung unserer dynamischen Theorie erlangen. Doch wird sich bei der Discussion der Beziehungen, die zwischen Magnetismus und Licht bestehen, noch Gelegenheit bieten, zu zeigen, dass die Bewegung, die wir als Licht wahrnehmen, als Factor in Glieder der Energie, die von der Bewegung, welche den Magnetismus constituirt, abhängen, einzutreten vermag.

Cap. VII.

Theorie der linearen electrischen Ströme.

Electrokinetische Energie electrischer Ströme.

578. Die Untersuchungen des vorangehenden Artikels gestatten uns unsere ganze Aufmerksamkeit nur dem Teile der Energie unseres von Strömen durchflossenen Systems zuzuwenden, der von den Quadraten und Producten der Stromstärken abhängt, den wir passend als die *Electrokinetische Energie* des Systems bezeichnen können.

Der Teil der kinetischen Energie, der als Function der Producte aus den Geschwindigkeiten und Stromstärken auftritt, existirt, wie wir gesehen haben, überhaupt nicht, und der Teil, der eine homogene quadratische Function der Geschwindigkeiten allein bildet, gehört der gewöhnlichen Dynamik an und lehrt uns für unsern Wissenszweig nichts Neues.

Ich bezeichne mit $A_1, A_2, \ldots$ die einzelnen linearen Leiter unseres Systems und mache deren Form und relative Lage zu einander abhängig von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots$, deren Anzahl gleich der Zahl von Freiheitsgraden, die unser System besitzt, ist, und die man als *Geometrische Variabele* ansehen kann.

Ich nenne ferner $y_\varkappa$ die Electricitätsmenge, die seit Beginn der Zeit t durch einen Querschnitt des Conductors $A_\varkappa$ geflossen ist. $\dot{y}_\varkappa$, die Fluxion von $y_\varkappa$, giebt dann die Electricitätsmenge, die während der Zeiteinheit zur Zeit t durch den fraglichen Querschnitt des betreffenden Leiters sich bewegt. Man bezeichnet $\dot{y}_\varkappa$ als die *Zeitliche Stromstärke* und $y_\varkappa$ als den *Integralstrom* in dem betreffenden Leiter. Die Anzahl der *Electrischen Variabeln* y ist so gross wie die der Leiter, die unser System zusammensetzen.

Die electrokinetische Energie T unseres Systems ist eine homogene Function zweiten Grades der Stromstärken unseres Systems und hat die Form

$$T = \frac{1}{2} L_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{y}_2^2 + \ldots + M_{12} \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \ldots .$$

Electrische Trägheitsmomente und Trägheitsproducte; Coefficienten der Selbstinduction und der gegenseitigen Induction.

Die Coefficienten L, M hängen von den geometrischen Variabeln x_1, $x_2, \ldots$ ab, enthalten aber keine der electrischen Variabeln $\dot{y}_1, \dot{y}_2 \ldots$

Die Factoren L_r werde ich, wenn es mir namentlich darauf ankommt, die dynamische Bedeutung unserer Gleichungen hervorzuheben, als die *Electrischen Trägheitsmomente* der bezüglichen Strombahnen A_1, $A_2, \ldots$, die Factoren M_{rs} als die *Electrischen Trägheitsproducte* zweier Strombahnen A_r, A_s bezeichnen. Wo ich aber mehr den electrischen Wert derselben zu betonen habe, nenne ich die L_r die *Coefficienten der Selbstinduction* der bezüglichen Ströme A_r und die M_{rs} die *Coefficienten der gegenseitigen Induction* der Ströme A_r, A_s auf einander. Letztere heissen auch die Potentiale der Stromkreise A_r, A_s auf einander. Die L und die M sind Functionen der Form und relativen Lage der einzelnen Stromkreise, im electromagnetischen Maasssystem haben sie, wie sich noch in Art. 627 besonders herausstellen wird, die Dimensionen einer Linie.

Electrokinetisches Moment.

Differenzirt man T der Reihe nach in Bezug auf die einzelnen Stromstärken $\dot{y}_\varkappa$, so resultiren die in der Dynamik als Momente bezeichneten Grössen $p_\varkappa$. Hier, wo die Variabeln y electrischer Natur sind, nenne ich $p_\varkappa$ das *Electrokinetische Moment* des betreffenden Stromkreises.

Der Definition entsprechend haben wir

$$p_\varkappa = L_\varkappa \dot{y}_\varkappa + M_{\varkappa 1}\dot{y}_1 + \ldots + M_{\varkappa\varkappa-1}\dot{y}_{\varkappa-1} + M_{\varkappa\varkappa+1}\dot{y}_{\varkappa+1} + \ldots$$

Das erste Glied des Moments des Stromkreises $A_\varkappa$ ist das Product seiner Stromstärke in den Coefficienten seiner Selbstinduction, die folgenden Glieder sind die Producte der Stärken der anderen im Felde befindlichen Ströme in die bezüglichen Coefficienten der Induction jener Ströme auf diesen betreffenden Strom $A_\varkappa$.

Electromotorische Kraft.

579. Sei E eine aus einer Voltaschen oder thermoelectrischen oder sonst einer stromerregenden Batterie herrührende electromotorische Kraft, die ganz unabhängig von allen im Felde befindlichen Strömen oder Magneten in einem Leiter einen Strom hervorbringt und unterhält.

Ist nun R der Widerstand des betreffenden Leiters und $\dot{y}$ die factische Stärke des ihn wirklich durchfliessenden Stromes, so giebt $R\dot{y}$ die Grösse, die die electromotorische besitzen muss, wenn sie den Widerstand des Leiters überwinden soll, es bleibt mithin noch eine electromotorische Kraft

$E - R\dot{y}$ übrig, die dazu verwendet wird, das Moment des Stromes in dem einen oder andern Sinne abzuändern. Bezeichnet man diese Kraft mit Y', so ist nach den Lagrangeschen Gleichungen allgemein

$$Y' = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial T}{\partial y}.$$

In unserm Falle hängt T von y nicht ab, wir haben daher

$$Y' = E - R\dot{y} = \frac{dp}{dt}$$

oder

$$E = R\dot{y} + \frac{dp}{dt}.$$

Die auf den Leiter von aussen her unabhängig von dem Felde, in dem er sich befindet, wirkende electromotorische Kraft setzt sich also aus zwei Teilen zusammen. Der erste Teil $R\dot{y}$ wird dazu verwendet, um den Widerstand R des betreffenden Leiters zu überwinden, der zweite dient zur Verstärkung des electrokinetischen Moments p. Hiernach ist die electromotorische Kraft, die lediglich der magneto-electrischen Induction ihre Entstehung verdankt, gleich $-dp/dt$ oder

Die inducirte electromotorische Kraft ist in jedem Augenblicke gleich der Geschwindigkeit, mit der das electrokinetische Moment des betreffenden Stromes mit der Zeit in diesem Augenblicke abnimmt.

Electromagnetische Kraft.

580. Das zweite System von Kräften, das in unserm Systeme herrscht, besteht aus mechanischen Kräften, die die Ströme auf einander ausüben.

Sei X' eine mechanische, von aussen her wirkende Kraft, die die Variabele x zu vergrössern strebt. Nach Lagrange ist

$$X' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Die electrokinetische Energie T ist von den $\dot{x}$ unabhängig, daher wird

$$X' = -\frac{\partial T}{\partial x}.$$

X' ist die Kraft, die man anwenden muss, um der electromagnetischen Kraft X, die x zu verändern sucht, das Gleichgewicht zu halten. Wir haben also

$$X = \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Die Gleichung lehrt:

Die electromagnetische Kraft, die eine Variabele zu vergrössern strebt, ist gleich der Geschwindigkeit, mit der sich die electrokinetische Energie mit

dieser Variabeln vergrössert, während die Ströme auf constanten Stärken erhalten werden.

Bewirkt man die Constanz der Ströme, während der Veränderung der betreffenden Variabeln mit Hilfe einer Batterie, so muss diese das Doppelte der Energie ausgeben, um welche die electrokinetische Energie des Systems durch die betreffende Veränderung angewachsen ist. Ich habe schon in Art. 544 auf dieses von Thomson zuerst betonte Resultat hingewiesen und mache noch auf den entsprechenden am Schluss des Art. 93b ausgesprochenen Satz für die Electrostatik aufmerksam.

Specieller Fall zweier Stromkreise.

581. Electrokinetische Energie zweier Stromkreise. Sei A_1 der primäre, A_2 der secundäre Stromkreis. Die electrokinetische Energie beider Stromkreise ist

$$1)\qquad T = \frac{1}{2} L\dot{y}_1^2 + M\dot{y}_1\dot{y}_2 + \frac{1}{2} N\dot{y}_2^2.$$

L ist der Coefficient der Selbstinduction des primären, N der des secundären Stromkreises, M ist der Coefficient der gegenseitigen Induction beider Stromkreise auf einander.

Inductionserscheinungen. Nach Art. 579 ist, wenn E_1 die electromotorische Kraft der Batterie, mit der der primäre, E_2 die der Batterie, mit der der secundäre Stromkreis in Verbindung steht, bezeichnet, und R_1, R_2 die bezüglichen Widerstände angeben,

$$2)\qquad E_1 = R_1\dot{y}_1 + \frac{d}{dt}(M\dot{y}_2 + L\dot{y}_1),$$

$$3)\qquad E_2 = R_2\dot{y}_2 + \frac{d}{dt}(M\dot{y}_1 + N\dot{y}_2).$$

Der inducirte Integralstrom. Ich setze zunächst voraus, dass auf den secundären Stromkreis keine äussere electromotorische Kraft wirkt, dass also seine ganze electromotorische Kraft lediglich durch den primären Kreis inducirt ist. Wir haben dann

$$3_1)\qquad R_2\dot{y}_2 + \frac{d}{dt}(M\dot{y}_1 + N\dot{y}_2) = 0,$$

und nach Ausführung der Integration nach t

$$4a)\qquad R_2 y_2 + (M\dot{y}_1 + N\dot{y}_2) = \text{Const.}$$

y_2 giebt den in dem secundären Kreis durch den primären inducirten Integralstrom.

Wie man diesen Integralstrom experimentell misst, wird erst in Art. 748 des genauern auseinandergesetzt werden, man kann sich aber meist leicht versichern, dass die Dauer dieses inducirten Stromes äusserst kurz ist.

Hebt man die Werte, die die Grössen M, N; $\dot{y}_1, \dot{y}_2$ am Ende der Zeit t besitzen, dadurch hervor, dass man sie mit Accenten versieht, so wird

$$R_2 y_2 = M\dot{y}_1 + N\dot{y}_2 - (M'\dot{y}_1' + N'\dot{y}_2'). \tag{4b}$$

Da der secundäre Strom lediglich inducirt sein sollte, so ist der Anfangswert seiner Stärke, ebenso wie der Endwert derselben, gleich Null, es wird also

$$R_2 y_2 = M\dot{y}_1 - M'\dot{y}_1',$$

der Integralstrom hängt dann nur von den Anfangs- und Endwerten der Grössen M_1 und $\dot{y}_1$ ab.

582. *Induction beim Schliessen und Oeffnen eines Stromes.* Die letztgenannte Gleichung kann noch je nach der Art und Weise, wie der primäre Strom den secundären inducirt, verschieden interpretirt werden.

Ich betrachte zunächst den Fall, wo die Stromkreise ihre Lage und Form nicht ändern und die Induction durch Stromschwankungen hervorgebracht wird. Es ist dann $M = M'$ und

$$R_2 y_2 = M(\dot{y}_1 - \dot{y}_1')$$

zu setzen.

Bis zu Anfang der Zeit t soll der primäre Strom unterbrochen sein, zu dieser Zeit $t = 0$ soll er geschlossen werden und am Ende derselben die Stärke $\dot{y}_1'$ erlangt haben. Der Integralstrom des secundären Kreises, den das Schliessen des primären inducirt, wird

$$y_2 = -\frac{M\dot{y}_1'}{R_2}. \tag{4_1}$$

Liegen die beiden Stromkreise Seite an Seite und verlaufen sie beide nach derselben Richtung, so ist M eine positive Grösse, der inducirte Strom fliesst dann nach der entgegengesetzten Richtung wie der inducirende.

Zweitens soll der primäre Strom bis zur Zeit $t = 0$ fliessen, zu dieser Zeit aber, wenn er die Stärke $\dot{y}_1$ erlangt hat, unterbrochen werden und auch unterbrochen bleiben. Da jetzt $\dot{y}_1' = 0$ ist, wird der Integralstrom, der durch die Unterbrechung des primären Stromes in dem secundären Kreise inducirt wird,

$$y_2 = \frac{M\dot{y}_1}{R_2}. \tag{4_2}$$

Er verläuft diesmal nach derselben Richtung wie der inducirende Strom.

Induction durch relative Lagen- oder Formänderung der Stromkreise. Erhält man den primären Strom constant auf derselben Stärke $\dot{y}_1$, variirt aber Lage oder Form der beiden Stromkreise, so geht am Ende der Zeit t das M in M' über, und es wird

$$R_2 y_2 = (M - M')\,\dot{y}_1.$$

Liegen wieder beide Strombahnen Seite an Seite und verlaufen sie nach derselben Richtung, so nimmt der Coefficient ihrer Induction auf einander ab mit wachsender Entfernung. Der inducirte Strom ist daher positiv oder negativ, je nachdem die Distanz zwischen den beiden Stromkreisen vergrössert oder verkleinert wird.

Die eben behandelten elementaren Fälle entsprechen den schon in Art. 530 vorgeführten.

583. Electromagnetische Wirkungen. Sei x eine der geometrischen Variabeln, von deren Grösse Lage und Configuration der Stromkreise abhängt. Werden die beiden Stromkreise von Strömen durchflossen, so sucht eine electromagnetische Kraft von der Stärke

$$X = \frac{1}{2}\dot{y}_1^2 \frac{\partial L}{\partial x} + \dot{y}_1 \dot{y}_2 \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{2}\dot{y}_2^2 \frac{\partial N}{\partial x} \tag{5}$$

die Variabele x zu vergrössern.

In dem Falle, wo jeder der beiden Stromkreise für sich ein starres System bildet, das seine Form gar nicht oder doch nur äusserst wenig variirt, sind L und N von x unabhängig, es bleibt

$$X = \dot{y}_1 \dot{y}_2 \frac{\partial M}{\partial x}. \tag{5$_1$}$$

Fliessen beide Ströme nach derselben Richtung, so haben $\dot{y}_1$ und $\dot{y}_2$ dasselbe Zeichen, die Kraft X sucht dann ihre Strombahnen so gegen einander zu verschieben, dass M in seinem Betrage anwächst.

Nun wächst aber M für zwei Stromkreise, die Seite an Seite liegen, an, wenn sie einander genähert werden; zwei solche Strombahnen ziehen sich also an, wenn sie von gleichgerichteten, und stossen sich ab, wenn sie von entgegengerichteten Strömen durchzogen werden.

Cap. VIII.

Untersuchung eines electromagnetischen Feldes durch seine Wirkungen auf eine Strombahn.

Gegenstand der Untersuchung.

584. Sowohl die Induction als die mechanische Wirkung zweier Ströme auf einander hängt, wie wir gesehen haben, von der Grösse M, dem Coefficienten der Induction der beiden Ströme auf einander, ab. Diese Grösse ist identisch mit der in den Art. 423, 492, 521, 539 durch das gleiche Symbol bezeichneten und kann demnach nach den dort aus den penderomotorischen Wirkungen der Magnete oder Ströme auf einander deducirten Anleitungen aus der Lage und Configuration der beiden Stromkreise berechnet werden. In diesem Capitel werde ich sie aber ohne Voraussetzung der Kenntnis ihrer mathematischen Form mit Hilfe der electromotorischen Wirkungen der Ströme auf einander und der im vorhergehenden Artikel auseinandergesetzten dynamischen Theorie untersuchen. Ich werde annehmen, dass man sie aus Experimenten über Induction abzuleiten vermag, indem man zum Beispiel den Integralstrom misst, der in einem Stromkreise inducirt wird, wenn man einen andern Strom aus einer bestimmten Lage bis in die Unendlichkeit oder bis zu einer Stelle, wo man sicher ist, dass M daselbst den Wert Null besitzt, plötzlich entfernt.

Electrokinetisches Moment eines fixen constanten Stromes auf eine secundäre Strombahn.

585. Ich gehe nicht direct von der Grösse M, sondern von der p, dem electrokinetischen Moment des primären Stromes, auf die secundäre Strombahn aus, welches mit dem Potential M der beiden Strombahnen auf einander durch die Gleichung

$$p_1 = Mi_1$$

verbunden ist, wo i_1 die Stärke des primären Stromes bezeichnet.

Das electromagnetische Feld soll durch einen primären Strom hervorgebracht werden, der mit sich stets gleichbleibender Stärke durch seine als starr und unverrückbar angesehene Bahn fliesst. Wird in dieses electromagnetische Feld ein secundärer Kreis versetzt, so ist das vom primären Kreise auf ihn ausgeübte Moment p nur von seiner Form und von seiner Lage gegen den primären Kreis abhängig. Ist daher die Form dieses secundären Kreises, seine Lage und die Richtung, nach der seine Länge als positiv zu rechnen ist, gegeben, so hat das Moment einen und nur einen ganz bestimmten Wert. Eine Umkehrung seines Zeichens ist gleichbedeutend mit einer Umkehrung der Richtung des secundären Kreises.

586. Das Moment als Linienintegral. Da die Grösse p von der Form und Lage des secundären Stromkreises abhängt, dürfen wir annehmen, dass jeder Teil dieses Kreises etwas zu dieser Grösse beiträgt, und ferner dürfen wir voraussetzen, dass jeder Teil das Seinige nach Maassgabe seiner Lage und Form und unabhängig von allen andern Teilen des Stromkreises hergiebt.

Die Berechtigung zu solchen Annahmen schöpfen wir daraus, dass wir bei der Berechnung der fraglichen Grösse es nicht eigentlich mit einem Strom, dessen Teile in der Tat auf einander einwirken, als vielmehr mit einer Strombahn, das heisst mit einer geschlossenen Curve, längs deren ein Strom fliessen kann, zu tun haben.

Eine solche Curve ist aber ein rein geometrisches Gebilde, ihre einzelnen Teile können zu einander in keiner physikalischen Beziehung stehen.

Hiernach dürfen wir voraussetzen, dass der Teil, den ein Element ds der secundären Strombahn zum Moment p beiträgt, gleich Jds ist, wo J eine Function der Form und Lage von ds allein bezeichnet. Ferner dürfen wir diese von den einzelnen Elementen ds herrührenden Teile von p summiren und

$$p = \int J ds \tag{1a}$$

setzen. p ist dann das Linienintegral von J, erstreckt längs der ganzen secundären Strombahn.

587. Zerlegung des Moments eines Stromkreises. Wir haben nun die Abhängigkeit, in der J zu s steht, zu eruiren.

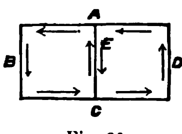


Fig. 36.

Zunächst muss J sein Zeichen wechseln, wenn man die Richtung von ds umkehrt. Haben also zwei Stromkreise $ABCEA$ und $AECDA$ eine Bogenstrecke AEC gemeinsam, die für den einen Kreis nach der entgegengesetzten Richtung wie für den andern als positiv gerechnet wird, so wird die Summe ihrer Momente gleich dem Moment ihrer Summe sein. Also

$$\text{Moment}\,(ABCEA) + \text{Moment}\,(AECDA) = \text{Moment}\,(ABCDA).$$

Denn da in dem Moment von $ABCEA$ das Linienintegral des Stromstückes AC in Richtung CEA, im Moment von $AECDA$ aber in Richtung AEC genommen wird, so heben sich diese beiden Linienintegrale in ihrer Summe auf.

Was hier für die Combination zweier Bahnen bewiesen ist, gilt natürlich auch für die einer beliebigen Anzahl von Bahnen, und allgemein dürfen wir sagen:

Wenn die Fläche, die eine geschlossene Curve einfasst, in eine beliebige Anzahl von Teilen zerschnitten und die Begrenzung jedes dieser Teile als Stromkreis betrachtet wird, den man nach derselben Richtung wie die äussere Curve als positiv rechnet, so ist das Moment dieser einzelnen Stromkreise gleich dem Moment der geschlossenen Curve.

Ich verweise auf die ganz entsprechende in Art. 483 reproducirte Ampèresche Betrachtungsweise.

588. Das Moment als Flächenintegral. Der obige Satz gilt, in wie kleine Teile auch man die betreffende Fläche zerschneiden mag, ich nehme daher an, dass diese Teile so klein sind, dass ihre Dimensionen gegen die Hauptkrümmungsradien verschwinden, man also in jedem dieser Teile die Normalen der Fläche als überall gleichgerichtet ansehen darf. Ich setze ferner voraus, dass das Moment eines dieser kleinen Stromkreise, dadurch dass man ihn parallel mit sich selbst von einer Stelle der Fläche auf eine andere verlegt, in seinem Betrage nicht merklich geändert wird; offenbar wird diese Voraussetzung zutreffen, wenn die Dimensionen bei keinem dieser Stromkreise gegen seine Entfernung von dem primären Stromkreise in Betracht kommt.

Hat man nun zwei Stromkreise, so kann man die von ihnen umfassten Flächen in einzelne Teile zerlegen, deren Dimensionen man bei beiden Flächen gleich gross nimmt. Die Anzahl der Teile, die eine dieser Flächen enthält, steht dann in Proportion zu ihrem bezüglichen Flächeninhalt, und da jeder der beiden Stromkreise durch die Umgrenzungen der Teile der zugehörigen Fläche ersetzt werden darf, so folgt der Satz:

Das Moment einer auf einer Fläche gezogenen Strombahn, deren Dimensionen gegen ihre Entfernung vom primären Strome klein sind, ist dem Flächeninhalt des von ihr eingefassten Flächenstückes proportional.

Ist dS der bezeichnete Flächeninhalt, so wird das Moment des Elementarstromkreises gleich

$$I dS,$$

und damit erhalten wir für das Moment eines endlichen Stromkreises den neuen Ausdruck

$$p = \iint I dS, \tag{1b}$$

wo die Integration über eine von dem Stromkreis begrenzte Fläche auszudehnen ist, die nur der Beschränkung unterworfen ist, dass sie nirgend durch den primären Stromkreis geht.

Die Grösse I ist eine Function der Lage vom Flächenelement dS und der Richtung, die dessen Normale einschlägt.

589. Entwickelung des Linienintegrals. Es sei $ABCDA$ ein Stromkreis und AC ein Element desselben, das so klein gewählt ist, dass es als geradlinig angesehen werden darf. Ich ziehe einen gebrochenen mit AC in derselben Ebene liegenden Contour $APBQC$, der mit AC zusammen zwei zu je einer Seite von AC liegende, an Inhalt sich gleiche kleine Flächenstücke APB, BQC abgrenzt. Wir haben dann

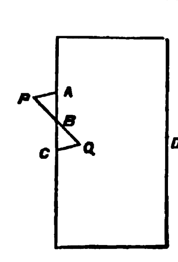


Fig. 37.

$$\text{Moment}\,(APBA) = \text{Moment}\,(CQBC),$$

also

$$\begin{aligned}\text{Moment}\,(ABCDA) &= \text{Moment}\,(ABQCDA) + \text{Moment}\,(CQBC)\\ &= \text{Moment}\,(ABQCDA) + \text{Moment}\,(APBA).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\text{Moment}\,(ABCDA) = \text{Moment}\,(APBQCDA).$$

Der Kreis $APBQCDA$ unterscheidet sich aber von den $ABCDA$ dadurch, dass statt der geraden Strecke ABC dieses die gebrochene Linie $APBQC$ jenes substituirt ist.

Der Wert von p ändert sich also nicht, wenn ein Element des Stromkreises durch eine gebrochene Bahn substituirt wird, vorausgesetzt, dass diese gebrochene Bahn mit dem betreffenden Element dieselben Endpunkte besitzt und die durch ihre Einführung verursachte Abänderung der vom Stromkreis eingefassten Fläche nur sehr unbedeutend gegen den Inhalt dieser Fläche ausfällt.

Im Princip entspricht dieser Satz der von Ampère in seinem zweiten Experiment, Art. 506, eruirten Tatsache, der zufolge jeder Strom einem andern, der eine gebrochene Bahn, die an keiner Stelle sich merklich von der ursprünglichen Bahn entfernt, durchfliesst, äquivalent sein sollte.

590. Wir ersetzen nunmehr, wozu wir jetzt autorisirt sind, ein Bahnelement ds durch drei kleine Elemente dx, dy, dz, die auf einem fortlaufenden Wege von dem einen Ende des Elements ds zu seinem andern Ende führen. Bezeichnen Fdx, Gdy, Hdz die den Elementen dx, dy, dz entsprechenden bezüglichen Linienintegrale von J, so hat man

$$Jds = Fdx + Gdy + Hdz. \tag{2b}$$

Aus dieser Gleichung folgt aber

$$J = F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}. \tag{2a$_2$}$$

J ist also ein in Richtung des Elements ds genommener Vector $\mathfrak{A}$, dessen bezügliche Componenten in Richtung der drei Axen der x, y, z die

Werte F, G, H haben. In der Bezeichnungsweise des Quaternionencalculs lautet die Gleichung 2a)

2a) $$J\,ds = -\,S.\mathfrak{A}d\rho,$$

wo $\mathfrak{A}$ ein Vector ist, der die Grössen F, G, H zu Componenten hat, ρ einen vom Coordinatenursprung zum Element ds gezogenen Radiusvector bezeichnet und das vorgesetzte S angiebt, dass von der Operation $\mathfrak{A}d\rho$ der scalare Teil zu nehmen ist.

In entwickelterer Gestalt ist nunmehr der Ausdruck für das Moment in seiner Form als Linienintegral

$1a_1$) $$p = \int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds$$

oder

$1a_2$) $$p = -\int S.\,\mathfrak{A}d\rho.$$

Wenngleich bisher die Form der Functionen F, G, H so wenig bekannt ist wie die von J, so ist doch der unter $1a_1$) neugewonnene Ausdruck gegenüber dem Ausdruck unter 1'a) als entwickelter deshalb zu bezeichnen, weil jetzt die Ungewissheit über die Abhängigkeit der Grösse J von der Richtung des Elements ds gehoben ist, denn ihre Componenten F, G, H werden nur noch durch die Lage, nicht aber durch die Richtung, die ds einschlägt, bestimmt. F, G, H sind Functionen von den Coordinaten x, y, z des Element ds, hängen aber in keiner Weise von seinen Richtungscosinussen l, m, n ab.

Das locale electrokinetische Moment. Der Vector $\mathfrak{A}$ repräsentirt nach Grösse und Richtung das Zeitintegral der electromotorischen Kraft, die an der Stelle x, y, z des secundären Kreises auftreten würde, wenn man den primären Strom plötzlich unterbräche. Ich bezeichne daher diesen Vector als das *Locale Electrokinetische Moment*, das Moment an einer bestimmten Stelle x, y, z des Kreises. Er ist übrigens identisch mit dem in Art. 405 untersuchten Vectorpotential der magnetischen Induction.

591. Entwickelung des Flächenintegrals. Um zu der Entwickelung des zweiten Ausdrucks für das Moment, des Flächenintegrals $\int I dS$, zu gelangen, wende ich die im vorhergehenden Artikel erlangten Resultate auf einen rechteckigen Stromkreis $ABCDA$, dessen Seiten der Grösse nach dy, dz sind, während ihre positive Richtung von der yAxe zur zAxe führt, an.

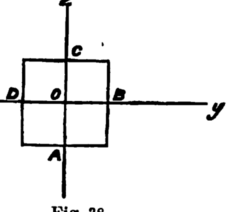


Fig. 38.

Ich bezeichne die Coordinaten des Schwerpunktes O dieses Stromkreises mit x_0, y_0, z_0 und die Werte, die G, H daselbst haben, mit G_0, H_0.

Die Coordinaten der Mitten A, B, C, D der vier Seiten des Stromkreises sind dann der Reihe nach

$$y_0, z_0 - \frac{1}{2}dz;\ y_0 + \frac{1}{2}dy, z_0;\ y_0, z_0 + \frac{1}{2}dz;\ y_0 - \frac{1}{2}dy, z_0;$$

und die entsprechenden Werte von G, H

$$G_0 - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{dz}dz,\ H_0 - \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial z}dz;$$

$$G_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial y}dy,\ H_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial y}dy;$$

$$G_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}dz,\ H_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial z}dz;$$

$$G_0 - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial y}dy,\ H_0 - \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial y}dy.$$

Hiernach wird das Moment für den kleinen rechteckigen Stromkreis dy, dz, weil ds bei A gleich $+dy$, bei B gleich $+dz$, bei C gleich $-dy$, bei D gleich $-dz$ ist,

$$3_1)\qquad p_x = \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)dy\,dz.$$

Analog ist, wenn das Rechteck in der zx Ebene liegt

$$3_2)\qquad p_y = \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)dz\,dx,$$

und, wenn es in der xy Ebene sich befindet,

$$3_3)\qquad p_z = \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Ich definire jetzt drei neue Grössen a, b, c durch die Gleichungen

$$4)\qquad \begin{aligned} a &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ b &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ c &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned}$$

die als Componenten eines neuen Vectors $\mathfrak{B}$ aufgefasst werden können. Ist jetzt dS das Element einer von dem Stromkreise s begrenzten Fläche S, und bezeichnen l, m, n die Richtungscosinusse der zu dS von der positiven Seite der Fläche S aus gezogenen Normale, so giebt der schon oft citirte Satz IV. des Art. 24

$$1\,b_1)\qquad p = \int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds = \iint\left(la + mb + nc\right)dS.$$

Kürzer lässt sich diese Gleichung schreiben, wenn man noch den Winkel ε zwischen der Richtung von $\mathfrak{A}$ und ds und den Winkel η zwischen der von $\mathfrak{B}$ und der Normale von dS einführt und unter $T(\mathfrak{A})$, $T(\mathfrak{B})$ den numerischen Betrag von $\mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{B}$ versteht. Es ist dann

$$1\,b_2)\qquad p = \int T(\mathfrak{A}) \cos\varepsilon\, ds = \iint T(\mathfrak{B}) \cos\eta\, dS.$$

Eine Vergleichung dieser Formel mit der unter 1′b) gegebenen lehrt, dass die daselbst eingeführte Grösse

$$5)\qquad I = \mathfrak{B} \cos\eta$$

ist, I bezeichnet also die Projection des Vectors $\mathfrak{B}$ auf die Normale zu dS.

592. Die Bedeutung des Vector $\mathfrak{B}$ erhellt aus der in den Artt. 490, 541 nach Faraday auseinandergesetzten Theorie, wonach die electromagnetische Wirkung an einem Stromkreise und die Induction in demselben von der Aenderung, die die Zahl der von ihm eingefassten magnetischen Inductionslinien erfährt, abhängen sollte. Mathematisch findet aber die Zahl der Inductionslinien ihren Ausdruck durch das Flächenintegral der magnetischen Induction erstreckt über irgend eine von dem Stromkreise begrenzte Fläche. Wir haben daher den hier eingeführten Vector $\mathfrak{B}$ als die früher durch magnetische Induction bezeichnete Grösse anzusehen; a, b, c sind die Componenten dieser magnetischen Induction. Wollten wir uns nun bei dieser Erkenntnis beruhigen und uns mit dem, was wir hinsichtlich der magnetischen Induction aus Experimenten an Magneten erfahren haben, zufrieden stellen, so würden wir zu keinen neuen Gesichtspunkten gelangen, wir würden einfach einer mathematischen Grösse einen Namen verleihen. Ob aber diese mathematische Grösse, ‚magnetische Induction‘, auch wirklich mit der physikalischen Grösse des gleichen Namens übereinkommt, können wir nur erfahren, wenn wir unsern Vector $\mathfrak{B}$ in seinen Eigenschaften mit Hülfe der in den letzten Capiteln aufgestellten dynamischen Principien und einer Anzahl von in die Inductionserscheinungen schlagenden Experimenten untersuchen.

Digression über Richtungen von Axen, Strömen und Inductionslinien.

593. Ich muss dem Leser zunächst einige Festsetzungen, die wir hinsichtlich des Zeichens von Grössen und Richtungen schon mehrfach und namentlich in Art. 23 getroffen haben, wieder ins Gedächtnis rufen.

Wir adoptiren das rechtshändige Axensystem. Denken wir uns also die x Axe als rechtsdrehende Schraube und auf derselben eine bewegliche Mutter, deren Fläche der yz Ebene parallel verläuft, so schreitet diese Mutter bei ihrer Drehung von der Richtung der y Axe zu der der z Axe auf der Schraube in Richtung der positiven x Axe fort. (S. Fig. 26.)

Ferner sollen Glaselectricität und australer Magnetismus als positiv gelten.

Die positive Richtung eines electrischen Stromes und die einer electrischen Inductionslinie (Kraftlinie) ist die Richtung, nach der **positive** Electricität sich bewegt oder zu bewegen sucht. Die positive Richtung einer magnetischen Inductionslinie (Kraftlinie) geht nach da hin, wohin das nach Norden zeigende Ende einer Compassnadel hinweist. (S. Fig. 25.)

Es ist viel schwerer, eine Regel, wenn sie in Form einer Alternative, als wenn sie kategorisch aufgestellt ist, zu behalten, der Leser wird daher gut tun, wenn er sich selbst eine bestimmte Methode ausarbeitet, die ihn diese Festsetzungen stets sicher seinem Gedächtnis zurückzurufen gestattet.

Theorie der Gleitstücke.

594. Aenderung des electrokinetischen Moments durch Verschiebung eines Gleitstückes. Nach dieser Abschweifung gehe ich dazu über, die

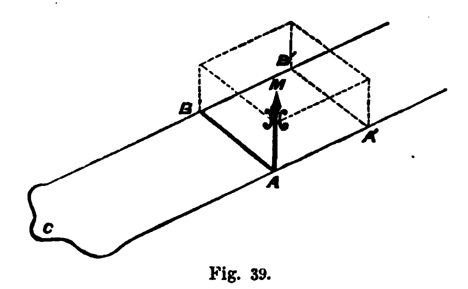


Fig. 39.

Aenderung, die das electrokinetische Moment erfährt, wenn die Form des secundären Kreises, auf den es sich bezieht, in vorgeschriebener Weise variirt wird, abzuleiten.

Es seien AA', BB' zwei parallele gerade Leiter, die mit einander einerseits durch einen Leitungszweig C, der ganz beliebig geformt sein kann, und andererseits durch einen geraden Draht AB verbunden sind, der mit seinen beiden Enden A und B auf ihnen gleiten kann.

$ABCA$ bildet einen vollständigen Stromkreis, dessen Richtung in Richtung $ABCA$ verläuft; wir betrachten ihn als unsern secundären Kreis.

Verschiebt man das Gleitstück parallel mit sich selbst aus der Lage AB in die Lage $A'B'$, so geht der secundäre Stromkreis aus ABC über in $A'B'C$, und man hat, nach Art. 587

$$\text{Moment}\,(A'B'CA') = \text{Moment}\,(ABCA) + \text{Moment}\,(AA'B'BA).$$

Die Aenderung, die das Moment des secundären Kreises durch seine Umformung aus $ABCA$ in $A'B'CA'$ erfährt, ist also gleich dem Moment des hinzugekommenen Parallelogramms $AA'B'BA$.

Wenn dieses hinzugekommene Parallelogramm so klein ist, dass die magnetische Induction von Ort zu Ort des von ihm eingefassten Flächen-

stückes weder in Grösse noch in Richtung merklich variirt, so haben wir nach Art. 591

1) $$\text{Moment}\,(AA'B'BA) = \mathfrak{B}\cos\eta\,.\,AA'B'BA,$$

wo $\mathfrak{B}$ die magnetische Induction, η den Winkel angiebt, den die Richtung dieser Grösse mit der positiven Normale des Parallelogramms einschliesst.

Das Resultat lässt sich etwas anders interpretiren, wenn man von A aus eine Linie AM zieht, die nach Grösse und Richtung die erste der genannten Grössen, die magnetische Induction, darstellt. Das Moment des Parallelogramms $AA'B'BA$ ist dann gleich dem Inhalt des Parallelepipeds, das dieses Parallelogramm zur Grundfläche und die magnetische Induction zur Kante hat.

Wenn die Verhältnisse so sind, wie ich sie in der Figur 39 zu Grunde gelegt habe, das Parallelogramm also auf der Ebene der Zeichnung liegt und die magnetische Induction von unten nach oben gerichtet ist, so ist das Volumen des betreffenden Parallelepipeds als positiv anzusehen. Allgemeiner ist die folgende Regel:

Das Moment ist positiv, wenn die positiven Richtungen des Stromstückes AB, der magnetischen Induction AM und der Verschiebung AA', genommen in der Ordnung, wie sie hier angegeben ist, ein rechthändiges Axensystem bilden.

Das Parallelepiped $AA'B'BM$ giebt hiernach den Zuwachs, den das Moment p des secundären Kreises $ABCA$ erfährt, wenn das Gleitstück parallel mit sich selbst von AB nach $A'B'$ verschoben wird.

595. Induction in einem Gleitstück. Während das Gleitstück sich bewegt, wird im secundären Stromkreis durch den primären Strom eine electromotorische Kraft E inducirt, deren Stärke nach Art. 579 durch die Gleichung

2) $$E = -\frac{dp}{dt}$$

gegeben ist.

Bezeichnet also AA' die Verschiebung, die das Gleitstück in der Zeiteinheit erfährt, so repräsentirt sie zugleich die Geschwindigkeit, mit der das Gleitstück verrückt wird, das im vorigen Artikel fixirte Parallelepiped giebt dann die Grösse dp/dt, und ist hiernach gleich der electromotorischen Kraft, die im Gleitstück nach seiner negativen Richtung BA bei seiner Bewegung inducirt wird. Allgemeiner können wir sagen:

Die electromotorische Kraft, die ein fixes electromagnetisches Feld in dem Gleitstück infolge der Bewegung dieses inducirt, wird durch das Volumen eines Parallelepipeds repräsentirt, dessen zusammenstossende Kanten nach Grösse und Richtung die Geschwindigkeit des Gleitstückes, die magnetische Induction und das Gleitstück selbst darstellen. Das Volumen wird als positiv gerechnet, wenn die drei genannten Vectoren in der angegebenen Reihenfolge ein rechthändiges Axensystem zusammensetzen.

596. Arbeit des electromagnetischen Feldes während der Verschiebung des Gleitstückes. Ausser der Induction erfährt das Gleitstück bei seiner

Verschiebung noch eine electromagnetische Einwirkung, die sich mit Hilfe unserer dynamischen Betrachtungen berechnen lässt. Sei i_2 die Stärke des Stromes, die in dem secundären Kreis während der Bewegung seines Gleitstückes in positiver Richtung ABC inducirt wird. Die Arbeit, die die electromagnetische Kraft des primären Stromes bei der Verschiebung des Gleitstückes von AB nach $A'B'$ leistet, ist dann $(M - M')\, i_1 i_2$, wenn M den Wert des Potentials der beiden Kreise auf einander in der Lage AB, M' den in der Lage $A'B'$ des Gleitstückes angiebt.

Nun hat man aber

$$(M' - M)\, i_1 = p' - p.$$

Daher wird jene Arbeit

$$W = (p' - p)\, i_2, \tag{3}$$

$p' - p$ ist gleich dem oft genannten Parallelepiped aus AB, AM, AA'. Denkt man sich also AB im Verhältnis i_2 zu 1 vergrössert, so folgt:

Die Arbeit, die das electromagnetische Feld an dem Gleitstück während seiner Verschiebung parallel mit sich selbst um die Strecke AA' leistet, wird durch den Rauminhalt des Parallelepipeds, dessen Kanten der Grösse und Richtung nach durch die in dem Gleitstück inducirte Electricitätsmenge, die magnetische Induction und die Verschiebungsstrecke gebildet sind, dargestellt.

Von allen Verschiebungen gleicher Grösse erfordert diejenige, welche senkrecht zur Richtung des Gleitstückes und zur Richtung der magnetischen Induction vor sich geht, die meiste Arbeit.

Mechanische Kraftwirkung auf das Gleitstück. Aus dem obigen für die Arbeit abgeleiteten Ausdruck ersieht man noch:

Die electromagnetische Kraft, die das Gleitstück angreift, wird durch den Inhalt des Parallelogramms, dessen Seiten nach Grösse und Richtung die in dem Gleitstück inducirte Electricitätsmenge und die magnetische Induction bilden, repräsentirt. Sie wirkt senkrecht zu diesem Parallelogramm nach einer Richtung, die mit den Richtungen der Seiten dieses Parallelogramms in der Reihenfolge Gleitstück, magnetische Induction, Kraftwirkung ein rechthändiges Axensystem constituirt.

Ist ε der Winkel, den die Richtung des Gleitstücks mit der der magnetischen Induction einschliesst, so wird diese Kraft

$$F = i_2\, AB \,.\, \mathfrak{B} \,.\, \sin\varepsilon. \tag{4}$$

Vier electrische Definitionen für die magnetischen Inductionslinien.

597. Ich habe schon mehrfach Definitionen für die magnetischen Inductionslinien aufgestellt, die eben behandelte Theorie der Gleitstücke giebt mir aber Gelegenheit, zu den bei frühern Gelegenheiten schon angeführten noch andere hinzuzufügen.

Wenn die Bewegungsrichtung AA' des Gleitstückes AB mit der Richtung AM der magnetischen Induction des Feldes zusammenfällt, so wird durch diese Bewegung in dem secundären Stromkreis keine electromotorische Kraft inducirt, wie auch AB für sich gerichtet sein mag. Wird AB schon von vornherein von einem Strome durchflossen, so wird seine Tendenz sich zu verschieben nicht nach der Richtung der magnetischen Induction gehen.

Fällt das Gleitstück seiner Richtung nach mit der magnetischen Induction zusammen, so kann es sich irgend wie bewegen, ohne dass deshalb in ihm ein Strom inducirt wird. Strömt in ihm von vornherein ein Strom, so wird er doch von keiner mechanischen Kraft durch das electromagnetische Feld angegriffen.

Diese Behauptungen folgen unmittelbar aus den Ergebnissen der vorangehenden drei Artikel, sie führen aber zu den folgenden Definitionen für eine magnetische Inductionslinie.

1. Gleitet ein Leiter parallel mit sich selbst auf einer magnetischen Inductionslinie eines electromagnetischen Feldes, so wird in ihm keine electromotorische Kraft inducirt.

2. Ein stromführender Leiter hat kein Bestreben von selbst auf einer magnetischen Inductionslinie zu gleiten.

3. Verschiebt sich ein linearer Leiter in einem electromagnetischen Felde parallel mit sich selbst, so wird in ihm keine electromotorische Kraft durch diese Verschiebung inducirt, wenn er seiner Richtung nach stets mit der einer magnetischen Inductionslinie zusammenfällt.

4. Hat ein stromführender linearer Leiter genau dieselbe Richtung wie eine magnetische Inductionslinie, so übt das electromagnetische Feld auf ihn keine mechanische Kraft aus.

Allgemeine Gleichungen für die in der Zeiteinheit inducirte electromotorische Kraft.

598. Festes Coordinatensystem. Nach Art. 579 ist die in einem secundären Stromkreise von einem etwa durch einen primären Strom hervorgerufenen electromagnetischen Felde inducirte electromotorische Kraft

$$E = -\frac{dp}{dt}, \tag{1'}$$

wo

$$p = \int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds$$

gesetzt ist.

Die Veränderung, die p mit der Zeit erleidet, kann davon herrühren, dass der secundäre Kreis seine Form oder seine Lage oder beides ändert,

es werden also im allgemeinen nicht blos die F, G, H, sondern auch die x, y, z Functionen der Zeit sein. Man hat dem entsprechend

$$E = -\int\left(\frac{dF}{dt}\frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dt}\frac{dy}{ds} + \frac{dH}{dt}\frac{dz}{ds}\right)ds$$
$$-\int\left(F\frac{d^2x}{ds\,dt} + G\frac{d^2y}{ds\,dt} + H\frac{d^2z}{ds\,dt}\right)ds,$$

oder weil

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

ist,

1 a)
$$E = -\int\left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial G}{\partial t}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial H}{\partial t}\frac{dz}{ds}\right)ds$$
$$-\int\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dy}{ds} + \frac{dH}{\partial x}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds$$
$$-\int\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{dG}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dy}{dt}ds$$
$$-\int\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dz}{dt}ds$$
$$-\int\left(F\frac{d^2x}{ds\,dt} + G\frac{d^2y}{ds\,dt} + H\frac{d^2z}{ds\,dt}\right)ds.$$

Nun war nach Art. 591

A)
$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$
$$b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x},$$
$$c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial G}{\partial x} = c + \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -b + \frac{\partial F}{\partial z},$$

mithin geht in dem zweiten Integral der Factor von ds über in

$$\left(c\frac{dy}{ds} - b\frac{dz}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt},$$

also in

$$\left(c\frac{dy}{ds} - b\frac{dz}{ds} + \frac{dF}{ds}\right)\frac{dx}{dt}.$$

Zieht man dazu das erste Glied des fünften Integrals und beachtet, dass

$$\frac{dF}{ds}\frac{dx}{dt} + F\frac{d^2x}{ds\,dt} = \frac{d}{ds}\left(F\frac{dx}{dt}\right)$$

ist, und dass

$$\int \frac{d}{ds}\left(F\frac{dx}{dt}\right)ds = \Big/_{0}^{s} F\frac{dx}{dt}$$

für den geschlossenen secundären Stromkreis verschwindet, so sieht man, dass das zweite Integral vermehrt um das erste Glied des fünften Integrals sich auf

$$\int\left(c\frac{dy}{ds} - b\frac{dz}{ds}\right)ds$$

reducirt. Da der ganze Ausdruck für E symmetrisch gebaut ist, so resultirt schliesslich

B′a)
$$\begin{aligned} E = &+\int\left(c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t}\right)\frac{dx}{ds}ds \\ &+\int\left(a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{\partial G}{\partial t}\right)\frac{dy}{ds}ds \\ &+\int\left(b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t}\right)\frac{dz}{ds}ds. \end{aligned}$$

Der Ausdruck für die inducirte electromotorische Kraft hat also die Form

B′b)
$$E = \int\left(P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

wenn

B)
$$\begin{aligned} P &= c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ Q &= a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ R &= b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{aligned}$$

gesetzt wird.*)

Die neue Function Ψ habe ich, um die Ausdrücke für P, Q, R so allgemein als möglich zu gestalten, hinzugefügt. In dem Resultat für die im ganzen secundären Stromkreis inducirte electromotorische Kraft spielt sie keine Rolle, weil sie daraus verschwindet. Sie bleibt also auch unbestimmt, so

*) In anderer Weise sind diese Gleichungen in der Abhandlung *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* Phil. Trans. 1864 abgeleitet.

lange es sich lediglich um volle geschlossene Stromkreise handelt. Es wird sich aber noch herausstellen, dass da, wo man alle Umstände des Problems genau anzugeben im Stande ist, der Grösse Ψ eine ganz bestimmte Bedeutung beigelegt zu werden vermag. Sie wird nach einer noch aufzustellenden Definition das *Locale Electrische Potential* im Punkte (x, y, z) des secundären Stromkreises werden.

Geht man vom ganzen Stromkreis zu den einzelnen Stromelementen über, so repräsentirt

$$B_1'a) \qquad dE = \left(P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds}\right)ds$$

die in dem Element ds des secundären Stromkreises in der Zeiteinheit inducirte electromotorische Kraft.

Die drei Grössen P, Q, R können als Componenten eines Vectors $\mathfrak{E}$ aufgefasst werden. Bezeichnet man den numerischen Betrag dieses Vectors mit $T(\mathfrak{E})$ und den Winkel, den die Richtung desselben mit der des Elements ds einschliesst, durch ε, so wird auch

$$B'c) \qquad E = \int T(\mathfrak{E}) \cos\varepsilon\, ds,$$

$$B_1'b) \qquad T(\mathfrak{E}) \cos\varepsilon = P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds}.$$

Locale Induction. Der Vector $\mathfrak{E}$ ist dann die electromotorische Kraft, die an dem Element ds durch Induction wirkt, $\mathfrak{E}\cos\varepsilon$ ist die in dem Element inducirte. Die Richtung und Grösse von $\mathfrak{E}$ hängt einerseits von der Lage und Bewegung von ds und andererseits von den etwaigen Veränderungen des electromagnetischen Feldes, in dem der secundäre Stromkreis sich aufhält, ab, sie wird aber nicht durch die Richtung des Elements beeinflusst. Man wird daher von der Zugehörigkeit dieses Elements zu einem ganzen Stromkreise abstrahiren können und dasselbe einfach als Teil eines Körpers betrachten dürfen. $\mathfrak{E}$ ist dann die den Körper in dem Punkte, wo ds sich befindet, angreifende electromotorische Kraft. Was man aber unter electromotorischer Kraft in einem Punkte zu verstehen hat, ist schon unter anderem in Art. 68 gehörig auseinandergesetzt worden. Sie ist auch die an dieser Stelle resultirende electrische Kraft, das heisst die Kraftwirkung, die eine daselbst concentrirte Einheit positiver Electricität erleiden würde. Unsere Grösse $\mathfrak{E}$ ist aber die allgemeinste Form der electromotorischen Kraft für den Fall, dass ein an sich veränderlicher Körper sich in einem veränderlichen electromagnetischen Felde bewegt.

Der Effect der inducirten electromotorischen Kraft hängt von der Beschaffenheit des betreffenden Körpers ab, ist dieser ein Leiter, so wird sie in ihm einen electrischen Strom produciren, ist er ein Dielectricum, so wird eine electrische Verschiebung das Resultat ihrer Wirkung sein.

Ich mache noch den Leser darauf aufmerksam, dass die electromotorische Kraft, die auf ein Teilchen wirkt, sorgfältig von der, die längs eines Bogens einer Curve tätig ist, getrennt werden muss. Die letztere Grösse ist das Linienintegral der erstern, und hat ihre Definition in Art. 69 erfahren.

599. Die electromotorische Kraft hängt in ihrer durch die drei unter *B* festgesetzten Componenten gegebenen Definition für jedes Partikel von drei Umständen ab.

1. Erstens wird sie bestimmt durch die Bewegung, die das Partikel gerade durch das electromagnetische Feld vollführt. Dem tragen die beiden ersten Glieder in den bezüglichen Gleichungen für P, Q, R Rechnung. Wie der Bau dieser Glieder zeigt, ist für die Grösse dieser Teile der bezüglichen Componenten die Geschwindigkeit, mit der das Partikel sich transversal gegen die magnetischen Inductionslinien des Feldes verschiebt, entscheidend.

Ich bezeichne die so bestimmte electromotorische Kraft durch $\mathfrak{E}_1$, ihre Componenten durch P_1, Q_1, R_1, und habe

$$\text{B}_1)\qquad \begin{aligned} P_1 &= c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt}, \\ Q_1 &= a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt}, \\ R_1 &= b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt}; \end{aligned}$$

$$\text{B}'_1)\qquad \mathfrak{E}_1 = V.\,\mathfrak{G}\mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{G}$ ist ein Vector, der die Geschwindigkeit des Partikels, $\mathfrak{B}$ ein Vector, der die magnetische Induction des Feldes an der Stelle x, y, z zur Zeit t darstellt; V giebt an, dass von der Operation $\mathfrak{G}\mathfrak{B}$ der Vectorteil zu nehmen ist.

Dieser infolge der Bewegung des Partikels allein an ihm wirkende Teil der electromotorischen Kraft ist also der Vectorteil des Products aus der Geschwindigkeit des Partikels in die magnetische Induction. Ihr numerischer Betrag wird durch die Fläche eines Parallelogramms, dessen Seiten die Geschwindigkeit und die magnetische Induction der Grösse und Richtung nach darstellen, repräsentirt. Ihre Wirkungsrichtung steht normal zu diesem Parallelogramm und bildet mit der Richtung der Bewegung und der magnetischen Induction in der Reihenfolge Geschwindigkeit, magnetische Induction, electromotorische Kraft ein rechthändiges Axensystem.

2) Der zweite Teil $\mathfrak{E}_2$ der electromotorischen Kraft $\mathfrak{E}$ hat die Componenten

$$\text{B}_2)\qquad \begin{aligned} P_2 &= -\frac{\partial F}{\partial t}, \\ Q_2 &= -\frac{\partial G}{\partial t}, \\ R_2 &= -\frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned}$$

und ist

B'₂) $$\mathfrak{E}_2 = -\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}.$$

$\mathfrak{A}$ ist derselbe Vector, den wir schon in Art. 590 kennen gelernt haben. $\mathfrak{E}_2$ hängt also von der Veränderung, die dieser Vector mit der Zeit und ganz unabhängig von den Lagenänderungen, die unser Partikel sonst etwa erfährt, erleidet, ab. Sie kann durch Variation der Stärke oder Lage der das electromagnetische Feld producirenden primären Agentien hervorgerufen werden.

3. Drittens endlich besitzt die electromotorische Kraft $\mathfrak{E}$ noch einen Teil $\mathfrak{E}_3$, dessen Componenten

B₃) $$P_3 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q_3 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad R_3 = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

sind, und dessen Grösse durch

B'₃) $$\mathfrak{E}_3 = -\nabla \Psi$$

gegeben ist.

Dieser dritte Teil hat, wie man sieht, ein Potential Ψ und rührt davon her, dass dieses an den verschiedenen Stellen des Feldes verschiedene Werte aufweisen kann. Alles zusammengefasst, wird

B'd) $$\mathfrak{E} = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla \Psi.$$

600. Bewegliches Axensystem. Da unsere Erde sich bewegt, mithin alle in der Praxis verwendeten Coordinatensysteme sich mit ihr im Raume verschieben, so untersuche ich noch die Veränderungen, die unsere Formeln erleiden, wenn die darin vertretenen Grössen nicht wie bis jetzt auf feste, sondern auf im Raume bewegliche Axen bezogen werden.

Beziehen sich die Coordinaten eines Punktes auf ein festes rechtwinkliges Axensystem, so bezeichne ich sie wie bisher durch x, y, z, beziehen sie sich auf ein im Raum bewegliches, so sollen die Symbole x', y', z' Anwendung finden.

Wählt man das feste Axensystem so, dass es zu irgend einer Zeit $t = 0$ mit dem beweglichen zusammenfällt, so ändern sich beim Uebergang von dem einen Axensystem zu dem andern nur die nach der Zeit differenzirten Grössen.

Ich bezeichne mit $\delta x/\delta t$ die Geschwindigkeit, die ein mit dem beweglichen Axensystem starr verbundener Punkt, bei der Bewegung dieses Systems in Bezug auf die x Axe des festen Systems zur Zeit t besitzt. Die Geschwindigkeit dx/dt irgend eines sich bewegenden Raumpunktes in Bezug auf die x Axe des festen Axensystems steht dann mit der Geschwindigkeit dx'/dt,

die derselbe Punkt in Bezug auf die x' Axe des beweglichen Axensystems zu derselben Zeit aufweist, in der Relation

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{dx'}{dt}.$$

Sind aber u, v, w die Componenten der Translations-, ω_1, ω_2, ω_3 die der Rotationsgeschwindigkeit des beweglichen Axensystems gegen das feste, so hat man

$$\frac{\delta x}{\delta t}=u+\omega_2 z-\omega_3 y,$$

$$\frac{\delta y}{\delta t}=v+\omega_3 x-\omega_1 z,$$

$$\frac{\delta z}{\delta t}=w+\omega_1 y-\omega_2 x,$$

also

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'}{dt}+u+\omega_2 z-\omega_3 y,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy'}{dt}+v+\omega_3 x-\omega_1 z,$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz'}{dt}+w+\omega_1 y-\omega_2 x.$$

Ferner haben wir, da F, G, H sich auf die bezüglichen Axen der x, y, z beziehen und so gut wie die Grössen x, y, z Vectoren sind,

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F'}{\partial t}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t}+H\omega_2-G\omega_3.$$

Darin ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial G}{\partial x}-c,\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial H}{\partial x}+b$$

zu setzen, wodurch der obige Ausdruck sich transformirt in

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F'}{\partial t}-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\delta z}{\delta t}\right)+c\frac{\delta y}{\delta t}-b\frac{\delta z}{\delta t}+H\omega_2-G\omega_3.$$

Da

$$\omega_2=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta z}{\delta t}\right),\ \omega_3=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta y}{\delta t}\right),\ 0=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)$$

ist, so wird auch

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F'}{\partial t}+c\frac{\delta y}{\delta t}-b\frac{\delta z}{\delta t}-\left\{F\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)+G\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta y}{\delta t}\right)+H\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta z}{\delta t}\right)\right\}$$
$$-\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\delta z}{\delta t}\right\}.$$

Die beiden Klammerausdrücke bilden zusammen den vollständigen Differentialquotienten nach x des Ausdrucks

$$-\Psi' = F\frac{\delta x}{\delta t} + G\frac{\delta y}{\delta t} + H\frac{\delta z}{\delta t},$$

es wird daher

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F'}{\partial t} + c\frac{\delta y}{\delta t} - b\frac{\delta z}{\delta t} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x},$$
$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial G'}{\partial t'} + a\frac{\delta z}{\partial t} - c\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial \Psi'}{\partial y},$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H'}{\partial t} + b\frac{\delta x}{\delta t} - a\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial \Psi'}{\partial z}.$$

Hieraus erhält man die Componenten des Vectors $\mathfrak{E}$, bezogen auf das bewegliche Axensystem der x', y', z'.

$$\text{B}'') \qquad \begin{aligned} P' &= c\frac{dy'}{dt} - b\frac{dz'}{dt} - \frac{\partial F'}{\partial t} - \frac{\partial(\Psi + \Psi')}{\partial x}, \\ Q' &= a\frac{dz'}{dt} - c\frac{dx'}{dt} - \frac{\partial G'}{\partial t} - \frac{\partial(\Psi + \Psi')}{\partial y}, \\ R' &= b\frac{dx'}{dt} - a\frac{dy'}{dt} - \frac{\partial H'}{\partial t} - \frac{\partial(\Psi + \Psi')}{\partial z}. \end{aligned}$$

601. Die gedachten Componenten der an einem Körperpartikel wirkenden electromotorischen Kraft werden also, wenn man sie auf ein im Raume, zum Beispiel mit der Erde, bewegliches Axensystem bezieht, durch Formeln von ganz demselben Typus, wie wenn man sie auf ein absolut festes Axensystem bezieht, dargestellt, nur ist im allgemeinern Fall des beweglichen Axensystems statt Ψ zu setzen $\Psi + \Psi'$.

Handelt sich es um die Berechnung der in einem geschlossenen Stromkreise inducirten electromotorischen Kraft, so hat man immer, ob man ein fixes oder ein bewegliches Axensystem in Anwendung bringt,

$$E = \int\left(P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

weil hier weder Ψ noch Ψ' in Betracht kommt.

Alle Untersuchungen, die sich auf geschlossene Stromkreise oder Ströme beziehen, gelten hiernach für bewegliche Axensysteme so gut, wie für festgelegte (Art. 668).

Allgemeine Formeln für die mechanische Kraft, von der ein stromführender Leiter in einem electromagnetischen Felde angegriffen wird.

602. Wir haben nun noch die mechanische Kraft, von der ein stromführender Leiter in einem electromagnetischen Felde angegriffen wird, zu

eruiren. Ist x_1 eine der Variabeln, die die Form und Lage unseres stromführenden Leiters fixiren, und X_1 die mechanische Kraft des electromagnetischen Feldes, die diese Variabeln zu vergrössern strebt, so gilt nach Art. 583 die Gleichung

$$1') \qquad X_1 = \frac{\partial M}{\partial x_1} i_1 i_2.$$

i_2 ist die Stärke des in unserm Leiter fliessenden Stromes, i_1 wird durch das electromagnetische Feld bestimmt, ist eventuell die Stärke eines daselbst liegenden primären Stromes, und kann beliebig, jedenfalls aber unabhängig von x_1 variiren.

Wir haben also wegen

$$p = M i_1 = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

$$1\text{a}) \qquad X_1 = i_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds \right\}.$$

Die Veränderung der Variabele x_1 soll darin bestehen, dass jeder Punkt unseres Leiters um eine Strecke δx in Richtung der x Axe verschoben wird. Die Verschiebung δx kann bei jedem Teile des Leiters unabhängig von der aller andern Teile vorgenommen werden, sie darf aber den Leiter in seiner Continuität nicht stören; demnach soll δx eine stetige Function von s sein.

Ich bezeichne mit X die auf das von $s = 0$ bis $s = s$ reichende Leiterstück in Richtung der x Axe wirkende electromagnetische Kraft des Feldes, $(dX/ds)\, ds$ giebt dann den Teil dieser Kraft, der das Element ds des Leiters angreift. Die Arbeit, die während der gedachten Verschiebung des von $s = 0$ bis $s = s$ reichenden Leiterstückes an demselben geleistet wird, ist also

$$\int_0^s \frac{dX}{ds} \delta x\, ds = i_2 \int_0^s \frac{d}{d\delta x} \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) \delta x\, ds.$$

Die Ausführung der unter dem Integralzeichen angedeuteten Differentiation ergiebt, weil δx ganz willkürlich von s abhängt, mithin

$$\frac{d^2}{d\delta x\, ds} = \frac{d^2}{ds\, d\delta x}$$

gesetzt werden darf, für den Factor von $\delta x\, ds$

$$\frac{dF}{d\delta x}\frac{dx}{ds} + \frac{dG}{d\delta x}\frac{dy}{ds} + \frac{dH}{d\delta x}\frac{dz}{ds} + F \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{d\delta x}\right) + G \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{d\delta x}\right) + H \frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{d\delta x}\right).$$

Es ist aber einerseits

$$\frac{dx}{d\delta x} = 1, \quad \frac{dy}{d\delta x} = 0, \quad \frac{dz}{d\delta x} = 0,$$

und andererseits

$$\frac{dF}{d\delta x}=\frac{\partial F}{\partial \delta x}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\delta x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\delta x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{d\delta x}=\frac{\partial F}{\partial \delta x}+\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Entsprechende Gleichungen gelten für $dG/d\delta x$ und $dH/d\delta x$. Man hat also für jenen Factor

$$\frac{\partial F}{\partial \delta x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial G}{\partial \delta x}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial H}{\partial \delta x}\frac{dz}{ds}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial G}{\partial x}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{dz}{ds}.$$

Die partiellen Derivirten von F, G, H nach δx müssen, weil diese Grössen δx implicite nicht enthalten, verschwinden, ferner ist

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial G}{\partial x}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{dz}{ds}=c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{ds}$$

und

$$\frac{d\delta x}{ds}=0.$$

Wir haben also

$$\int_0^s\frac{dX}{ds}\delta x\,ds=i_2\int_0^s\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}\right)\delta x\,ds+i_2\int_0^s\frac{d(F\delta x)}{ds}ds.$$

Bezeichnet s die gesammte Länge des geschlossenen stromführenden Leiters, so wird das zweite Integral gleich Null, es bleibt

$$\int\frac{dX}{ds}\delta x\,ds=i_2\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}\right)\delta x\,ds.$$

Die Verrückung δx war nur an die Bedingung gebunden, dass sie den Leiter nicht zerreissen sollte, sonst konnte sie an den einzelnen Stellen des Leiters ganz willkürlich vorgenommen werden, daher müssen nicht blos die beiderseitigen Integrale der letzten Gleichung, sondern auch ihre Elemente einander gleich sein, man hat

$$\mathrm{C}_1)\qquad \begin{aligned}\frac{dX}{ds}ds&=i_2\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}\right)ds,\\ \frac{dY}{ds}ds&=i_2\left(a\frac{dz}{ds}-c\frac{dx}{ds}\right)ds,\\ \frac{dZ}{ds}ds&=i_2\left(b\frac{dx}{ds}-a\frac{dy}{ds}\right)ds.\end{aligned}$$

Die Resultante $\mathfrak{R}$ dieser das Stromelement $i\,ds$ angreifenden mechanischen Kräfte des electromagnetischen Feldes ist

$$\mathrm{C}_1)\qquad \mathfrak{R}=i_2 V.\,d\rho\mathfrak{B},$$

wo $d\rho$ das Leiterelement ds, $\mathfrak{B}$ die magnetische Induction des Feldes bezeichnet, beide Grössen als Vectoren aufgefasst, und V angiebt, dass von der Operation $d\rho\mathfrak{B}$ der Vectorteil zu nehmen ist.

603. Haben wir es nicht mit einem linearen, sondern mit einem körperlichen Leiter zu tun, so müssen wir die seine Teile angreifende Kraft, statt wie bisher auf eine Längeneinheit, auf Volumeinheit seiner Substanz und die Stärke des ihn durchsetzenden Stromes, statt wie bisher auf den ganzen Querschnitt des Leiters, auf Flächeneinheit beziehen.

Seien u, v, w die auf Flächeneinheit bezogenen Stromcomponenten. Das Volumen eines Elements des Körpers von der Länge ds und dem Querschnitt S ist Sds, die auf Flächeneinheit bezogene Stärke des ihn in Richtung der xAxe durchziehenden Stromes $u = i_2 dx/S ds$. Hiernach wird allgemein

$$u = i_2 \frac{dx}{S ds}, \quad v = i_2 \frac{dy}{S ds}, \quad w = i_2 \frac{dz}{S ds}.$$

Bezeichnen also X, Y, Z die eine Volumeneinheit des körperlichen stromführenden Leiters angreifenden mechanischen Kraftcomponenten, so hat man

$$\frac{X S ds}{ds} = S(vc - wb),$$

folglich

$$\text{C)} \qquad \begin{aligned} X &= vc - wb, \\ Y &= wa - uc, \\ Z &= ub - va. \end{aligned}$$

Darin sind, um es nochmals zu wiederholen, X, Y, Z die Componenten der ein Volumelement des stromführenden Körpers angreifenden mechanischen Kräfte des electromagnetischen Feldes dividirt durch den Rauminhalt des Elements;

u, v, w die Stärkecomponenten des einen Querschnitt des Elements durchziehenden Stromes dividirt durch den Flächeninhalt dieses Querschnitts;

a, b, c die Componenten der magnetischen Induction des Feldes an der Stelle, wo das betreffende Element sich gerade aufhält.

Endlich wird in der Schreibweise des Quaternionencalculs die Resultirende $\mathfrak{F}$ der eine Volumeinheit des Leiters angreifenden mechanischen Kraft nach Grösse und Richtung durch die Gleichung

$$\text{C')} \qquad \mathfrak{F} = V.\mathfrak{C}\mathfrak{B}$$

dargestellt, wo $\mathfrak{C}$ den durch den Leiter fliessenden Strom bezeichnet.

Cap. IX.

Allgemeine Gleichungen des electromagnetischen Feldes.

Rückblick.

604 a. Unsere theoretische Untersuchung der Electrodynamik begann mit der Annahme, dass ein System stromführender Leiter ein dynamisches System bildet, in welchem die Stromstärken als Geschwindigkeiten und deren Integrale als Coordinaten aufzufassen sind. Weiter sahen wir, dass diese Coordinaten in den Gleichungen unseres Systems nicht vertreten sind, woraus die kinetische Energie, soweit sie von den Strömen abhing, als homogene quadratische Function der Stromstärken resultirte, deren Coefficienten von der Lage und Form der Leiter, nicht aber von den sie durchströmenden Electricitätsmengen abhängen. Indem wir dann voraussetzten, dass diese Coefficienten durch Experimente oder sonst wie eruirt werden könnten, leiteten wir durch rein dynamische Schlussfolgerungen die Gesetze der electrischen Induction und die der electromagnetischen Action der Ströme auf einander ab. Dabei lernten wir den Begriff der electrokinetischen Energie und den des electrokinetischen Moments der Ströme kennen und gewannen eine physikalische Anschauung für das Potential zweier Ströme auf einander.

Im letzten Capitel untersuchten wir die Einwirkungen eines eventuell variabeln electromagnetischen Feldes auf einen der Form und Lage nach beliebigen Aenderungen unterworfenen Leiter. Von den Grössen, die wir dabei kennen lernten, bedeutete $\mathfrak{A}$ einen Vector, der in jedem Punkte des Feldes einen nach Grösse und Richtung bestimmten Wert besitzt, es war das das locale electrokinetische Moment. Dieselbe Grösse kann auch als das Zeitintegral der an der betreffenden Stelle des Feldes durch plötzliche Entfernung aller Agentien (Ströme, Magnete) aus demselben inducirten electromotorischen Kraft aufgefasst werden. Sie ist mit dem in Art. 405 untersuchten Vectorpotential der magnetischen Induction identisch. Ihre Componenten in Richtung der Coordinatenaxen habe ich durch F, G, H be-

zeichnet. Das electrokinetische Moment eines Stromkreises ergab sich als das Linienintegral des localen electrokinetischen Moments, erstreckt über alle Stellen des Stromkreises.

Die Darstellung des electrokinetischen Moments eines Stromkreises führte uns dann durch den in Art. 24 Theorem IV. gelehrten Uebergang vom Linienintegral zu einem Flächenintegral zur Conception eines andern mit $\mathfrak{B}$ bezeichneten Vectors, der uns durch seine Componenten a, b, c die electromotorischen und ponderomotorischen von einem electromagnetischen Felde auf einen Leiter ausgeübten Kräfte kennen lehrte. Wir nannten diesen neuen Vector, weil seine Eigenschaften mit denen der von Faraday untersuchten magnetischen Induction zusammenfielen, die magnetische Induction des Feldes. Sie ist eine auf einen bestimmten Ort sich beziehende Grösse.

Fundamentalgleichungen für die magnetische Induction, die electromotorische und ponderomotorische Kraft eines Feldes.

604b. Dann haben wir drei besonders hervorzuhebende Gleichungssysteme unter A), B), C) aufgestellt. Das erste,

$$\text{A)} \qquad \begin{aligned} a &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ b &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ c &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned}$$

drückt die Componenten der magnetischen Induction durch Derivirte der Componenten des localen electrokinetischen Moments aus und begründet noch die Beziehung

$$\text{A}') \qquad \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Das zweite,

$$\text{B)} \qquad \begin{aligned} P &= c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ Q &= a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ R &= b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \end{aligned}$$

giebt die Componenten der in einem Conductor local inducirten electromotorischen Kraft in ihrer Abhängigkeit von der Bewegung des Conductors durch die magnetischen Inductionslinien des Feldes hindurch und von der zeitlichen Veränderung des localen electrokinetischen Moments.

Endlich setzt das dritte,

$$X = vc - wb,$$

C)
$$Y = wa - uc,$$

$$Z = ub - va,$$

die Grösse der Componenten der eine Volumeinheit des Conductors angreifenden mechanischen Kraft des electromagnetischen Feldes durch die Componenten der magnetischen Induction dieses Feldes und durch die der Stärke des den Conductor durchfliessenden Stromes fest. Wenn ich hier von Leitern und von Strömen spreche, so geschieht das nur der bequemeren Ausdrucksweise wegen, die Formeln gelten ebenso gut für dielectrische Medien, in denen die electromotorische Kraft statt des Stromes eine electrische Verschiebung zu Stande bringt.

605. All unsere Ableitungen beruhen, soweit sie die nackten Formeln betreffen, wie bemerkt, auf rein dynamischen Betrachtungen, sie sind ohne Zuhilfenahme quantitativer Experimente über electrische oder magnetische Phänomene durchgeführt. Nur, wenn es sich darum handelte, den durch die mathematische Rechnung aus der Theorie deducirten abstracten Grössen concrete Bedeutung zu unterstellen, haben wir von den experimentellen Ergebnissen unseres Wissenszweiges Gebrauch gemacht. Die Namen, die die betreffenden Grössen so erhalten haben, entsprechen denn auch eher den physikalischen Beziehungen, in denen diese zu einander stehen, als der mathematischen Entstehungsweise derselben.

So ist zunächst rein calculatorisch die Existenz eines Vectors $\mathfrak{A}$, der für jeden Punkt des Feldes bestimmte Grösse und Richtung besitzt, constatirt, dann, wiederum nur durch Rechnung, der andere Vector $\mathfrak{B}$ abgeleitet worden. Die Namen ‚locales electrokinetisehes Moment' für den ersten, ‚magnetische Induction' für den zweiten Vector, stehen aber mit den Rechnungen in gar keiner Beziehung.

Magnetisches Potential eines Stromes.

Naturgemäss konnten wir auch bei der Betrachtung unseres Systems als Ganzes ohne Rücksichtnahme auf die Eigenschaften seiner einzelnen Teile weder für $\mathfrak{A}$ noch für $\mathfrak{B}$ explicite durch die Verteilung der Ströme und Magnete des Feldes bestimmte Ausdrücke aufstellen.

Um zu solchen expliciten Ausdrücken zu gelangen, setzen wir zunächst die Existenz permanenter Magnete voraus. Solche Magnete wirken auf einander gemäss dem Principe von der Erhaltung der Energie. Das Gesetz, dem die magnetische Kraftwirkung folgt, lasse ich ganz unbestimmt, nur nehme ich an, dass sie die aus dem Princip der Erhaltung der Energie resultirende Eigenschaft besitzt, dass sie nämlich ein Potential hat.

Wir bedienen uns dann der experimentell eruirten Tatsache, dass Ströme und Magnete sich gegenseitig beeinflussen, und weiter, dass einerseits ein Strom einen Magnet mit ganz derselben mechanischen Kraft angreift, wie ein anderer Magnet, dessen Form, Lage und Stärke sich in jedem Falle angeben lässt, und dass andererseits ein Magnet auf einen Strom mechanisch genau so wirkt wie ein anderer Strom, der wiederum völlig bestimmbar ist. Die quantitative Stärke der Wirkung zwischen Strömen und Magneten geht uns dabei gar nichts an, die Erfahrung, dass eine solche Wirkung vorhanden ist, und dass Ströme und Magnete sich gegenseitig ersetzen können, genügt allein schon für unsere Zwecke.

Aehnelt also, wie die Tatsachen lehren, das Feld, welches ein Strom hervorbringt, in vieler Hinsicht dem, welches ein permanenter Magnet schafft, so fragt es sich noch, ob es diesem auch noch darin gleicht, dass es zu einem Potential in Beziehung steht.

In den Artt. 482 bis 485 habe ich nachgewiesen, dass ein Strom in seiner Umgebung dieselben magnetischen Effecte hervorbringt, wie eine durch ihn begrenzte zu seiner Stärke magnetisirte Schale.

Nun weiss man aber, dass im Falle einer magnetischen Schale in der Tat ein Potential vorhanden ist, dass dieses überall ausserhalb ihrer Substanz einen bestimmten Wert besitzt, sonst auch im Raume stetig verläuft und nur beim Durchgang durch die Schale um einen endlichen in der ganzen Ausdehnung der Schale constanten Wert springt.

Aehnelt also das magnetische Feld eines electrischen Stromes dem einer durch ihn begrenzten magnetischen Schale, so wird es ebenfalls ein Potential besitzen. Allein dieses Potential ist nicht eindeutig bestimmt, sondern es hat in jedem Punkte des Feldes unendlich viele durch eine und dieselbe Differenz getrennte Werte.

Das Potential in einem Punkte des Feldes ist nämlich das Linienintegral der magnetischen Kraft, erstreckt längs einer Curve, die von einem fixen eventuell im Unendlichen liegenden Punkt zu dem betrachteten Punkte hinführt. Das Resultat der Integration ist nun unabhängig von der Gestalt der Integrationscurve, so lange diese nicht durch die vom Strom umfasste Fläche hindurchgeht. Alle Curven, die in einander ohne die Strombahn zu durchschneiden, transformirt werden können, lassen also denselben Wert für das Potential finden. Wenn aber zwei Curven einander nicht äquivalent sind, in einander, ohne die Strombahn zu durchschneiden, nicht übergeführt zu werden vermögen, so führt die Integration längs der einen zu einem andern Resultat als die längs der andern, obgleich beide Curven dieselben Endpunkte besitzen. Da die Theorie nichts über die Curve, längs deren man die magnetische Kraft, um zu dem Potential derselben zu gelangen, zu integriren hat, festsetzt, so wird das magnetische Potential eines Stromes in jedem Punkte des Feldes unendlich viele Werte aufweisen, die sich von einander um eine bestimmte, durch die Stärke des Stromes fixirte Constante, die Potentialperiode, unterscheiden.

Innerhalb der Substanz des Leiters giebt es nichts, was man als magnetisches Potential zu bezeichnen vermöchte.

Stromcomponenten und magnetische Kräfte.

606. Nachdem wir so erfahren haben, dass die magnetische Wirkung eines Stromes ein Potential besitzt, müssen wir diesem Resultat mathematischen Ausdruck verleihen.

Zunächst ist das Linienintegral der magnetischen Kraft des Stromes längs jeder geschlossenen Curve, die die Strombahn nicht einfasst, gleich Null.

Ferner hat dieses Linienintegral, wenn die Strombahn von der geschlossenen Integrationscurve einmal und nur einmal umschlungen wird, einen ganz bestimmten Wert, den man als Maass für die Stärke des betreffenden Stromes verwenden kann. Dieser Wert hängt nicht von der sonstigen Form der betreffenden Curve ab, weil das Linienintegral längs einer geschlossenen Curve, deren beide Aeste von der Strombahn eingefasst werden, gleich Null ist.

In electromagnetischem Maass ist das bezeichnete Linienintegral längs einer geschlossenen Curve, die die von der Strombahn umgrenzte Fläche einmal und nur einmal durchschneidet, numerisch gleich dem Betrag des Products aus 4π in die electromagnetisch gemessene Stärke des Stromes. Es ist positiv, wenn die Integrationscurve die betreffende Fläche in positiver Richtung durchsetzt, negativ wenn das in der entgegengesetzten Richtung geschieht.

Zur weitern Kenntnis dieses Linienintegrals ist die Kenntnis der magnetischen Kraft eines Stromes erforderlich.

Wir haben in den Artt. 398 ff. allgemein die magnetische Kraft auf einen Einheitspol durch die Gleichung

$$\text{D}') \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{B} - 4\pi\mathfrak{J}$$

definirt. Darin bezeichnet $\mathfrak{B}$ die magnetische Induction, $\mathfrak{J}$ die Stärke der eventuellen Magnetisirung an der Stelle, wo der Einheitspol sich aufhält. Sind α, β, γ die Componenten der magnetischen Kraft; a, b, c die der magnetischen Induction; A, B, C die der Magnetisirungsstärke, so hat man expliciter

$$\text{D}) \qquad \begin{aligned} \alpha &= a - 4\pi A, \\ \beta &= b - 4\pi B, \\ \gamma &= c - 4\pi C. \end{aligned}$$

Die Grössen A, B, C können — wie das bei manchen Substanzen der Fall ist, — selbst noch von der magnetischen Kraft abhängen. Ausdrücke für eine solche Abhängigkeit, die zur Entstehung des inducirten Magnetismus Veranlassung geben würde, haben wir in den Artt. 426, 435 kennen gelernt.

607. Das Linienintegral der magnetischen Kraft ist

$$L = \int \left(\alpha \frac{dx}{ds} + \beta \frac{dy}{ds} + \gamma \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Für uns handelt es sich um den Wert dieses Integrals, wenn das magnetische Feld durch einen einen Leiter durchfliessenden Strom producirt ist, und die Curve s die Bahn dieses Stromes einmal und nur einmal umgiebt. Wir nehmen diesen Leiter als körperlich an und verstehen unter Strombahn an einer bestimmten Stelle des Körpers, ein an dieser Stelle in Richtung der dort fliessenden Electricität gelegtes, unendlich dünnes und sehr kleines Parallelepipedon. Wir drehen das Axensystem so, dass die x Axe an der betreffenden Stelle des Körpers parallel der dort liegenden Strombahn verläuft. Als Integrationscurve nehmen wir dann ein die Strombahn umgebendes zur x Axe, also auch zur localen Strombahn senkrecht stehendes Parallelogramm von den Seiten dy und dz, und erhalten, wie man leicht unter Zuhilfenahme des Theorems IV. in Art. 24 findet,

$$L = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) dy\, dz.$$

Dasselbe Linienintegral ist aber auch gleich 4π, multiplicirt mit der Stärke, mit der der Strom da, wo das Parallelogramm gelegen ist, in Richtung der x Axe, also senkrecht zu diesem Parallelogramm fliesst. Bezeichnen wir also mit u, v, w die Componenten seiner auf Flächeneinheit bezogenen Stromstärke nach den drei Coordinatenaxen, so haben wir

$$\text{E)} \qquad \begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\ 4\pi v &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ 4\pi w &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \end{aligned}$$

Gleichungen dieser Form gelten für jede Stelle des electromagnetischen Feldes und sie bestimmen da, wo etwa Ströme fliessen, die Stärken dieser Ströme nach Grösse und Richtung durch die an den betreffenden Stellen wirkenden, von den bezüglichen Strömen hervorgebrachten magnetischen Kräfte.

α, β, γ sollten die magnetischen Kraftcomponenten des durch u, v, w charakterisirten Stromes sein, da aber die magnetische Kraftwirkung electrischer und magnetischer Agentien, da wo diese nicht vorhanden sind, ein Potential besitzt, so können wir allgemein unter α, β, γ die magnetischen Kraftcomponenten des electromagnetischen Feldes verstehen.

In den stromlosen Gebieten des Feldes hat man

$$u = v = w = 0,$$

also

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} = \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} = \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$$

oder

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = - d\Omega,$$

in diesen **stromfreien** Gebieten hat also die magnetische Kraft des Feldes ein Potential.

Differenzirt man die Gleichungen unter E) der Reihe nach nach x, y, z, und addirt die Resultate, so ergiebt eine Addition

$$\text{E}') \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

der Strom, dessen Componenten u, v, w sind, bewegt sich also wie eine incompressible Flüssigkeit, seine Bahn ist hiernach notwendig stets geschlossen.

Doch gilt diese Behauptung nur dann, wenn bei der Berechnung von u, v, w sowohl die Leitung als auch die Variation der electrischen Verschiebung berücksichtigt wird.

Man hat zwar bis jetzt wenig von der directen electromagnetischen Wirkung von Strömen, die in Dielectricis durch Variation der electrischen Verschiebung hervorgebracht werden, beobachten können. Allein neben den vielen Gründen, die ich schon bei andern Gelegenheiten angeführt habe, werden wir auch dadurch, dass die Gesetze des Electromagnetismus sich nur äusserst schwer mit der Existenz **nicht** geschlossener Ströme in Einklang bringen lassen, zur Annahme solcher **geschlossener** vorübergehender Verschiebungsströmungen in Dielectricis gezwungen. Bei der später noch auseinanderzusetzenden electromagnetischen Theorie des Lichtes wird man sehen, von welch hoher theoretischer Bedeutung gerade diese Verschiebungsströmungen sind.

Stromcomponenten und electromotorische Kräfte.

608. Die Beziehungen, die wir bisher abgeleitet haben, betreffen die Grössen, von denen die von **Oerstedt**, **Ampère** und **Faraday** entdeckten Erscheinungen abhängen. Wir haben nun noch eine Anzahl anderer Formeln aufzustellen, die diese Grössen mit den in den ersten Teilen dieses Werkes eingeführten verknüpfen.

Wirkt eine electromotorische Kraft auf eine materielle Substanz, so bringt sie in derselben zwei Effecte zu Stande, die **Faraday** durch die Namen Induction und Conduction von einander unterscheidet. Der erste tritt namentlich bei dielectrischen Medien, der zweite bei Leitern zu Tage.

Verschiebungsstrom. Zur Messung des ersten dieser beiden Effecte habe ich in diesem Werke mich der neuen Vectorgrösse, der *Electrischen Verschiebung* $\mathfrak{D}$, deren Componenten ich mit f, g, h bezeichnete, bedient.

In isotropen Medien geht die electrische Verschiebung in Richtung der sie producirenden electromotorischen Kraft vor sich und ist dieser wenigstens bei relativ schwachen Beträgen proportional. Wir haben dann

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E}; \tag{F'_1}$$

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{1}{4\pi} KP, \\ g &= \frac{1}{4\pi} KQ, \\ h &= \frac{1}{4\pi} KR, \end{aligned}\right\} \tag{F_1}$$

K bezeichnet die specifische inductive Capacität des betreffenden Dielectricums. Ist das Dielectricum nicht mehr isotrop, so kann die Gleichung

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E}$$

immer noch stehen bleiben, nur muss man jetzt unter $K\mathfrak{E}$ eine lineare und Vector-Function des Vectors $\mathfrak{E}$ verstehen, so dass K als Functionszeichen dasteht. Die Componenten der Verschiebung sind lineare, homogene Functionen der Componenten der electromotorischen Kraft

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{1}{4\pi}(K_{xx} P + K_{xy} Q + K_{xz} R), \\ g &= \frac{1}{4\pi}(K_{yx} P + K_{yy} Q + K_{yz} R), \\ h &= \frac{1}{4\pi}(K_{zx} P + K_{zy} Q + K_{zz} R). \end{aligned}\right\} \tag{F}$$

Nach Art. 101f. ist dabei

$$K_{xy} = K_{yx}, \; K_{yz} = K_{zy}, \; K_{zx} = K_{xz}.$$

609. Leitungsstrom. Der zweite Effect der electromotorischen Kraft besteht in der Conduction oder electrischen Leitung. Die Gesetze, nach denen diese Leitung vor sich geht, sind von Ohm entdeckt und im zweiten Teile dieses Werkes behandelt worden.

Bezeichnen p, q, r die Componenten des fortgeleiteten Stromes, $\mathfrak{K}$ die Dichtigkeit desselben, C die Leitungsfähigkeit, so haben wir bei isotropen Medien

$$\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}; \tag{G'}$$

$$\left.\begin{aligned} p &= CP, \\ q &= CQ, \\ r &= CR. \end{aligned}\right\} \tag{G_1}$$

Bei nicht isotropen Medien ist C eine lineare und Vectorfunction der electromotorischen Kraft, jede der Componenten p, q, r tritt als lineare homogene Function der Componenten derselben auf. Daher ist

$$\text{G)} \qquad \begin{aligned} p &= C_{xx} P + C_{xy} Q + C_{xz} R, \\ q &= C_{yx} P + C_{yy} Q + C_{yz} R, \\ r &= C_{zx} P + C_{zy} Q + C_{zz} R. \end{aligned}$$

610. Wahrer Strom. Es gehört zu den Hauptaufgaben dieses Buches nachzuweisen, dass der wirkliche electrische Strom $\mathfrak{C}$, wie er sich in den electromagnetischen Phänomenen manifestirt, nicht das ist, was ich soeben mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet habe, der geleitete Strom, sondern, dass man, um die totale, zu einer bestimmten Zeit an einer bestimmten Stelle, in Bewegung befindliche Electricität zu erhalten, zum Conductionsstrom nach den durch die zeitliche Variation $\dot{\mathfrak{D}}$ der electrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ herrührenden Strom zu addiren hat.

Die Gleichung

$$\text{H}') \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}$$

stellt also den wahren Strom dar. Bezeichnet man die Componenten dieses wahren Stromes mit u, v, w, so hat man hiernach (Art. 328)

$$\text{H)} \qquad \begin{aligned} u &= p + \frac{df}{dt}, \\ v &= q + \frac{dg}{dt}, \\ w &= r + \frac{dh}{dt}. \end{aligned}$$

611. $\mathfrak{K}$ sowohl als $\mathfrak{D}$ hängen in der in den Artt. 608 und 609 angegebenen Weise von der electromotorischen Kraft ab. Hat man es mit isotropen Medien zu tun, so sind die Gleichungen unter F_1) und G_1) in Anwendung zu bringen, und man erhält

$$\text{I}') \qquad \mathfrak{C} = C\mathfrak{E} + \frac{1}{4\pi} K \frac{d\mathfrak{E}}{dt};$$

$$\text{I)} \qquad \begin{aligned} u &= CP + \frac{1}{4\pi} K \frac{dP}{dt}, \\ v &= CQ + \frac{1}{4\pi} K \frac{dQ}{dt}, \\ w &= CR + \frac{1}{4\pi} K \frac{dR}{dt}. \end{aligned}$$

Freie Electricität.

612. Raumdichte. Die Raumdichte der innerhalb des Körpers befindlichen freien Electricität ist

$$\text{J)} \qquad \rho = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}.$$

613. Flächendichte. Die Flächendichte der Electricität an der Grenzfläche zweier Medien entspricht der Gleichung

$$\text{K)} \qquad \sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h';$$

l, m, n sind die Richtungscosinusse der Normale, die von der betreffenden Stelle der Trennungsfläche in das Medium, in dem die electrische Verschiebung die Componenten f, g, h, besitzt, gezogen ist, l', m', n' bedeuten die Richtungscosinusse der in das andere Medium, dem die Verschiebungscomponenten f', g', h' zugehören, von der betreffenden Stelle der Trennungsfläche aus laufenden Normale.

Inducirte Magnetisirung.

614. Ist die Magnetisirung eines Mediums ihrem ganzen Betrage nach durch eine auf dasselbe wirkende magnetische Kraft inducirt, so hat man

$$\text{L')} \qquad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}.$$

Bei isotropen Medien ist μ eine scalare Grösse und bedeutet die magnetische Permeabilität (Art. 428), bei nicht isotropen hat man unter $\mu\mathfrak{H}$ das Zeichen für eine lineare und Vectorfunction von $\mathfrak{H}$ zu verstehen. Sind wie bisher α, β, γ die Componenten der magnetisirenden Kraft $\mathfrak{H}$, so ist

für isotrope Medien

$$\text{L}_1) \qquad \begin{aligned} a &= \mu\alpha, \\ b &= \mu\beta, \\ c &= \mu\gamma; \end{aligned}$$

für nicht isotrope

$$\text{L)} \qquad \begin{aligned} a &= \mu_{xx}\alpha + \mu_{xy}\beta + \mu_{xz}\gamma, \\ b &= \mu_{yx}\alpha + \mu_{yy}\beta + \mu_{yz}\gamma, \\ c &= \mu_{zx}\alpha + \mu_{zy}\beta + \mu_{zz}\gamma. \end{aligned}$$

615. Wir wissen, dass magnetische Kraft und magnetische Induction nur in der Substanz der Magnete selbst verschiedene Begriffe sind, dass sie dagegen ausserhalb dieser in jeder Beziehung völlig zusammenfallen. Haben wir also ein Feld, das lediglich Ströme, keine Magnete, als Agentien enthält, so wird man die beiden Grössen beliebig einander substituiren können.

Nun sollen nach Ampères, in Art. 833 auseinanderzusetzenden Hypothese, Substanzen, von denen wir sagen, sie seien ‚magnetisirt', ihre diesbezüglichen Eigenschaften electrischen, ihre einzelnen Molekel umfliessenden Strömen verdanken.

Hiernach müsste auch bei Magneten der Unterschied zwischen magnetischer Induction und magnetischer Kraft verschwinden. Da das nach unserer Theorie der Magnetisirung nicht der Fall ist, müssen wir annehmen, dass dieselbe nur auf Körper als solche, wenn sie molar auftreten, ihre Anwendung findet.

Gestatteten uns unsere mathematischen Methoden die Vorgänge in den einzelnen Molekeln in Rechnung zu ziehen und zu verfolgen, so würden wir an einem Molekel eines Magnets weiter nichts als einen Strom finden und den Unterschied zwischen magnetischer Kraft und magnetischer Induction daselbst nicht hervorzuheben brauchen.

Doch will ich, um nach Belieben das electrostatische oder electromagnetische Maasssystem anwenden zu können, den Factor μ nicht gleich Eins setzen, sondern auch in den fernern Untersuchungen noch beibehalten.

Electrokinetisches Moment, Vectorpotential.

616. Das sind die Hauptbeziehungen, die zwischen den eingeführten Grössen bestehen. Man könnte sie so combiniren, dass einzelne dieser Grössen eliminirt werden, indessen will ich jetzt nicht ein System geordneter (das heisst notwendiger und hinreichender) mathematischer Formeln aufstellen, sondern vielmehr jeder Beziehung zwischen den für unsern Wissenszweig entscheidenden Grössen, von der wir Kenntnis haben, auch mathematischen Ausdruck verleihen. Die Elimination einer dieser Grössen würde in dieser fundamentalen Betrachtung eher einen Verlust als einen Gewinn bedeuten.

Ein Resultat, das sich durch Combination der unter A) und E) aufgestellten Relationen ableiten lässt und von der höchsten Wichtigkeit ist, muss ich aber doch vorführen.

Nach dem Gleichungssystem A) sind die Componenten der magnetischen Induction

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Nach dem Gleichungssystem E) sind die Stromcomponenten

$$u = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right),$$

$$v = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right),$$

$$w = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right).$$

Ferner haben wir nach unserer in dem Gleichungssystem L_1) ausgedrückten Hypothese

$$a = \mu\alpha,$$
$$b = \mu\beta,$$
$$c = \mu\gamma;$$

also wird

$$4\pi\mu u = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial x}.$$

Setzt man aber

1) $$J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}$$

und macht man von der Operationsbezeichnung

$$\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

Gebrauch, so erhält man

$$4\pi\mu u = \frac{\partial J}{\partial x} + \nabla^2 F,$$

E_1) $$4\pi\mu v = \frac{\partial J}{\partial y} + \nabla^2 G,$$

$$4\pi\mu w = \frac{\partial J}{\partial z} + \nabla^2 H.$$

Diese Gleichungen geben einerseits neue Ausdrücke für die Stromcomponenten, sie lassen sich aber auch andererseits als Definitionsgleichungen für F, G, H betrachten, und wenn man

$$F' = \mu \iiint \frac{u}{r}\, dx\,dy\,dz,$$

2) $$G' = \mu \iiint \frac{v}{r}\, dx\,dy\,dz,$$

$$H' = \mu \iiint \frac{w}{r}\, dx\,dy\,dz;$$

3) $$\chi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{J}{r}\, dx\,dy\,dz$$

setzt, unter r den Abstand irgend eines Raumpunktes (ξ, η, ζ) von dem Raumelement $dx\,dy\,dz$ versteht und die Integrationen über den ganzen Raum erstreckt, erhält man nach der Potentialtheorie

$$\text{M)}\qquad F = F' - \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad G = G' - \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad H = H' - \frac{\partial \chi}{\partial z}.$$

Die Gleichungen geben noch nicht die expliciten Werte für F, G, H, weil J, also auch χ seiner Definition zufolge von ihnen abhängt. Auf diese expliciten Werte kommt es aber auch gar nicht an, denn aus dem Gleichungssystem A) verschwindet das χ völlig. Die Grösse χ hat für keine physikalische Untersuchung Bedeutung, lassen wir sie ganz fort, so verschwindet auch J, und wir bekommen aus dem Gleichungssystem M) die Componenten für das electrokinetische Moment $\mathfrak{A}$.

617. Die Definition des *Localen electrokinetischen Moments*, welches ein Strom an einer bestimmten Stelle (ξ, η, ζ) seines Feldes hervorbringt, lässt sich hiernach so fassen, dass dasselbe das Vector-Potential des bezüglichen electrischen Stromes an dieser Stelle ist, und dass es zu dem Strome in derselben Beziehung steht, wie das Scalar-Potential zur Materie, dessen Potential es ist.

Die zu seiner Eruirung auszuführende Integration lässt sich in die folgende Operation auflösen. Man zieht von dem fixen Punkt (ξ, η, ζ) Vectoren, die der Grösse und Richtung nach die gegebenen Elemente $dx\,dy\,dz$ jenes Stromes, jedes dividirt durch seinen Abstand r von dem Punkte (ξ, η, ζ), darstellen. Die Resultante all dieser Vectoren ist wiederum ein Vector und repräsentirt das gesuchte Vector-Potential.

Wenn die Verteilung der Ströme fest vorgeschrieben ist, so verläuft das Vector-Potential eines jeden dieser Ströme stetig, es ist auch überall endlich, genügt den Gleichungen

$$M_1'')\qquad \nabla^2 \mathfrak{A} = 4\pi \mathfrak{C}, \quad S.\nabla \mathfrak{A} = 0$$

und verschwindet in der Unendlichkeit. Der explicite Ausdruck lautet

$$M_1')\qquad \mathfrak{A} = \mu \iiint \frac{\mathfrak{C}}{r}\, dx\,dy\,dz.$$

Seine Componenten F, G, H befriedigen, soweit sie zur Berechnung der Componenten der magnetischen Induction in Betracht kommen, die Gleichungen

$$M_2')\qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

M_2'') $$\nabla^2 F = 4\pi\mu u,\ \nabla^2 G = 4\pi\mu v,\ \nabla^2 H = 4\pi\mu w$$

und haben die Werte

M_1) $$F = \mu\iiint \frac{u}{r}\, dx\, dy\, dz,\qquad G = \mu\iiint \frac{v}{r}\, dx\, dy\, dz,\qquad H = \mu\iiint \frac{w}{r}\, dx\, dy\, dz.$$

Darstellung der electromagnetischen Gleichungen nach der Quaternionentheorie.

Bezeichnungen.

618. Ich habe zwar in diesem Werke nirgends vom Leser eine eingehende Kenntnis des Quaternionencalculs verlangt, indessen bin ich doch oft der Bezeichnungsweise dieses Calculs gefolgt und da, wo ich sie brauchte, mit den Begriffen des Scalars und Vectors frei umgegangen. Ich werde jetzt die Resultate aller vorangehenden Untersuchungen, ohne mehr vorauszusetzen, als ich es bisher getan habe, in Quaternionenausdrücken reproduciren.

Da die von Hamilton selbst beliebten Symbole für Vectoren für unsern Bedarf nicht ausreichen, habe ich schon früher und werde ich auch weiter Vectoren stets (mit Ausnahme des Radiusvectors, also des eigentlichen Vectors) durch deutsche Buchstaben bezeichnen, und zwar soll das deutsche grosse Alphabet ausschliesslich zur Symbolisirung Hamiltonscher Vectoren, das heisst von Grössen, die sowohl Quantität als Richtung haben, benutzt werden. Für die Componenten eines Vectors reservire ich die griechischen oder lateinischen Lettern.

	Symbol des Vectors.	Symbole seiner Componenten.
Der Radiusvector eines Punktes	ρ	$x\ y\ z$
Das electrokinetische Moment in einem Punkte .	$\mathfrak{A}$	$F\ G\ H$
Die magnetische Induction	$\mathfrak{B}$	$a\ b\ c$
Die Dichte der gesammten electrischen Strömung	$\mathfrak{C}$	$u\ v\ w$
Die electrische Verschiebung	$\mathfrak{D}$	$f\ g\ h$
Die electromotorische Kraft	$\mathfrak{E}$	$P\ Q\ R$
Die mechanische Kraft	$\mathfrak{F}$	$X\ Y\ Z$
Die Geschwindigkeit eines Punktes	$\mathfrak{G}$, $\dot\rho$	$\dot x\ \dot y\ \dot z$
Die magnetische Kraft	$\mathfrak{H}$	$\alpha\ \beta\ \gamma$
Die Stärke der Magnetisirung	$\mathfrak{J}$	$A\ B\ C$
Die Stromdichte des Leitungsstroms	$\mathfrak{K}$	$p\ q\ r$

Ausser diesen Vectoren haben wir noch eine Anzahl von Functionsbezeichnungen eingeführt:

Das electrische Potential . . . . Ψ
Das magnetische Potential (wenn es existirt) . Ω
Die electrische Dichte . . . . e
Die Dichte der magnetischen ‚Materie' . . . m

Ferner sind noch Grössen vertreten, die locale physikalische Eigenschaften der Medien fixiren:

Die Leitungsfähigkeit für electrische Ströme . C
Die dielectrische inductive Capacität . . . . K
Die magnetische inductive Capacität . . . . μ

Bei isotropen Medien sind die letztgenannten Grössen mehr scalare Functionen von ρ, im allgemeinen bedeuten sie aber, dass an den Grössen, mit denen sie multiplicirt erscheinen, lineare und Vectoroperationen vorgenommen werden sollen.

Endlich erwähne ich noch den Operator (Art. 25)

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

und bemerke, dass ein vorgesetztes V bedeutet, dass von einer Operation der Vectorteil, ein vorgesetztes S, dass von derselben der scalare Teil genommen werden soll.

Formeln.

619. Die erste Gleichung des Systems A) lautet

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$

also sind die Gleichungen der **magnetischen Induction**

A) $$\mathfrak{B} = V.\nabla\mathfrak{A}.$$

Den Hinweis durch das vorgesetzte V, dass von $\nabla\mathfrak{A}$ der Vectorteil genommen werden soll, hätten wir uns hier sparen können, weil $S.\nabla\mathfrak{A} = 0$ sein sollte, $\nabla\mathfrak{A}$ also an sich schon ein reiner Vector ist.

Die erste Gleichung des Systems B) war

$$P = c\dot{y} - b\dot{z} - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Daraus folgt für die **electromotorische Kraft**

B) $$\mathfrak{E} = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi.$$

Die erste Componente der mechanischen Kraft, die einen Punkt eines Feldes, in welchem allgemein Ströme, electrisirte Körper und Magnete vorhanden sind, angreift, ist

$$X = cv - bw - e\frac{\partial \Psi}{\partial x} - m\frac{\partial \Omega}{\partial x}.$$

Daraus folgt für die **mechanische Kraftwirkung eines electromagnetischen Feldes**

C) $$\mathfrak{F} = V.\mathfrak{C}\mathfrak{B} - e\nabla\Psi - m\nabla\Omega.$$

Aus dem System D) ist die erste Gleichung

$$a = \alpha + 4\pi A.$$

Die **Magnetisirung** ist also bestimmt durch

D) $$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}.$$

Aus dem System E) ist die erste Gleichung

$$4\pi u = \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z},$$

also sind die Gleichungen der **ganzen electrischen Strömung** (Leitung + Aenderung der Verschiebung)

E) $$4\pi\mathfrak{C} = V.\nabla\mathfrak{H}.$$

Die **electrische Verschiebung** ist

F) $$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K\mathfrak{E}.$$

Ferner folgt aus dem Ohmschen Gesetz für den **Leitungsstrom**

G) $$\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}.$$

Aus den beiden letzten Formeln folgt noch für die **ganze electrische Strömung**

H) $$\mathfrak{C} = \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{K}.$$

Die **electrische Raumdichte** ist

J) $$e = S.\nabla\mathfrak{D}.$$

Die **magnetische Raumdichte** folgt der Beziehung

K) $$m = S.\nabla\mathfrak{J}.$$

Die **Magnetisirung** durch magnetische Induction bestimmt sich aus

L) $$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}.$$

Das **locale electrokinetische Moment** einer electrischen Strömung genügt den Beziehungen

M) $$\nabla^2\mathfrak{A} = 4\pi\mathfrak{C}, \quad S.\nabla\mathfrak{A} = 0.$$

Endlich ist die **magnetische Kraft**, wenn sie ihre Entstehung einem Potential verdankt,

N) $$\mathfrak{H} = -\nabla\Omega.$$

Cap. X.

Electrische Einheiten und ihre Dimensionen.

Einheitssysteme.

620. Jede electro-magnetische Grösse kann mit Bezug auf die drei fundamentalen Einheiten der Länge, Zeit und Masse definirt werden. Es ist dabei nicht nötig, dass man jede dieser Grössen für sich hinsichtlich ihres Zusammenhanges mit den drei genannten fundamentalen Einheiten untersucht; es genügt schon, in Folge der vielfachen noch anzuführenden Relationen, in denen die electromagnetischen Grössen zu einander stehen, wenn eine derselben, etwa die Electricitätsmenge oder die Magnetismusmenge, definirt wird.

Indem man die Electricitätseinheit, bezüglich die Magnetismuseinheit als vierte fundamentale Einheit einführt, erhält man das *Electrische* bezüglich das *Magnetische* Einheitssystem.

Geht man dann von der in Art. 65 gegebenen Definition der Einheit, durch welche Electricitätsmengen electrostatisch gemessen werden, aus, so gelangt man zu dem sogenannten *Electrostatischen Einheitssystem.* Benutzt man dagegen die in Art. 374 aufgestellte Definition eines magnetischen Einheitspols, so erhält man für dieselben Grössen ein anderes mit dem vorhergehenden nicht zusammenzuhaltendes System von Einheiten, das *Electromagnetische Einheitssystem.**)

Zusammenstellung der zu definirenden Grössen.

621. Ich werde zunächst alle Grössen, auf die sich unsere Messungen beziehen, aufführen. Die Zusammenstellung ist so angeordnet, dass die Grössen paarweise auftreten. In den drei ersten Paaren ist das Product der betreffenden beiden Grössen eine Energie oder Arbeit, in den drei letzten bildet es eine auf Volumeinheit bezogene Energiemenge.

---

*) Hinsichtlich der Controverse, die sich neuerdings zwischen Helmholtz und Clausius über einzelne Punkte der im Folgenden von Maxwell niedergelegten Untersuchungen erhoben hat, verweise ich auf die diesbezüglichen in *Wiedemanns Annalen* Bd. XVI., XVII. erschienenen Abhandlungen. Bei den Abänderungen, die infolge derselben sich als notwendig herausgestellt haben, bin ich Helmholtz' gefolgt. Anm. des Uebers.

		Symbol.
	Electrostatisches Paar.	
1.	Electricitätsmenge	e
2.	Linienintegral der electromotorischen Kraft, oder electrostatische Potentialfunction	E
	Magnetisches Paar.	
3.	Freie Magnetismusmenge oder Stärke eines Pols	m
4.	Magnetische Potentialfunction	Ω
	Electrokinetisches Paar.	
5.	Electrokinetisches Moment*) eines Stromkreises	p
6.	Stromstärke	C
	Electrostatisches Paar.	
7.	Electrische Verschiebung**) (gemessen durch die electrische Flächendichte auf der Oberfläche des Dielectricums) . .	$\mathfrak{D}$
8.	Electromotorische Kraft in einem Punkte (wirkend auf die Einheit von e)	$\mathfrak{E}$
	Magnetisches Paar.	
9.	Magnetische Induction (entspricht der electrischen Verschiebung)	$\mathfrak{B}$
10.	Magnetische Kraft	$\mathfrak{H}$
	Electrokinetisches Paar.	
11.	Stromstärke in einem Punkte (Dichte der gesammten Strömung)	$\mathfrak{C}$
12.	Vector-Potential***) electrischer Ströme	$\mathfrak{A}$

Relationen.

622. Zwischen den genannten zwölf Grössen bestehen eine Anzahl von Beziehungen, die angeführt werden müssen.

Ich habe schon bemerkt, dass in jedem der drei ersten Paare das Product der beiden Grössen eine Energie bedeutet, dass in jedem der drei letzten Paare das Product der beiden Grössen eine Energie bezogen auf Volumeinheit angiebt. Da nun die Energie die Dimensionen $[L^2MT^{-2}]$ und die Energie bezogen auf Volumeinheit die Dimensionen $[L^{-1}MT^{-2}]$ besitzt, so hat man zunächst

1—3) $$[eE] = [m\Omega] = [pC] = [L^2MT^{-2}],$$

4—6) $$[\mathfrak{D}\mathfrak{E}] = [\mathfrak{B}\mathfrak{H}] = [\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = [L^{-1}MT^{-2}].$$

*) Neumann's electrodynamisches Potential anderer Ströme, bezogen auf einen ganzen von einem Einheitsstrom durchzogenen Stromkreis.

**) Nach Helmholtz dielectrische Polarisation.

***) Das unter *) bezeichnete Neumann'sche Potential bezogen auf ein Stromelement.

Ferner sind

e, p, $\mathfrak{A}$ die Zeitintegrale der bezüglichen Grössen C, E, $\mathfrak{E}$,
E, Ω, p die Linienintegrale der bezüglichen Grössen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$,
e, C, m die Flächenintegrale der bezüglichen Grössen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$.

Wir haben daher noch neun andere Beziehungen

$$7-9)\qquad \left[\frac{e}{C}\right]=\left[\frac{p}{E}\right]=\left[\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\right]=[T],$$

$$10-12)\qquad \left[\frac{E}{\mathfrak{E}}\right]=\left[\frac{\Omega}{\mathfrak{H}}\right]=\left[\frac{p}{\mathfrak{A}}\right]=[L],$$

$$13-15)\qquad \left[\frac{e}{\mathfrak{D}}\right]=\left[\frac{C}{\mathfrak{C}}\right]=\left[\frac{m}{\mathfrak{B}}\right]=[L^2].$$

Keine dieser Formeln spricht eine Beziehung zwischen den electrischen und magnetischen Grössen aus, wenigstens dann nicht, wenn $\mathfrak{A}$, wie es hier geschehen, als Vector-Potential von Strömen definirt wird. Beachtet man aber, dass nach unserer Theorie der electromagnetischen Wirkungen $\mathfrak{A}$ auch als Vector-Potential von Magneten angesehen werden kann, so hat man noch, weil die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ aus dem magnetischen Vector-Potential genau so wie die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ aus dem magnetischen Potential gewonnen wird,

$$16)\qquad \left[\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\right]=[L].$$

Diese*) Gleichung verbindet aber in der Tat die electrischen mit den magnetischen Grössen, weil $\mathfrak{A}$ auch als electrodynamisches Vector-Potential angesehen werden kann.

Eine andere verbindende Gleichung bekommen wir durch den Satz, dass ein Strom in seinen magnetischen Wirkungen durch eine magnetische Schale ersetzt werden kann. In der Tat ist nach Art. 485

$$17)\qquad [\Omega]=[C].$$

Das sind 17 Gleichungen zwischen 12 Grössen; unabhängig von einander sind aber nur 11 Gleichungen; denn erstens fallen die Gleichungen 7) und 8) wegen der Gleichungen 1) und 3) und die 10) und 12) wegen der 8) und 9) zusammen; ferner folgen die drei Gleichungen 13) bis 15) aus den 1) bis 6) und 10) bis 12), endlich resultirt 16) aus 2), 3), 12), 15) und 17).

Electrisches und Magnetisches Einheitssystem.

623. Hätte man noch eine Gleichung, so liessen sich aus denselben die Dimensionen aller 12 Grössen eruiren. Da das zunächst nicht der Fall ist, wird man eine dieser Grössen als gegeben zu betrachten haben

*) Auf die Existenz derselben hat der englische Herausgeber, Herr Niven, aufmerksam gemacht.

und alle andern durch sie und die drei fundamentalen Einheiten ausdrücken. Ich nehme erst $[e]$ und dann $[m]$ als vierte fundamentale Einheit an und erhalte die beiden Systeme von Dimensionsgleichungen:

		Electrisches System.	Magnetisches System.
1)	$[e]$	$= [e]$	$= \left[\frac{L^2M}{mT}\right]$.
2)	$[E]$	$= \left[\frac{L^2M}{eT^2}\right]$	$= \left[\frac{m}{T}\right]$.
3)	$[m]$	$= \left[\frac{L^2M}{eT}\right]$	$= [m]$.
4)	$[\Omega]$	$= \left[\frac{e}{T}\right]$	$= \left[\frac{L^2M}{mT^2}\right]$.
5)	$[p]$	$= \left[\frac{L^2M}{eT}\right]$	$= [m]$.
6)	$[C]$	$= \left[\frac{e}{T}\right]$	$= \left[\frac{L^2M}{mT^2}\right]$.
7)	$[\mathfrak{D}]$	$= \left[\frac{e}{L^2}\right]$	$= \left[\frac{M}{mT}\right]$.
8)	$[\mathfrak{E}]$	$= \left[\frac{LM}{eT^2}\right]$	$= \left[\frac{m}{LT}\right]$.
9)	$[\mathfrak{B}]$	$= \left[\frac{M}{eT}\right]$	$= \left[\frac{m}{L^2}\right]$.
10)	$[\mathfrak{H}]$	$= \left[\frac{e}{LT}\right]$	$= \left[\frac{LM}{mT^2}\right]$.
11)	$[\mathfrak{C}]$	$= \left[\frac{e}{L^2T}\right]$	$= \left[\frac{M}{mT^2}\right]$.
12)	$[\mathfrak{A}]$	$= \left[\frac{LM}{eT}\right]$	$= \left[\frac{m}{L}\right]$.

624. Arrangirt man die zehn ersten Grössen in zwei Reihen nach dem folgenden Schema

e, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, C und Ω	E, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, p und m
(m und p), $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$, E	(C und Ω), $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, e,

so werden die in der obern Reihe befindlichen Grössen aus e durch dieselben Operationen abgeleitet, wie die darunter stehenden bezüglichen aus m. Ferner bemerkt man, dass die zehn Grössen in der obern Reihe genau umgekehrt wie in der untern angeordnet sind. Endlich haben in der obern Reihe die fünf ersten Grössen das e im Zähler, bezüglich das m im Nenner, die fünf letzten das e im Nenner, bezüglich das m im Zähler; in der untern Reihe sind die Verhältnisse umgekehrt, die fünf ersten haben das e im Nenner, bezüglich das m im Zähler, die fünf letzten das e im Zähler, bezüglich das m im Nenner.

Alle zwölf oben gegebenen Bestimmungen sind richtig für jedes beliebige System von Einheiten, welches wir wählen mögen.*)

Electrostatisches und Electromagnetisches Einheitssystem.

625. Von den genannten Systemen gelangen wir zum electrostatischen bezüglich electromagnetischen Einheitssystem, wenn wir für die Electricitätsmenge, bezüglich die Magnetismusmenge, die geeigneten Definitionen durch die fundamentalen Einheiten der Länge, der Zeit und der Masse aufstellen.

Die electrostatische Einheit der Electricität folgt aus dem Coulombschen Gesetz

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{L^2},$$

nach welchem eine in einem Punkt concentrirte Electricitätsmenge e auf einen von ihr um L abstehenden Punkt eine Kraft von der Grösse e/L^2 ausübt.

Hiernach ergiebt die Gleichung 8)

$$\left[\frac{LM}{eT^2}\right] = \left[\frac{e}{L^2}\right],$$

also

$$[e] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}],$$

zugleich ist nach Gleichung 1) in diesem Einheitssystem die Magnetismuseinheit

$$[m] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}].$$

Ganz entsprechend wird das electromagnetische Einheitssystem abzuleiten sein. Nach Art. 374 ist

$$\mathfrak{H} = \frac{m}{L^2},$$

also nach Gleichung 10) und 1)

$$\left[\frac{LM}{mT^2}\right] = \left[\frac{m}{L^2}\right], \left[\frac{e}{LT}\right] = \left[\frac{M}{eT}\right],$$

woraus

$$[m] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}],$$

$$[e] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$$

folgt.

626. Ich stelle jetzt die Dimensionen der zwölf fundamentalen Grössen im electrostatischen wie im electromagnetischen Einheitssystem zusammen.

---

*) Zu dieser Behauptung macht Helmholtz die Bemerkung (*Wiedemanns Ann.* 17, p. 52), dass sie auf electromagnetische Systeme, und zwar auf solche, welche aus der von Maxwell definirten Bedeutung des electromagnetischen Grundgesetzes hergeleitet sind, zu beschränken ist. Anm. des Uebers.

Dimensionen der fundamentalen Grössen.

Grössen.	Symbole.	Dimensionen. Electrostatisches System.	Electromagnetisches System.
Electricitätsmenge	e	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$
Linienintegral der electromotorischen Kraft, electrostatisches Potential .	E	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$
Magnetismusmenge	m	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Electrokinetisches Moment eines Stromes	p		
Stromstärke	C	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Magnetisches Potential	Ω		
Electrische Verschiebung	$\mathfrak{D}$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$
Flächendichte	σ		
Locale electromotorische Kraft . . .	$\mathfrak{E}$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$
Magnetische Induction, Magnetisirungsstärke	$\mathfrak{B}$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Magnetische Kraft	$\mathfrak{H}$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Locale Strömungsstärke (Stromdichte)	$\mathfrak{C}$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$
Vector-Potential	$\mathfrak{A}$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$

627. Dazu kommen noch die

Dimensionen abgeleiteter Grössen.

Grössen.	Symbole.	Electrostatisches System.	Electromagnetisches System.
Electrostatische Capacität $= \frac{e}{E}$ . .	q	$[L]$	$[T^2 L^{-1}]$
Electromagnetische Capacität oder Coefficient der Selbstinduction eines Stromkreises $= \frac{p}{C}$	L	$[T^2 L^{-1}]$	$[L]$
Specifische dielectrische inductive Capacität $= \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}}$	K	[Zahl]	$[T^2 L^{-2}]$
Magnetische inductive Capacität $= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$	μ	$[T^2 L^{-2}]$	[Zahl]
Widerstand $= \frac{E}{C}$	R	$[T L^{-1}]$	$[L T^{-1}]$
Specifischer Widerstand $= \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{C}}$ . . .	r	$[T]$	$[L^2 T^{-1}]$

Anzahl der electrostatischen Einheiten in einer electromagnetischen Einheit.

628. Wählt man für die drei fundamentalen Einheiten der Länge, Zeit und Masse dieselben Beträge für beide Systeme, so ist die Anzahl electrostatischer Electricitätseinheiten, die in einer electromagnetischen Electricitätseinheit enthalten sind, numerisch gleich einer gewissen Geschwindigkeit v, dessen absoluter Wert nicht von den adoptirten Beträgen der drei fundamentalen Einheiten abhängt. Diese Geschwindigkeit spielt, wie wir sehen werden, nicht blos hier, sondern auch in andern Capiteln der Physik eine hochbedeutende Rolle. Ich bezeichne sie durch v.

Es enthalten in einer electromagnetischen Einheit

$e, C, \mathfrak{Q}, \mathfrak{D}, \mathfrak{H}, \mathfrak{C}$	v electrostatische	Einheiten	
$m, p, E, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}, \mathfrak{A}$	$^1/v$	„	„
$q, K, 1/R$	v^2	„	„
L, μ, R	$^1/v^2$	„	„

Im electrostatischen System nimmt man die specifische dielectrische inductive Capacität der Luft der Einheit gleich, electromagnetisch gemessen ist sie dann gleich $^1/v^2$.

Aehnlich setzt man im electromagnetischen System die specifische magnetische inductive Capacität der Luft der Einheit gleich, electrostatisch gemessen ist diese Grösse also gleich $^1/v^2$.

Die Methoden, die zur Bestimmung der Zahl v führen, sollen in den Artt. 768—780 auseinandergesetzt werden.

Praktisches System electrischer Einheiten.

629. Von den beiden behandelten Einheitssystemen findet in der Praxis das electromagnetische weit mehr Anwendung, als das electrostatische. Wollte man aber bei diesbezüglichen Messungen für die drei Grundeinheiten der Länge, Zeit und Masse die gebräuchlichen Maasse Meter oder Centimeter. Gramm, Secunde einführen, so würden einerseits die Einheiten für Widerstand und electromotorische Kraft äusserst klein, und andererseits die für Electricitätsmengen und Capacität äusserst gross ausfallen. Bei Messungen, die die genannten Grössen betreffen, würde man in jedem in der Praxis vorkommenden Falle enorm viel Ziffern zu schreiben haben.

Aus diesem Grunde haben die praktischen Electriker aus dem electromagnetischen System sich ein System von Einheiten deducirt, in dem die Längeneinheit sehr gross, die Zeiteinheit wie gewöhnlich einer Secunde gleich, die Masseneinheit aber sehr klein gewählt wurde.

Als L ä n g e n e i n h e i t ist hiernach die Länge von zehn Millionen Meter, die etwa der Bogenlänge eines Erdquadranten gleich kommt, angenommen worden.

Als Zeiteinheit dient, wie immer, die Secunde.

Als Masseneinheit hat man den hundertmillionten Teil eines Milligramms oder 10^{-11} g benutzt.

Die unter Zugrundelegung dieser concreten Einheiten deducirten electrischen Einheiten hat man dann mit den Namen berühmter Entdecker auf dem Gebiete der Electricität belegt. So heisst die Widerstandseinheit ein *Ohm*, sie repräsentirt im electromagnetischen Maasssystem die Geschwindigkeit von 10,000,000 m in der Secunde. Ich habe schon in Art. 340 erwähnt, dass die British Association ihren Betrag repräsentirende Widerstandsrollen ausgegeben hat.

Die praktische Einheit für electromotorische Kraft heisst ein *Volt*, sie ist sehr (auf 5 bis 10%) nahe der Kraft eines Daniellschen Elements gleich. Eine von Latimer Clark erfundene, sehr constante Zelle hat fast genau die Stärke von 1.457 Volts.

Die praktische Einheit der Capacität wird *Farad* genannt. Die Electricitätsmenge, mit der ein Volt einen Condensator von der Capacität ein Farad ladet, ist gleich der Electricitätsmenge, die gegen den Widerstand ein Ohm von der electromotorischen Kraft ein Volt in einer Secunde in Bewegung gesetzt wird.

Hat man sehr grosse Quantitäten zu registriren, so setzt man den bezüglichen Namen noch ein *Mega* vor und stellt sich darunter die betreffende Einheit multiplicirt mit einer Million vor. Entsprechend setzt man den Namen ein *Micro* vor und versteht darunter die betreffende Einheit dividirt durch eine Million, falls man es mit kleinen Quantitäten zu tun hat.

Für die Praxis sind solche Namen weit bequemer, als die stete Wiederholung ‚electromagnetisches System‘ und stete Hinzufügung der für Länge, Zeit und Masse adoptirten Maasseinheiten.

Die nachfolgende Tabelle giebt die Werte der praktischen Einheiten, wie sie von verschiedenen Forschern zu verschiedenen Zeiten aufgestellt worden sind.

Fundamental-Einheiten.	Praktisches System.	B. A. Report. 1863.	W. Thomson.	W. Weber.
Länge, Zeit, Masse.	Erdquadrant, Secunde, 10^{-11} Gramm.	Meter, Secunde, Gramm.	Centimeter, Secunde, Gramm.	Millimeter, Secunde, Gramm.
Widerstand	Ohm	10^7	10^9	10^{10}
Electromotorische Kraft	Volt	10^5	10^8	10^{11}
Capacität	Farad	10^{-7}	10^{-9}	10^{-10}
Electricitätsmenge	(ein Farad geladen zu einem Volt)	10^{-2}	10^{-1}	10

Zusatz. Seitdem Maxwell das geschrieben, hat man bekanntlich auf internationalem Wege die Frage wegen der electrischen Einheiten zu regeln gesucht. Wenngleich nun die Beschlüsse des zu diesem Behufe in Paris versammelt gewesenen internationalen Congresses bisher noch zu keinen praktischen Resultaten geführt haben, so glaube ich doch, weil sie wahrscheinlich schliesslich massgebend sein werden, ihre Mitteilung dem Leser nicht vorenthalten zu dürfen.

Die bezüglichen Einheiten für Länge, Masse und Zeit sind

ein Centimeter,
ein Gramm,
eine Secunde.

Das System dieser Einheiten bildet das (*C.-G.-S.*) System.

Das praktische Maasssystem für die electrischen (und magnetischen) Grössen ist das electromagnetische.

Die praktische Einheit des electrischen Widerstandes ist ein *Ohm*, sie ist 10^9 mal so gross wie die absolute electromagnetisch gemessene Widerstandseinheit.

Die praktische Einheit der electromotorischen Kraft ist ein *Volt*, sie ist 10^8 mal so gross wie die absolute electromagnetisch gemessene Einheit der electromotorischen Kraft.

Die praktische Einheit der Stromstärke ist ein *Ampère*, sie wird in einem Leiter vom Widerstande ein Ohm durch die electromotorische Kraft ein Volt hervorgebracht.

Die praktische Einheit der Electricitätsmenge ist ein *Coulomb*, sie wird in einem Leiter vom Widerstande ein Ohm durch die electromotorische Kraft ein Volt in einer Secunde fortbewegt.

Die praktische Einheit der Capacität ist ein *Farad*, sie gehört einem Condensator, der von der electromotorischen Kraft ein Volt mit der Electricitätsmenge ein Coulomb geladen ist.

Clausius*) hat noch vorgeschlagen, die Einheit des Magnetismus mit dem Namen Webers zu belegen.

Die praktische Magnetismuseinheit ist demnach ein *Weber*, sie ist 10^8 mal so gross wie die absolute electromagnetisch gemessene Magnetismuseinheit.

Nach diesen Definitionen hat man die folgende Zusammenstellung:

$$\begin{aligned}
\text{Weber} &= g^{\frac{1}{2}} . cm^{\frac{3}{2}} . s^{-1} . 10^{8} \\
\text{Coulomb} &= g^{\frac{1}{2}} . cm^{\frac{1}{2}} \quad . 10^{-1} \\
\text{Ampère} &= g^{\frac{1}{2}} . cm^{\frac{1}{2}} . s^{-1} . 10^{-1} \\
\text{Volt} &= g^{\frac{1}{2}} . cm^{\frac{3}{2}} . s^{-2} . 10^{8} \\
\text{Ohm} &= cm . s^{-1} . 10^{9} \\
\text{Farad} &= cm^{-1} . s^{2} . 10^{-9}
\end{aligned}$$

W.

*) *Wiedemanns Annalen* Bd. 16, p. 546.

Cap. XI.

Energie und Zwang in einem electromagnetischen Felde.

---

630. Ich nehme an, dass in unserem electromagnetischen Felde allgemein electrisirte Körper, Magnete und electrische Ströme vorhanden sind. Die Energie des Feldes setzt sich dann aus drei Teilen zusammen, aus der electrostatischen Energie der electrisirten Körper, der magnetischen Energie der Magnete und der electrokinetischen Energie der Ströme.*)

Energie.

Electrostatische Energie.

Die potentielle Energie electrisirter Körper habe ich schon im ersten Teile dieses Werkes Cap. III. weitläufig behandelt. Dort (Art. 85) ergab sich für dieselbe der Ausdruck

$$W = \frac{1}{2}\Sigma(e\Psi). \tag{1a}$$

e bezeichnet die Electricitätsmenge, die sich an der Stelle des Feldes befindet, wo das electrische Potential Ψ den Wert Ψ besitzt; die Summation ist über alle electrisirten Teile des Feldes zu erstrecken.

Einen anderen Ausdruck gewinnt man durch Einführung der electrischen Verschiebungscomponenten. Die Electricitätsmenge e, die ein Raumelement, in dem die electrischen Verschiebungscomponenten die Beträge f, g, h besitzen, und diejenige σ, die ein Flächenelement dS, dessen Normale die Richtungscosinusse l, m, n hat, beherbergt, ist nämlich [Art. 612, 613, J), K)]

$$e = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\,,$$

$$\sigma = (lf + mg + nh)\, dS,$$

---

*) Siehe auch: Helmholtz, *Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielectrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte.* Gesammelte Abhandlungen p. 798 ff., oder *Wiedemanns Annalen* XIII. p. 385 ff.

also wird

$$1b)\quad W=\frac{1}{2}\iiint\Psi\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz+\frac{1}{2}\iint\Psi\,(lf+mg+nh)\,dS.$$

Die dreifache Integration erstreckt sich über den ganzen unendlichen Raum, die zweifache über alle electrisirten Flächen.

631. Verfährt man mit dem dreifachen Integral genau so wie in Art. 101 d, so findet man den dritten Ausdruck

$$1c)\qquad W=-\frac{1}{2}\iiint\left(f\frac{\partial\Psi}{\partial x}+g\frac{\partial\Psi}{\partial y}+h\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Ich bezeichne mit P, Q, R die Componenten der an der Stelle x, y, z wirkenden electromotorischen Kraft, setze also

$$P=-\frac{\partial\Psi}{\partial x},\quad Q=-\frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad R=-\frac{\partial\Psi}{\partial z},$$

und erhalte den vierten Ausdruck

$$1d)\qquad W=\frac{1}{2}\iiint(fP+gQ+hR)\,dx\,dy\,dz.$$

W verschwindet einerseits überall, wo die Verschiebungscomponenten f, g, h verschwinden, und andererseits auch überall, wo die Kraftcomponenten P, Q, R sich auf Null reduciren. Daher darf man bei der Berechnung der electrostatischen Energie die Integrationen entweder über alle Teile des Feldes, wo sich Electricität findet, oder über alle Teile, wo electrische Kraft sich manifestirt, erstrecken.

Die in einer Raumeinheit enthaltene Energie ist gleich dem halben Product aus der daselbst wirkenden electromotorischen Kraft in die daselbst stattfindende electrische Verschiebung multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den die Richtungen der genannten Vectoren mit einander einschliessen (der bei isotropen Medien gleich Null ist).

In der Ausdrucksweise der Quaternionen haben wir

$$1')\qquad W'=-\frac{1}{2}S.\mathfrak{E}\mathfrak{D}.$$

Magnetische Energie.

632. Da nach Artt. 385, 386 das Potential eines Magnets wie das eines electrisirten Körpers, der eine gewisse Raumverteilung und eine Flächenverteilung von Electricität besitzt, behandelt werden darf, so wird man bei der Ableitung der magnetischen Energie genau dieselbe Methode wie bei der der electrostatischen befolgen, man wird auch zu ganz ent-

sprechenden Resultaten gelangen müssen und erhält für diese magnetische Energie

2a) $$W_1 = -\frac{1}{2}\iiint (A\alpha + B\beta + C\gamma)\, dx\, dy\, dz,$$

wo die Integration sich über alle Gebiete des Feldes erstreckt, die von magnetischer Substanz ausgefüllt werden.

633. Ersetzt man die Magnetisirungscomponenten A, B, C durch ihre bezüglichen Werte

$$A = \frac{1}{4\pi}(a - \alpha),\ B = \frac{1}{4\pi}(b - \beta),\ C = \frac{1}{4\pi}(c - \gamma),$$

so resultirt

$$W_1 = \frac{1}{8\pi}\iiint (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, dx\, dy\, dz - \frac{1}{8\pi}\iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma)\, dx\, dy\, dz.$$

Wir haben es hier nur mit Magneten, nicht mit Strömen, die ja auch magnetische Wirkung hervorzubringen im Stande sind, zu tun. Daher ist nach Art. 428

$$\alpha = -\frac{\partial \Omega}{\partial x},\ \beta = -\frac{\partial \Omega}{\partial y},\ \gamma = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Ferner ist nach den Ergebnissen desselben Artikels

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0,$$

und endlich verschwindet nach Art. 402 das Flächenintegral der magnetischen Induction, wenn es über eine geschlossene Fläche erstreckt wird, das heisst, es ist

$$\iint (la + mb + nc)\, dS = 0.$$

Nach dem in Art. 100a abgeleiteten Hilfssatz haben wir also auch

$$\iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma)\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Es bleibt demnach

2b) $$W_1 = \frac{1}{8\pi}\iiint (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, dx\, dy\, dz$$

oder

2c) $$W_1 = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{H}^2\, dx\, dy\, dz.$$

Electrokinetische Energie.

634. Nach Art. 578 lässt sich die electrokinetische Energie der im Felde befindlichen Ströme durch die Formel

$$3') \qquad T_1 = \frac{1}{2} \Sigma (p i)$$

darstellen, wenn p das electrokinetische Moment eines Stromkreises, i die Stärke des diesen durchfliessenden Stromes angiebt, und wenn die Summation alle im Felde gelegenen Stromkreise umfasst.

Nun habe ich aber in Art. 590 nachgewiesen, dass p durch ein Linienintegral von der Form

$$p = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

in welchem F, G, H die Componenten des localen electrokinetischen Moments $\mathfrak{A}$ sind, und die Integration sich über die geschlossene Bahn des betreffenden Stromes erstreckt, ausdrücken lässt.

Demnach ist auch

$$3_1) \qquad T_1 = \frac{1}{2} \Sigma i \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Körperliche Leiter können wir uns als Bündel linearer geschlossener Strombahnen vorstellen. Ist dann dS der Querschnitt einer Strombahn, so haben wir

$$3a) \qquad T_1 = \frac{1}{2} \Sigma \int\int\int \mathfrak{d} . dS \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

$\mathfrak{d}$ bezeichnet die Dichte des Stromes an der betreffenden Stelle, es ist also, falls u, v, w die Componenten dieser Dichte angeben,

$$\mathfrak{d}\, dS = i$$

$$u = \mathfrak{d} \frac{dx}{ds}, \quad v = \mathfrak{d} \frac{dy}{ds}, \quad w = \mathfrak{d} \frac{dz}{ds}.$$

Hiernach wird, weil noch $dS . ds = dx\, dy\, dz$ ist,

$$3b) \qquad T_1 = \frac{1}{2} \Sigma \int\int\int (Fu + Gv + Hw)\, dx\, dy\, dz.$$

Die Integration erstreckt sich über den Raum, der von dem bezüglichen Leiter ausgefüllt wird, die Summe zeigt an, dass die Integrationen für alle Leiter auszuführen sind. Da nun überall, wo keine Ströme vorhanden sind, $u = v = w = 0$ ist, so können wir auch schreiben

$$3c) \qquad T_1 = \frac{1}{2} \int\int\int (Fu + Gv + Hw)\, dx\, dy\, dz,$$

wenn wir nunmehr die Integrationen über den ganzen unendlichen Raum oder über irgend ein Stück desselben, das alle Leiter umfasst, erstrecken.

635. Ich ersetze u, v, w durch ihre im Gleichungssysteme E) Art. 607 gegebenen Werte und habe

$$3\text{d})\quad T_1=\frac{1}{8\pi}\iiint\left\{F\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+G\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+H\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right\}dx\,dy\,dz.$$

Der Ausdruck lässt sich in einen andern verwandeln, in dem die α, β, γ mit den F, G, H ihre Plätze vertauscht haben.

Integrirt man nämlich die einzelnen Glieder partiell und beachtet, dass, weil die Integrationen den ganzen unendlichen Raum umfassen, die Coordinaten von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, so ist zum Beispiel

$$\iiint F\frac{\partial\gamma}{\partial y}dx\,dy\,dz=\Big/_{-\infty}^{+\infty}\gamma\iint F\,dx\,dz-\iiint\gamma\frac{\partial F}{\partial y}dx\,dy\,dz.$$

α, β, γ sind Grössen, die mit wachsendem r, dem Abstande des Punktes, für den sie gelten, wie r^{-3} abnehmen, es bleibt also nur der zweite Term übrig, und da dieselben Reductionen auch für alle andern Glieder gelten, so haben wir

$$3\text{e})\quad T_1=\frac{1}{2}\iiint\left\{\alpha\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}\right)+\beta\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\gamma\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right\}dx\,dy\,dz,$$

wo die Integration sich wiederum über den ganzen unendlichen Raum oder irgend einen Teil desselben, der alle Leiter umschliesst, erstreckt.

Endlich erhalten wir durch Einführung der magnetischen Inductionscomponenten a, b, c die fünfte Form

$$3\text{f}_1)\qquad T_1=\frac{1}{2}\iiint(a\alpha+b\beta+c\gamma)\,dx\,dy\,dz.$$

Hier beziehen sich die magnetische Kraft und magnetische Induction auf die Wirkung der stromführenden Körper (gleichgiltig, ob sie Leiter oder Dielectrica sind).

In der Ausdrucksweise des Quaternionencalculs haben wir auch

$$3\text{f}_2)\qquad T_1=-\frac{1}{2}\iiint S.\mathfrak{B}\mathfrak{H}\,dx\,dy\,dz.$$

636. Da T_1 sowohl wenn $\mathfrak{B}$ als wenn $\mathfrak{H}$ verschwindet, sich auf Null reducirt, so wird man die Integration entweder über den Raum, wo die magnetische Kraft, oder über den, wo die magnetische Induction der Ströme von Null verschiedene Werte besitzt, zu erstrecken haben.

Geht man von der Ansicht aus, dass electrische Ströme ihre magnetischen Wirkungen direct in der Ferne ausüben, so wird man von den Ausdrücken

für die electrokinetische Energie die unter 3c) und 3d) aufgestellten als die natürlichsten ansehen, huldigt man jedoch der Meinung, die in diesem Werke adoptirt ist, dass alle Wirkung durch Vermittelung des Zwischenmediums vor sich geht, so wird man die unter 3e) und 3f) fixirten Formen als den Tatsachen am besten angepasst, annehmen.

Während also nach der ersten Ansicht die electrokinetische Energie überall da, und nur da, vorhanden ist, wo die Ströme selbst cursiren, existirt sie für uns an allen Stellen, wo die magnetische Wirkung der Ströme einen von Null verschiedenen Betrag erreicht.

Vergleichung zwischen der magnetischen und der electrokinetischen Energie.

637. Nach Art. 423 war die potentielle Energie zweier magnetischer Schalen von den bezüglichen Stärken φ, φ' und den Kanten s, s' auf einander

$$W_m = -\varphi\varphi' \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds',$$

wo ε den Winkel und r den Abstand zwischen ds, ds' angab.

Ferner lehrte der Art. 521, dass die entsprechende Grösse für zwei electrische Ströme, die längs den bezüglichen Bahnen s, s' mit den bezüglichen Stärken i, i' fliessen, den Wert

$$W_s = i i' \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds'$$

hat.

Ist $i = \varphi$, $i' = \varphi'$, so wirken die magnetischen Schalen auf einander mechanisch mit genau derselben Stärke und auch nach genau derselben Richtung, wie es die entsprechenden Ströme tun. Allein während bei magnetischen Schalen die magnetische Kraft ihre potentielle Energie zu verringern sucht, strebt die magnetische Kraft der entsprechenden Ströme ihre Energie, die hier als kinetische Energie auftritt, zu vergrössern.

Weiter ist das magnetische Potential eines Systems von wirklichen Magneten in jedem Punkte des Raumes einwertig, dagegen das magnetische Potential eines Systems von Strömen in jedem Punkte des Raumes unendlich vielwertig.

So sehr sich also Magnete und Ströme in ihren Wirkungen ähneln, so ist es doch ganz unmöglich, magnetisirte Substanz so anzuordnen, dass sie einem electrischen Strom in jeder Hinsicht gleicht.

Dagegen lässt sich das Umgekehrte immer ausführen, in der Tat kann man durch geeignetes Arrangiren unendlich kleiner geschlossener Ströme stets ein System hervorbringen, das einem Magnete in jeder Hinsicht gleicht. Nur muss man bei Berechnung des Potentials durch das Linienintegral der magnetischen Kraft dieses Systems auf die Eigentümlichkeit

der Ströme Rücksicht nehmen, man darf den Integrationsweg nicht durch einen der kleinen Stromkreise, das heisst, nicht durch die magnetische Substanz hindurchführen.

Die Fernewirkungen der Magnete sind völlig identisch mit denen der Ströme, eine Reduction beider Wirkungen auf eine und dieselbe Ursache wird also nicht von der Hand zu weisen sein. Da wir nun, wie bemerkt, electrische Ströme nicht in jeder Hinsicht durch Magnete zu ersetzen vermögen, werden wir das Umgekehrte tun, die Magnete durch moleculare Ströme erklären.

638. Als ich im dritten Teil dieses Werkes die Phänomene, welche Magnete bieten, genau untersuchte, habe ich keinen Versuch gemacht zu erklären, wie die Fernewirkung der Magnete zu Stande kommt, ich habe mich damit begnügt, die Existenz dieser Wirkung als Erfahungstatsache hinzunehmen. Dem entsprechend ist die Energie der Magnete als potentieller Natur angesehen und als Grösse, die, wenn die Magnete ihren gegenseitigen mechanischen Antrieben folgen, abnimmt, betrachtet werden. Wenn wir aber Magnete als durch electrische Ströme constituirt betrachten, wenn wir ihre Eigenschaften aus denen der electrischen Ströme, die in den bezüglichen Molekeln ihrer Substanz cursiren, ableiten, müssen wir ihre Energie für kinetischer Natur erklären; wir müssen auch supponiren, dass wenn die magnetische Kraft die Magnete bewegt, sie dieselben stets so gegen einander treibt, dass, unter Voraussetzung der Constanthaltung der constituirenden molecularen Ströme, ein Anwachsen ihrer Energie erzielt wird.

Ferner dürfen wir auch nicht mehr, wie es im dritten Teil geschehen ist, Magnete als continuirliche und homogene Körper betrachten; namentlich wird aber die Annahme, dass jedes Teilchen eines Magnets genau dieselben Eigenschaften wie der ganze Magnet besitzt, hinfällig.

Ein Magnet besteht, wie wir jetzt sagen müssen, aus einer Ansammlung einer enorm grossen Anzahl sehr kleiner electrischer Ströme, er hat der Hauptsache nach eine moleculare Structur, und wird nicht durch nirgends unterbrochene Materie gebildet.

So lange unsere mathematischen Hilfsmittel so wenig ausgebildet sind, dass wir bei der Berechnung des Linienintegrals der magnetischen Kraft eines Magnets keines der ihn constuitirenden molecularen Ströme kreuzen dürfen, ohne befürchten zu müssen, dass wir in der Integration nicht mehr weiter kommen, so lange wir gezwungen sind, das Element eines Magnets als aus unendlich vielen Molecularmagneten constituirt zu betrachten, werden unsere Resultate den im dritten Teile abgeleiteten ähneln müssen. Wenn aber erst der Calcul so weit verfeinert ist, dass wir bei der Durchführung des Integrationsweges durch das Innere der Molekel alle Vorgänge daselbst zu verfolgen vermögen und nirgends durch analytische Schwierigkeiten aufgehalten werden, wird man die alte Theorie des Magnetismus aufgeben müssen, und der Ampèreschen Hypothese, die nichts von Magneten, sondern nur von Strömen weiss, zu folgen haben.

Magnetische und electromagnetische Energie sind dann Grössen derselben Art, sie sind beide kinetisch und müssen beide durch ein und dasselbe Symbol bezeichnet werden.

Obgleich man nun auch durch die alte Theorie des Magnetismus zu einzelnen Resultaten gelangen kann und wir wirklich zu solchen wie noch eben in Art. 633 gelangt sind, führt doch die Ampèresche Theorie der molecularen Ströme, wie sich noch in Art. 644 herausstellen wird, allein zu einem in sich widerspruchsfreien System von Betrachtungen.

Fassen wir hiernach die magnetische und electrokinetische Energie zu einer, zur electromagnetischen Energie zusammen und beachten, dass beide Energieen kinetischer Natur sind, so setzt sich die Gesammtenergie des electromagnetischen Feldes aus zwei Teilen zusammen:

der potentiellen Energie

$$W = \frac{1}{2}\iiint (Pf + Qg + Rh)\, dx\, dy\, dz$$

electrisirter Körper;

der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{8\pi}\iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma)\, dx\, dy\, dz$$

magnetisirter und von Strömen durchzogener Körper.

Die Gesammtenergie ist

$$W + T = \frac{1}{2}\iiint (Pf + Qg + Rh)\, dx\, dy\, dz + \frac{1}{8\pi}\iiint (a\alpha + b\beta + c\gamma)\, dx\, dy\, dz.$$

Kraftwirkung in einem electromagnetischen Felde; Zwang.

Electromagnetische Kraftwirkungen auf ein Körperelement.

639a. Magnetischer nicht stromführender Körper. Die potentielle Energie an einem Element $dx\,dy\,dz$ eines zur Stärke J (Componenten A B, C) magnetisirten Körpers ist, falls die Kraftcomponenten der magnetischen Wirkung des Feldes an der betreffenden Stelle die Werte α, β, γ besitzen, nach Art. 632, 2a)

$$W_1 = -(A\alpha + B\beta + C\gamma)\, dx\, dy\, dz.$$

Infolge der magnetischen Kraftwirkung des Feldes wird sich das Element einerseits fortzubewegen und andererseits zu drehen suchen.

Ich bezeichne die Componenten der mechanischen Kraft, die das Element in Richtung der Axen ohne Rotation zu treiben strebt, durch

$X_1\,dx\,dy\,dz$, $Y_1\,dx\,dy\,dz$, $Z_1\,dx\,dy\,dz$ und nenne $L'_x\,dx\,dy\,dz$, $L'_y\,dx\,dy\,dz$, $L'_z\,dx\,dy\,dz$ die Momente der Kräftepaare, welche dieses Element um die bezüglichen Coordinatenaxen zu drehen suchen. Es ist dann

$$1_1)\qquad \begin{aligned} X_1 &= A\frac{\partial \alpha}{\partial x} + B\frac{\partial \beta}{\partial x} + C\frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ Y_1 &= A\frac{\partial \alpha}{\partial y} + B\frac{\partial \beta}{\partial y} + C\frac{\partial \gamma}{\partial y}, \\ Z_1 &= A\frac{\partial \alpha}{\partial z} + B\frac{\partial \beta}{\partial z} + C\frac{\partial \gamma}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$1_2)\qquad \begin{aligned} L'_x &= B\gamma - C\beta, \\ L'_y &= C\alpha - A\gamma, \\ L'_z &= A\beta - B\alpha. \end{aligned}$$

639b. Unmagnetischer stromführender Körper. Wenn der Körper nicht magnetisirt, ist aber von einem Strome durchflossen wird, der an der Stelle, wo das Element $dx\,dy\,dz$ liegt, die Dichtecomponenten u, v, w besitzt, so rührt die mechanische Kraft des Feldes von seiner magnetischen Einwirkung auf den Körper als stromführenden Leiter her.

Die Componenten dieser auf das Element $dx\,dy\,dz$ wirkenden Kraft sind nach dem Gleichungssystem C)

$$2_1)\qquad \begin{aligned} X_2 &= vc - wb, \\ Y_2 &= wa - uc, \\ Z_2 &= ub - va. \end{aligned}$$

640. Stromführender magnetischer Körper. Im allgemeinsten Fall, wo der Körper magnetisirt ist, und zudem von Electricität durchflossen wird, sind die Componenten der mechanischen Kraftwirkung und die der Momente auf ein Element desselben die Summen der bezüglichen Componenten X_1, X_2; ... L_x, L_y; ...

Wir haben also beispielsweise

$$X = A\frac{\partial \alpha}{\partial x} + B\frac{\partial \beta}{\partial x} + C\frac{\partial \gamma}{\partial x} + vc - wb.$$

a, b, c sind die Componenten der magnetischen Induction des durch Ströme und Magnete hervorgebrachten Feldes an der Stelle x, y, z, sie stehen mit den Componenten α, β, γ seiner magnetischen Kraft und den Componenten A, B, C der Magnetisirung des Körperelements $dx\,dy\,dz$ in den bekannten Beziehungen

$$\begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A, \\ b &= \beta + 4\pi B, \\ c &= \gamma + 4\pi C. \end{aligned}$$

Ferner haben die Stromcomponenten u, v, w die Werte

$$u=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right),$$

$$v=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right),$$

$$w=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right).$$

Demnach wird

$$X=\frac{1}{4\pi}\left\{(a-\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}+(b-\beta)\frac{\partial\beta}{\partial x}+(c-\gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial x}+b\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)+c\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\right\}$$

oder

$$X=\frac{1}{4\pi}\left\{a\frac{\partial\alpha}{\partial x}+b\frac{\partial\alpha}{\partial y}+c\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial(a\alpha)}{\partial x}+\frac{\partial(b\alpha)}{\partial y}+\frac{\partial(c\alpha)}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\alpha\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}\right)\right\},$$

Es ist aber nach Art. 403b

$$\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}=0.$$

Wir erhalten also

$$3_1)\quad \begin{aligned} X&=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[a\alpha-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right]+\frac{\partial(b\alpha)}{\partial y}+\frac{\partial(c\alpha)}{\partial z}\right\},\\ Y&=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[b\beta-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right]+\frac{\partial(c\beta)}{\partial z}+\frac{\partial(a\beta)}{\partial x}\right\},\\ Z&=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[c\gamma-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right]+\frac{\partial(a\gamma)}{\partial x}+\frac{\partial(b\gamma)}{\partial y}\right\},\end{aligned}$$

$$3_2)\quad \begin{aligned} L_x&=\frac{1}{4\pi}(b\gamma-c\beta),\\ L_y&=\frac{1}{4\pi}(c\alpha-a\gamma),\\ L_z&=\frac{1}{4\pi}(a\beta-b\alpha).\end{aligned}$$

Die Kraftcomponenten und die Momente beziehen sich auf die Volumeinheit des betreffenden Körpers.

Ableitung der Kraftwirkungen eines electromagnetischen Feldes aus der Hypothese eines Zwangzustandes in dem dasselbe ausfüllenden Medium.

641. Componenten des Zwanges. Ich bezeichne mit P_{hk} einen auf eine Flächeneinheit irgendwie ausgeübten Zwang. Der Index $_h$ bezieht sich auf die Richtung der angegriffenen Fläche, der Index $_k$ auf die des angreifenden Zwanges; hiernach soll jener anzeigen, dass die positive Normale der Fläche einer festen Axe h, dieser festsetzen, dass die Wirkungsrichtung des Zwanges einer zweiten festen Axe k parallel läuft. Dabei ist die Wirkungsrichtung eines Zwanges positiv, wenn sie von der negativen zur positiven Seite der betreffenden Fläche geht.

Die Axenrichtungen h und k können zusammenfallen, dann greift der Zwang die Fläche senkrecht an. Sie können auch geneigt gegen einander sein, der Zwang wirkt dann schief zur Fläche. Endlich kann auch der Fall eintreten, dass sie senkrecht auf einander stehen, der Zwang also die Fläche tangential angreift.

In der gewöhnlichen Theorie des Zwanges in Substanzen, in der Elasticitätstheorie, nimmt man an, dass der Zwang keine Tendenz hat die einzelnen Molekel zu drehen, sondern sie lediglich zu verschieben sucht; hier ist also

$$P_{hk} = P_{kh}$$

zu setzen. Bei magnetisirten Körpern ist aber eine solche Tendenz vorhanden, demgemäss darf auch von der genannten Bedingung kein Gebrauch gemacht werden.

Ich betrachte die Wirkungen des Zwanges auf die sechs Seiten eines kubischen Körperelements $dx\,dy\,dz$, dessen Schwerpunkt den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems bildet.

Die die positive x Axe in der Entfernung $+dx/2$ senkrecht treffende Seite $dy\,dz$ des Körperelements wird

parallel der x Axe von der Kraft $\left(P_{xx} + \frac{1}{2}\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}dx\right)dy\,dz = X_{+x}$,

" " y " " " " $\left(P_{xy} + \frac{1}{2}\frac{\partial P_{xy}}{\partial x}dx\right)dy\,dz = Y_{+x}$,

" " z " " " " $\left(P_{xz} + \frac{1}{2}\frac{\partial P_{xz}}{\partial x}dx\right)dy\,dz = Z_{+x}$

angegriffen.

Die dieser Seite parallele, die negative x Axe in der Entfernung $-dx/2$ senkrecht treffende Seite $dy\,dz$ des Körperelements erleidet

parallel der x Axe den Zwang $\left(+P_{xx}-\frac{1}{2}\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}dx\right)dy\,dz=-X_{-x}$,

„ „ y „ „ „ $\left(+P_{xy}-\frac{1}{2}\frac{\partial P_{xy}}{\partial x}dx\right)dy\,dz=-Y_{-x}$,

„ „ z „ „ „ $\left(+P_{xz}-\frac{1}{2}\frac{\partial P_{xz}}{\partial x}dx\right)dy\,dz=-Z_{-x}$.

Die Zwangscomponenten auf das zur x Axe senkrechte Seitenpaar sind also

$$X_{+x}+X_{-x}=\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}dx\,dy\,dz,\quad Y_{+x}+Y_{-x}=\frac{\partial P_{xy}}{\partial x}dx\,dy\,dz,$$

$$Z_{+x}+Z_{-x}=\frac{\partial P_{xz}}{\partial x}dx\,dy\,dz.$$

Entsprechend hat man für die beiden andern Seitenpaare

$$X_{+y}+X_{-y}=\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}dx\,dy\,dz,\quad Y_{+y}+Y_{-y}=\frac{\partial P_{yy}}{\partial y}dx\,dy\,dz,$$

$$Z_{+y}+Z_{-y}=\frac{\partial P_{yz}}{\partial y}dx\,dy\,dz,$$

$$X_{+z}+X_{-z}=\frac{\partial P_{zx}}{\partial z}dx\,dy\,dz,\quad Y_{+z}+Y_{-z}=\frac{\partial P_{zy}}{\partial z}dx\,dy\,dz,$$

$$Z_{+z}+Z_{-z}=\frac{\partial P_{zz}}{\partial z}dx\,dy\,dz.$$

Sind $X\,dx\,dy\,dz$, $Y\,dx\,dy\,dz$, $Z\,dx\,dy\,dz$ die das Element $dx\,dy\,dz$ in Richtung der Axen angreifenden Kräfte und $L_x\,dx\,dy\,dz$, $L_y\,dx\,dy\,dz$, $L_z\,dx\,dy\,dz$ die Momente der Kräftepaare, so hat man also

$$1_1)\qquad \begin{aligned} X&=\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zx}}{\partial z},\\ Y&=\frac{\partial P_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zy}}{\partial z},\\ Z&=\frac{\partial P_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial P_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial P_{zz}}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$1_2)\qquad \begin{aligned} L_x&=P_{yz}-P_{zy},\\ L_y&=P_{zx}-P_{xz},\\ L_z&=P_{xy}-P_{yx}. \end{aligned}$$

Soll dieser durch P definirte auf das Element wirkende Zwang mit der im vorigen Artikel betrachteten dieses stromführende magnetisirte

Element angreifenden Kraft des electromagnetischen Feldes identisch sein, so muss man den Zwang so bestimmen, dass [Art. 640, 3_1), 3_2)]

$$2a_1)\quad \begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{4\pi}\left(a\alpha - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right),\\ P_{yy} &= \frac{1}{4\pi}\left(b\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right),\\ P_{zz} &= \frac{1}{4\pi}\left(c\gamma - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right); \end{aligned}$$

$$2a_2)\quad \begin{aligned} P_{yz} &= \frac{1}{4\pi}b\gamma,\ P_{zy} = \frac{1}{4\pi}c\beta;\\ P_{zx} &= \frac{1}{4\pi}c\alpha,\ P_{xz} = \frac{1}{4\pi}a\gamma;\\ P_{xy} &= \frac{1}{4\pi}a\beta,\ P_{yx} = \frac{1}{4\pi}b\alpha \end{aligned}$$

wird.

Umgekehrt; ist ein Körper einem Zwang unterworfen, dessen Componenten in jedem Punkte des Körpers den eben gegebenen Bedingungsgleichungen genügen, so erleidet er eine ebenso grosse mechanische Krafteinwirkung wie wenn er sich in einem von Strömen und Magneten hervorgerufenen Felde befände, wo die magnetischen Kraftcomponenten die Werte α, β, γ und die magnetischen Inductionscomponenten die a, b, c besitzen.

642. Allgemeinster Zwangzustand in einem Felde, der permanente und temporäre Magnete und Ströme enthält. Natur desselben. Die genannten Gleichungen zeigen, dass der supponirte Zwang ziemlich specieller Natur ist. Ueber seine Wirkungsart gewinnt man am bequemsten Aufklärung, wenn man dem Axensystem eine besondere Lage verleiht. Ich lasse die x Axe den Winkel zwischen den Richtungen der magnetischen Kraft und der magnetischen Induction des Feldes halbiren, verlege die y Axe in die Ebene dieses Winkels und rechne sie nach der Seite als positiv, nach welcher die magnetische Kraft wirkt.

Ist $\mathfrak{H}$ der numerische Betrag der magnetischen Kraft, $\mathfrak{B}$ der der magnetischen Induction und bezeichnet 2ε den Winkel zwischen den Richtungen dieser beiden Grössen, so hat man

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{H}\cos\varepsilon,\ \beta = \mathfrak{H}\sin\varepsilon,\ \gamma = 0;\\ a &= \mathfrak{B}\cos\varepsilon,\ b = -\mathfrak{B}\sin\varepsilon,\ c = 0. \end{aligned}$$

Demnach wird

2b₁)
$$P_{xx}=\frac{1}{4\pi}\left(+\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\varepsilon-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right),$$
$$P_{yy}=\frac{1}{4\pi}\left(-\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\varepsilon-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right),$$
$$P_{zz}=\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right);$$

2b₂)
$$P_{yz}=P_{zx}=P_{zy}=P_{xz}=0,$$
$$P_{xy}=\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos\varepsilon\sin\varepsilon,$$
$$P_{yx}=-\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos\varepsilon\sin\varepsilon.$$

Der Zwang besteht also in —

1. Einem Druck, der nach allen Richtungen mit derselben Stärke
$$P=\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2$$
wirkt.

2. Einer Spannung, deren Richtung in jedem Punkte des Körpers den Winkel 2ε zwischen der daselbst vorhandenen magnetischen Kraft und der daselbst herrschenden magnetischen Induction halbirt und die Grösse
$$T=\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\cos^2\varepsilon$$
besitzt.

3. Einem Druck, dessen Wirkungsrichtung den äussern Winkel $360-2\varepsilon$ der genannten Richtungen bisecirt und der von der Grösse
$$P_1=\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin^2\varepsilon$$
ist.

4. Einem Kräftepaar, das jedes Element des Körpers in der Ebene der magnetischen Kraft und magnetischen Induction von der Richtung der magnetischen Induction zu der der magnetischen Kraft mit dem Moment
$$D=\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\sin(\mathfrak{B},\mathfrak{H})$$
zu drehen strebt.

Zwangzustand in einem Felde, das temporäre Magnete und Ströme enthält, Zwangzustand in Flüssigkeiten. Bei Flüssigkeiten und bei magnetisch weichen Körpern fällt die Richtung der magnetischen Kraft mit der der magnetischen Induction zusammen. Hier ist $\varepsilon=0$ und
$$P_{xx}=\frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{B}\mathfrak{H}-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right);\quad P_{yy}=P_{zz}=-\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2.$$

Die x Axe zeigt die Richtung, nach der die magnetische Kraft an der betreffenden Stelle wirkt, an. Drehende Kräfte existiren in diesem Falle nicht, der Zwang besteht in einem hydrostatischen Druck $\mathfrak{H}^2/8\pi$ combinirt mit einer längs den Kraftlinien wirkenden Spannung $\mathfrak{B}\mathfrak{H}/4\pi$.

643. Zwangzustand in nicht magnetisirten und nicht magnetisirbaren Teilen des Feldes. In weiterer Specialisirung nehme ich an, dass der betreffende Körper, für dessen Inneres der Zwang berechnet werden soll, weder von vornherein magnetisch ist, noch im Felde magnetisirt wird. Für diesen wichtigen Fall ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, also $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ und

$$P_{xx} = \frac{1}{8\pi}(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2),$$

$$P_{yy} = \frac{1}{8\pi}(\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2),$$

$$P_{zz} = \frac{1}{8\pi}(\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2);$$

$$P_{yz} = P_{zy} = \frac{1}{4\pi}\beta\gamma,$$

$$P_{zx} = P_{xz} = \frac{1}{4\pi}\gamma\alpha,$$

$$P_{xy} = P_{yx} = \frac{1}{4\pi}\alpha\beta.$$

Der Zwang besteht in einer Spannung $\mathfrak{H}^2/8\pi$ längs den Kraftlinien und einem Druck von derselben Stärke $\mathfrak{H}^2/8\pi$ in allen zu diesen Kraftlinien senkrechten Richtungen (Art. 106). Kräftepaare sind nicht vorhanden.

Berechnet man die Componenten der durch diesen Zwang hervorgebrachten, auf Volumeinheit bezogenen mechanischen Wirkung an einer Stelle x, y, z des betreffenden Körpers, so ergiebt sich zum Beispiel

$$X = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \beta\frac{\partial\beta}{\partial x} - \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial y} + \beta\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial z} + \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right),$$

oder

$$X = \frac{1}{4\pi}\alpha\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) + \frac{1}{4\pi}\gamma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) - \frac{1}{4\pi}\beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right).$$

Es ist aber

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 4\pi m;$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} = 4\pi v,$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 4\pi w.$$

Wir haben also

$$X = \alpha m + v\gamma - w\beta,$$
$$Y = \beta m + w\alpha - u\gamma,$$
$$Z = \gamma m + u\beta - v\alpha.$$

Darin ist m die Raumdichte, die die magnetische Materie an der betreffenden Stelle des Körpers besitzt, und ferner geben u, v, w die auf Flächeneinheit bezogenen Stärken, mit denen der den Körper durchziehende Strom in Richtung der Axen fliesst.

644. Nun fällt aber der eben behandelte Fall, wo wir es mit einem weder magnetischen noch magnetisirbaren Körper zu tun haben, mit dem in Art. 603 behandelten Fall, wo die mechanische Kraftwirkung eines electromagnetischen Feldes auf die Volumeinheit eines Körpers, der lediglich für Electricität durchströmbar sein sollte, bestimmt wurde, zusammen. Wir müssen also finden

$$X = v\gamma - w\beta,$$
$$Y = w\alpha - u\gamma,$$
$$Z = u\beta - v\alpha.$$

Demnach ist

$$m = 0$$

und

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0$$

zu setzen.

Zu diesen Resultaten gelangt man aber auch, wenn man von Ampères und Webers Hypothese über die Constitution der magnetischen und diamagnetischen Körper ausgeht und annimmt, dass magnetische und diamagnetische Polarität durch moleculare electrische Ströme hervorgebracht werden. In der Tat existirt dann in dem Körper gar keine sogenannte magnetische Materie, es ist eo ipso $m = 0$.

645. Indem ich hier die electromagnetische Kraft in einem Felde aus einem gewissen Zwangzustand des ihn ausfüllenden Mediums ableitete, bin ich lediglich der Hypothese Faradays, derzufolge jede magnetische Kraftlinie sich zu verkürzen und andere magnetische Kraftlinien fortzudrängen bestrebt sein soll, gefolgt*). Das einzig Neue in dieser Untersuchung besteht in der Eruirung des mathematischen Ausdrucks für die Grösse der längs den Kraftlinien wirkenden Spannung und des senkrecht zu ihnen wirkenden Druckes und in dem Nachweise, dass dieser besondere Zustand wirklich die mechanischen Kräfte hervorzubringen im Stande ist, die man

*) *Exp. Res.* 3266, 3267, 3268.

im electromagnetischen Felde auf einen leitenden nicht magnetischen und nicht magnetisirbaren Körper tatsächlich ausgeübt sieht.

Doch habe ich nichts darüber sagen können, wie dieser Zwangzustand hervorgebracht, noch auch, wie er erhalten wird. Nur das sollte ins Klare gesetzt werden, dass man die gegenseitige Abstossung oder Anziehung zweier Ströme durch den Zwang des sie umgebenden Mediums ebenso gut wie durch eine Fernwirkung der Ströme auf einander zu erklären vermag.

Die weitere Verfolgung des Zwangzustandes selbst, wie er etwa durch Bewegung der Partikel des Mediums entsteht und erhalten wird, gehört einer ganz andern Untersuchung an. Ob es möglich ist, eine solche Untersuchung durchzuführen, und welche Hypothesen etwa noch zu machen sein würden, das hat mit unsern Resultaten nichts zu tun (Art. 832).

Im ersten Teile dieses Buches habe ich nachgewiesen, dass die electrostatischen Kräfte eines Feldes durch einen Zwangzustand des ihn ausfüllenden Mediums erklärt werden können, jetzt sind wir für die electromagnetischen Kräfte zu demselben Schluss gelangt.

Wirken im Felde electrostatische und electromagnetische Kräfte, so müssen wir annehmen, dass der electrostatische, im ersten Teil Art. 106 beschriebene Zwang und der hier abgeleitete electromagnetische Zwang sich superponiren.

Doch ist noch zu untersuchen, ob die Hypothese, dass ein Medium den beschriebenen Zwang anzunehmen und zu ertragen im Stande ist, mit den sonstigen Eigenschaften der Substanzen in Einklang gebracht zu werden vermag. Einiges habe ich darüber schon im fünften Capitel des ersten Teiles gesagt, anderes werde ich bei spätern Gelegenheiten hinzufügen.

646. Um dem Leser eine Idee von der Stärke des supponirten Zwanges zu geben, bemerke ich, dass die erdmagnetische Kraft in unsern Breiten die erdmagnetischen Kraftlinien mit etwa 0,9 mg pro 1 qd spannt. Die grösste von Joule*) durch Electromagnete hervorgebrachte magnetische Spannung beträgt etwa 1000 kg pro 1 qd.

---

*) Sturgeons *Annals of Electricity* V. p. 187 (1840), oder *Phil. Mag.* Dec. 1851.

Cap. XII.

Platte Körper (Schalen) im electromagnetischen Felde.

——×——

Stromleitung in einer Lamelle.

647. Definition. Eine Lamelle, Platte oder Schale besteht aus einem sehr dünnen Stratum leitender Substanz, das zu beiden Seiten von isolirenden Medien begrenzt ist. Ströme vermögen eine solche Schale nur längs ihrer Ausbreitung zu durchfliessen, in sie ein- oder aus ihr heraustreten können sie nur durch die Stellen, an welche die Electroden applicirt werden.

Soll aber eine Schale einen Strom von endlicher Stärke fortzuleiten im Stande sein, so darf sie natürlich nicht, wie hier vorausgesetzt, unendlich dünn sein, sie muss eine endliche Dicke besitzen. Demnach zählen eigentlich solche Schalen mit zu der allgemeinen Klasse der dreidimensionalen Conductoren. Indessen darf man doch in manchen Fällen von der eingeführten Abstraction Gebrauch machen und die electrische Eigenschaft einer wirklichen stromführenden Lamelle aus denen einer supponirten unendlich dünnen ableiten.

Ideell betrachtet ist jede Fläche eine solche Lamelle. Die beiden Seiten einer Lamelle unterscheide ich dadurch von einander, dass ich die eine als positiv, die andere als negativ bezeichne. Bei geschlossenen Flächen gilt die nach aussen gekehrte Seite als die positive. Wo ich von auf einer solchen Fläche gezeichneten Curven spreche, da setze ich voraus, dass diese Curven von der positiven Seite der Fläche aus angesehen werden. Ich verweise noch auf Art. 294, bemerke aber, dass dort die Richtung eines Stromes mit Bezug auf die negative Seite der Fläche definirt ist.

648. Die Stromfunction. Die Definition der in der Ueberschrift genannten Function habe ich schon in Art. 294 gegeben. Mit den hier notwendigen Aenderungen ist die *Stromfunction* an einer Stelle P der Oberfläche einer Schale gleich der Electricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit eine von einem fixen Puncte A aus gezogene und in dem betrachteten Punkte P endigende Linie von links nach rechts kreuzt.

Zieht man zwei von A nach P führende Linien AQP und $AQ'P$, so muss infolge der Continuitätsbedingung, der electrische Ströme zu genügen haben, durch $AQ'P$ in der Zeiteinheit ebenso viel Electricität aus dem Gebiete $AQPQ'A$ herausfliessen, als durch die Linie AQP in dasselbe hineingeströmt ist, vorausgesetzt, dass dieses Gebiet keine selbständigen Zu- und Ableitungen besitzt.

Wenn der Punkt A ein für alle Mal festgelegt ist, hängt also der Wert der Stromfunction φ nur noch von der Lage des Punktes P, nicht aber von der Form der Linien, die zwischen A und P laufen, ab. Doch gelangt man zu derselben Definition der Stromfunction nur bei allen den von A nach P führenden Linien, welche einander äquivalent sind, das heisst in diesem Falle, die bei ihrer Transformation in einander keine Electroden durchschneiden.

Stromlinien. Ich bezeichne mit s die Länge der Linie AP; die Electricitätsmenge, welche ein Element ds dieser Linie in der Zeiteinheit von links nach rechts durchkreuzt, ist dann

$$1)\qquad di = \frac{d\varphi}{ds}\,ds.$$

Diese Electricitätsmenge verschwindet, wenn φ gar nicht von s abhängt, wenn also die Stromfunction längs der Curve AP überall einen und denselben Wert besitzt. In diesem Falle kreuzt der Strom die betreffende Curve an keiner Stelle, seine Electricität fliesst längs derselben. Man nennt darum Linien, in deren allen Punkten die Stromfunction einen und denselben Wert besitzt, *Stromlinien.*

649. Potential, Niveaulinien. Sei ferner ψ das Potential, den die freie Electricität der Schale in einem Punkte derselben aufweist. Wirken in der Schale keine andern electromotorischen Kräfte als die durch Variation des genannten Potentials längs der Schale bedingten, so ist die electromotorische Kraft, die in der Länge eines Elements ds einer Curve s wirkt,

$$2)\qquad dE = -\frac{d\psi}{ds}\,ds.$$

Curven, in deren ganzer Ausdehnung das Potential einen und denselben Wert hat, werden in ihrer Längsrichtung von gar keinen electromotorischen Kräften afficirt und heissen *Niveaulinien* oder *Aequipotentielle Linien.*

650. Beziehung zwischen den Strom- und Niveaulinien. Die beiden Grössen φ und ψ, die unter den gegebenen Verhältnissen den electrischen Zustand in der Schale vollständig zu charakterisiren im Stande sind, werden Functionen der Lage der betreffenden Punkte, für welche sie gerade gelten sollen, sein. Kennt man aber die Werte, die sie in den einzelnen Punkten der Schale besitzen, schon von vornherein, so wird man umgekehrt die Lage eines Punktes durch die ihm zugehörigen Werte der genannten Grössen fixiren können. φ und ψ sind dann die Coordinaten der Punkte der Schale.

Sei ds_1 die Bogenlänge, welche die beiden Stromlinien φ und $\varphi + d\varphi$ aus einer Niveaulinie ψ ausschneiden, ebenso bezeichne ds_2 die Bogenlänge, welche die beiden Niveaulinien ψ und $\psi + d\psi$ aus einer Stromlinie φ ausschneiden, ds_1 und ds_2 können dann als Seiten des Schalenelements $d\varphi d\psi$ betrachtet werden.

Da ds_1 einer Niveaulinie angehört, so fliesst längs dieses Elements keine Electricität, umgekehrt wird ds_2 gerade in seiner Längsrichtung, und nur in dieser, von einem Strom durchflossen, das Element $d\varphi d\psi$ der Schale wird also von einem Strom durchzogen, der die Seite ds_1 und die dieser parallele, aber keine andere in Richtung der Seite ds_2 kreuzt. Die Stärke dieses Stromes ist gleich $d\varphi$ und die den Strom treibende electromotorische Kraft gleich $-d\psi$.

Ich bezeichne mit σ den specifischen auf Flächeneinheit bezogenen Widerstand der Schale, der Widerstand des Elements $ds_1 ds_2$ derselben ist dann, da man ds_2 als Länge, ds_1 als Breite desselben anzusehen hat,

$$dR = \sigma \frac{ds_2}{ds_1}.$$

Nach dem Ohmschen Gesetz, dem wir auch für unendlich dünne Strata Geltung zuschreiben, ist aber

$$d\psi = dR\, d\varphi,$$

daher

$$\frac{ds_1}{d\varphi} = \sigma \frac{ds_2}{d\psi}. \tag{3}$$

651. Die vorstehende Gleichung drückt eine Beziehung zwischen den Strom- und Niveaulinien aus. Sie setzt die Neigung, die diese Liniensysteme gegen einander in jedem Punkte der Schale haben, fest. Diese Neigung wird, wenn die Schale an verschiedenen Stellen verschiedene specifische Widerstände aufweist, von Punkt zu Punkt variiren.

Hat aber die Schale überall einen und denselben specifischen Widerstand, so ist σ constant und

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{d(\sigma\varphi)}{d\psi}.$$

Ich setze

$$\psi = \sigma\psi' \tag{a}$$

und erhalte

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{d\varphi}{d\psi'}. \tag{3$_1$}$$

Die Stromlinien schneiden dann also die Niveaulinien senkrecht, beide Liniensysteme zusammen zerteilen die Schalenfläche in lauter kleine Quadrate

Erinnert man sich der in Art. 183 gegebenen Definition der conjugirten Functionen, so folgt, dass unsere beiden Functionen φ und ψ' conjugirt zu einander sind. Ferner ergeben die daselbst deducirten Resultate, dass, wenn φ_1 und ψ_1' conjugirte Functionen von φ und ψ' sind, die Curven φ_1 auf einer Schale, die die Curven ψ_1' zu Niveaulinien hat, die Stromlinien darstellen.*) Hat man also die Stromverteilung in einer isotropen Schale von bestimmter Form unter gewissen Voraussetzungen eruirt, so erlangt man durch geeignete Transformation der betreffenden, jene Stromverteilung charakterisirenden conjugirten Function, die Lösung für andere Fälle. Die Methoden, nach denen solche Transformationen auszuführen sind, habe ich in den Artt. 183—190 auseinandergesetzt.

Magnetische Wirkung einer Schale, innerhalb deren geschlossene Ströme verlaufen.

652. Zerlegung einer Stromschale in Stromkreise. Ich bestimme jetzt die magnetische Wirkung einer stromführenden Schale, die an keiner Stelle Electroden besitzt.

Da die Schale nirgend Zu- und Ableitungen für die sie durchströmende Electricität haben soll, so müssen die Ströme in ihr selbst in sich zurücklaufen; die Stromlinien sind geschlossene Curven, deren jede sich selbst beliebig oft, eine der andern aber nie durchschneiden kann.

Die Stromfunction φ hat also in jedem Punkte der Schale einen bestimmten Wert.

Zwei Stromlinien φ und $\varphi + \delta\varphi$ schneiden aus der Schale einen ringförmigen Teil aus und da die Electricität längs den Stromlinien fliesst, wird man diesen Teil der Schale wie einen Stromkreis behandeln dürfen, der an jedem Querschnitt in der Zeiteinheit von der Electricitätsmenge $\delta\varphi$ durchströmt wird. Die positive Richtung dieses Stromkreises ist diejenige, welche den Teil der Schale, für den die Stromfunction einen grössern Wert als φ besitzt, zur Linken hat.

Indem man alle Stromlinien zur Herstellung solcher Stromkreise verwendet, zerlegt man die ganze Schale in lauter solche Stromkreise, und da die Schale nur geschlossene Stromlinien enthält, ist man auch sicher, dass die Stromkreise die ganze Schale constituiren.

Man kann also die magnetische Wirkung der Schale durch die der sie zusammensetzenden Stromkreise substituiren.

Ersetzung einer Stromschale durch einen complex-lamellaren Magnet. Nun ist die magnetische Wirkung eines solchen Stromkreises ebenso gross wie die einer magnetischen Schale, die die Stärke $\delta\varphi$ besitzt und von diesem Stromkreise begrenzt wird. Die Form dieser magnetischen Schale ist ganz

*) W. Thomson, *Camb. and Dub. Math. Journ.* vol. III. p. 286.

beliebig, nur darf sie den Punkt, für den die magnetische Kraft des Stromkreises berechnet werden soll, nicht in ihrer Substanz einschliessen. Ich lasse die magnetische Schale mit dem Teil der Stromschale zusammenfallen, auf welchem die Stromfunction einen grössern Wert als längs unseres Stromkreises aufweist.

Man zieht nun die Stromlinien so, dass man mit der, für welche φ den grössten Wert, den es überhaupt auf der Schale erreicht, besitzt, anfängt und mit der, für welche es den kleinsten Wert hat, aufhört. Ersetzt man dann jeden dieser Stromkreise durch die zugehörige definirte magnetische Schale, so findet sich die magnetische Kraftwirkung der Stromschale auf irgend einen ihrer Substanz nicht angehörenden Punkt gleich der eines complex-lamellaren Magnets, dessen Substanz das Gebiet, das die Schale einnimmt, ausfüllt, und dessen Stärke von Punkt zu Punkt wie $C+\varphi$, wo C eine Constante ist, variirt.

Die Constante C lässt sich nur in dem Falle bestimmen, wenn die Stromschale von einer endlichen geschlossenen Linie begrenzt ist. Die Grenzlinie ist dann selbst eine Stromlinie, und wir haben für sie $C+\varphi=0$ zu setzen. Bei geschlossenen Schalen und bei solchen, die in die Unendlichkeit verlaufen, hat man kein Mittel, die genannte Constante zu berechnen.

Magnetisches Potential der Stromschale.

653. Die Substitution eines complex-lamellaren Magnets an Stelle der Stromschale lehrt unmittelbar das magnetische Potential Ω dieser letztern kennen, denn man hat nach Art. 421

$$\Omega=\iint \frac{1}{r^2}\,\varphi\cos\vartheta\, dS.$$

Darin ist r der Abstand des Punktes, den die Schale angreifen soll, von dem Element dS dieser Schale und ϑ der Winkel zwischen der Richtung von r und der von der positiven Seite von dS gezogenen Normale.

Ich hebe aber hervor, dass der obige Ausdruck für Ω das magnetische Potential nur für diejenigen Punkte darstellt, die nicht innerhalb der Substanz der Schale liegen. In Punkten, die der Substanz eines stromführenden Conductors selbst angehören, existirt überhaupt, wie wir wissen, nichts einem magnetischen Potentiale Vergleichbares.

Beim Durchgange durch die magnetische Schale erleidet Ω einen Sprung. In der Tat, ist Ω_1 der Wert von Ω für einen Punkt, wenn er noch gerade innerhalb der Schale liegt [Ω ist hier nur als Repräsentation des unter 1) aufgestellten Ausdrucks aufzufassen], und giebt Ω_2 den Wert von Ω, wenn dieser Punkt eben durch die Schalenoberfläche hindurchgegangen ist, so hat man, falls φ den Wert der Stromfunction an der Durchgangsstelle bezeichnet,

$$\Omega_2=\Omega_1+4\pi\varphi. \tag{2}$$

Magnetische Kraftcomponenten der Stromschale.

Wenn auch das magnetische Potential beim Durchgang durch die Schalenoberfläche discontinuirlich wird, variirt doch die magnetische Kraft der Schale, welche senkrecht zu ihrer Oberfläche wirkt, continuirlich während dieses Durchganges. Auch der Teil ihrer Kraft, der parallel den Stromlinien wirkt, bleibt stetig. Dagegen wird der dritte Teil, der tangential zur Schale und normal zu der bezüglichen Stromlinie steht, an der Schale discontinuirlich. Bezeichnet nämlich s die Länge einer auf der Schale gezogenen Linie, so ist die Kraftcomponente in Richtung von ds auf der negativen Seite der Schale gleich $-d\Omega_1/ds$, auf der positiven gleich $-d\Omega_2/ds$, d. h. gleich $-d\Omega_1/ds - 4\pi d\varphi/ds$. Auf der positiven Seite der Schale ist demnach diese Kraftcomponente um $-4\pi d\varphi/ds$ grösser als auf der negativen, und dieser Ueberschuss verschwindet, wenn s mit φ zusammenfällt, oder die Schale senkrecht trifft, und erreicht seinen grössten Betrag, wenn s gegen φ senkrecht, gegen die Schale tangential anläuft.

Induction in einer widerstandslosen isolirten Schale.

654. Das electrokinetische Moment einer widerstandslosen isolirten Schale ist invariabel. Nach Art. 579 ist die äussere electromotorische Kraft, die einen Strom von der Stärke i in einem Leiter vom Widerstande R und dem electrokinetischen Moment p in Bewegung setzt,

$$E = \frac{dp}{dt} + Ri.$$

Besitzt der Leiter keinen electrischen Widerstand und wirkt auf ihn auch keine äussere electromotorische Kraft, so hat man $dp/dt = 0$; das Moment desselben erleidet dann mit der Zeit keine Veränderung.

Nun wird aber, wie ich in Art. 588 nachgewiesen habe, das Moment eines Stromkreises durch das Flächenintegral der magnetischen Induction erstreckt über eine vom Stromkreise begrenzte Fläche gemessen, und da eine isolirte (von Electroden freie) Stromschale sich in Stromkreise auflösen lässt, so muss auch das Flächenintegral der magnetischen Induction erstreckt über ein von einer geschlossenen Curve begrenztes Flächenstück der Schale, wenn die Schale eine unendlich grosse Leitungsfähigkeit besitzt und von keiner äussern electromotorischen Kraft angegriffen wird, constant sein. Daraus folgt, dass für eine solche Schale die Normalcomponente der magnetischen Induction an keinem Punkte ihrer Oberfläche ihren Wert mit der Zeit variirt.

655. Verändert man also in der Umgebung einer widerstandslosen isolirten Schale, dadurch dass man Magnete oder Ströme sich bewegen oder

in ihrer Stärke schwanken lässt, das electromagnetische Feld, so werden in der Schale Ströme inducirt, die sich so verteilen und von solcher Stärke sind, dass ihre magnetische Wirkung zusammen mit der magnetischen Wirkung des electromagnetischen Feldes den zur Fläche der Schale senkrecht verlaufenden Teil der magnetischen Induction an jedem Punkte der Schale auf constanter Höhe erhält.

Eine Schale als Schirm gegen magnetische Wirkungen. In dem Falle, wo in der Schale von vornherein keine Ströme cursiren, und ihre Substanz durch Einwirkung des Feldes keine Magnetisirung erhält, übt dieselbe keine magnetische Kraft aus. Hier ist und bleibt, wie man das electromagnetische Feld verändern mag, die Normalcomponente der magnetischen Induction an allen Punkten der Schale gleich Null.

Man darf dann die Schale als undurchlässig für magnetische Induction ansehen. Die magnetischen Inductionslinien werden von ihrer Fläche genau so abgelenkt, wie die Strömungslinien eines einen unendlich grossen isotropen Leiter durchfliessenden electrischen Stromes, wenn man in diesen Leiter eine Schale von der Form unserer Stromschale und von absolut undurchlässiger Substanz einführt. Ist die Schale geschlossen oder erstreckt sie sich nach allen Seiten in die Unendlichkeit, so vermag eine auf einer Seite derselben wirkende magnetische Kraft keine magnetischen Effecte auf der andern Seite hervorzubringen.

Ebene unendliche Schalen, Scheiben.

656. Magnetisches Potential. Nach diesen allgemeinen Auseinandersetzungen entwickele ich speciell die Theorie der ebenen Schalen, oder Scheiben.

Das magnetische Potential einer Schale ist in einem Punkte x, y, z

$$1') \qquad \Omega = \iint \frac{1}{r^2} \varphi \cos\vartheta \, dS.$$

Nehmen wir die Ebene der Scheibe zur Ebene der x, y, bezeichnen die Coordinaten eines Punkts derselben mit x', y', 0, so wird $dS = dx'\,dy'$, $\cos\vartheta = z/r$, also

$$1\text{a}) \qquad \Omega = \iint \frac{z}{r^3} \varphi \, dx'\,dy',$$

φ ist eine Function von x', y', hängt aber — wenigstens wenn die Scheibe als unendlich dünn betrachtet wird — nicht von z ab, demnach ist auch

$$1\text{b}) \qquad \Omega = -\iint \frac{\partial \frac{\varphi}{r}}{\partial z} \, dx'\,dy'$$

oder indem man

$$V = \iint \frac{\varphi}{r}\, dx'\, dy'$$

setzt,

1 c) $$\Omega = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Die Grösse V ist das Potential der Scheibe, wenn man sich ihre Fläche mit einer Materie, deren Dichte von Punkt zu Punkt wie die Stromfunction der Scheibe variirt, belegt denkt.

Ersetzung der Scheibe durch zwei Belegungen. Ω ist auch das Potential einer complex-lamellaren Magnetscheibe, welche die Stromscheibe ersetzen sollte. Der unter 1 c) aufgestellte Ausdruck für diese Grösse zeigt aber, dass man sich in diesem Falle die magnetische Schale etwas einfacher constituirt denken kann.

Stellen wir uns nämlich vor, die Scheibe habe die Dicke c und sei auf ihrer positiven Seite $z = +c/2$ mit Materie, deren Flächendichte wie $+\varphi/c$, und auf der negativen Seite $z = -c/2$ mit Materie, deren Flächendichte wie $-\varphi/c$ variirt, belegt, so wird das Potential der bezüglichen Belegungen auf den Punkt x, y, z gleich

$$\frac{1}{c} V_{(z - c/2)}, \quad -\frac{1}{c} V_{(z + c/2)},$$

oder, indem man die V nach dem Taylorschen Satz entwickelt, gleich

$$-\frac{2}{c}\left(\frac{c}{2}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{1.2.3}\frac{c^3}{8}\frac{\partial^3 V}{\partial z^3} + \ldots\right).$$

Da die Dicke der Scheibe sehr klein sein sollte, reducirt sich dieses Potential auf

$$-\frac{\partial V}{\partial z},$$

übereinstimmend mit dem unter 1 c) für Ω gegebenen Ausdruck.

Der Radiusvector r ist bestimmt durch

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2.$$

Die Grösse V ändert also ihr Zeichen nicht, wenn $+z$ in $-z$ übergeht.

Dagegen schlägt das Potential Ω ins Entgegengesetzte um, wenn man den Punkt, auf den es sich bezieht, von der einen Seite der Scheibenfläche in die correspondirende Lage auf der andern Seite derselben versetzt.

Auf der positiven Seite der Scheibenfläche ist (Art. 78)

1_1) $$\Omega_+ = +2\pi\varphi,$$

auf der negativen

1_2) $$\Omega_- = -2\pi\varphi.$$

Wird die Scheibe als Magnetscheibe angesehen, so variirt das Potential Ω innerhalb derselben continuirlich von $-2\pi\varphi$ bis $+2\pi\varphi$.

Gilt die Scheibe dagegen als Stromscheibe, so besitzt die innerhalb derselben ausgeübte magnetische Kraft kein magnetisches Potential. Doch hat die magnetische Kraft trotzdem daselbst einen ganz bestimmten Wert.

657. Magnetische Kraft. Die drei Componenten der magnetischen Kraft sind für jeden ausserhalb der Scheibe befindlichen Punkt x, y, z

$$2)\qquad \begin{aligned} \alpha &= -\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}, \\ \beta &= -\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}, \\ \gamma &= -\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Die Kraft γ wirkt normal zur Scheibe, die Kräfte α und β greifen den betreffenden Punkt tangential zu derselben an.

Beim Durchgang durch die Scheibe wechseln φ und z ihre Zeichen, x und y behalten dieselben.

Sind also $\alpha_+, \beta_+, \gamma_+$ die Kraftcomponenten, wenn der Punkt x, y, z, den sie angreifen, auf der positiven; $\alpha_-, \beta_-, \gamma_-$ die, wenn der Punkt auf der negativen Fläche der Scheibe liegt, so haben wir

$$2_1)\qquad \alpha_+ = -2\pi\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \beta_+ = -2\pi\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \gamma_+ = +\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

$$2_2)\qquad \alpha_- = +2\pi\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \beta_- = +2\pi\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \gamma_- = +\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

$$(z = 0).$$

Innerhalb der Scheibe ändern α und β ihre Werte continuirlich von α_+, β_+ bis bezüglich α_-, β_-.

Vector-Potential der Stromscheibe. Die Componenten F, G, H des Vector-Potentials der Scheibe folgen den Gleichungen

$$3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} &= -\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} &= -\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Offenbar genügt man denselben, wenn man

$$4)\qquad F = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad G = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad H = 0$$

setzt.

Dieselben Werte lassen sich auch durch directe Integration aus den unter M_1) in Art. 617 für die Componenten des Vector-Potentials aufgestellten Definitionen eruiren.

Darnach sollte z. B.

$$F = \iint \frac{u}{r}\, dx'\, dy'$$

sein. Nach der Definition der Stromfunction haben wir $u = \partial\varphi/\partial y'$, also

$$F = \iint \frac{1}{r}\, \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\, dx'\, dy'$$

und nach partieller Integration

$$F = \int \frac{\varphi}{r}\, dx' - \iint \varphi\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\, dx'\, dy'.$$

Da die Integrationen die ganze unendliche Ebene umfassen, so bleibt

$$F = -\iint \varphi\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\, dx'\, dy'.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}.$$

Wir haben also, weil φ nicht von x und y abhängt,

$$F = \frac{\partial}{\partial y} \iint \frac{\varphi}{r}\, dx'\, dy' = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Aehnlich können die andern Componenten abgeleitet werden.

Vector-Potential des electromagnetischen Feldes. Die Grössen F, G, H sind die Componenten des Vector-Potentials der Scheibe. Befindet sich ausserhalb dieser noch ein electrisches oder magnetisches System, dessen magnetisches Potential gleich Ω' ist, so darf man

$$V' = -\int \Omega'\, dz \tag{1'}$$

setzen, V' ist aber hier nur eine Abkürzung für das angegebene Integral und im allgemeinen nicht als Potential einer einfachen Belegung darstellbar.

Wenn dann F', G', H' die Componenten des Vector-Potentials des betreffenden Systems in dem Punkte x, y, z sind, so hat man

$$F' = \frac{\partial V'}{\partial y}, \quad G' = -\frac{\partial V'}{\partial x}, \quad H' = 0. \tag{4'}$$

658. Locale electromotorische Kraft bei festgelegter Scheibe. Die Componenten P, Q, R der electromotorischen Kraft, die eine Stelle der Scheibe im allgemeinsten Fall angreift, sind durch das Gleichungssystem B) in Art. 598 gegeben.

Macht man die vereinfachende Voraussetzung, dass die Scheibe unverrückbar auf ihrer Stelle bleibt, so hat man auf der Scheibe

$$
6)\quad
\begin{aligned}
P &= -\frac{\partial(F+F')}{\partial t} - \frac{\partial\Psi}{\partial x'} = -\frac{\partial^2(V+V')}{\partial y'\partial t} - \frac{\partial\Psi}{\partial x'},\\
Q &= -\frac{\partial(G+G')}{\partial t} - \frac{\partial\Psi}{\partial y'} = +\frac{\partial^2(V+V')}{\partial x'\partial t} - \frac{\partial\Psi}{\partial y'}.
\end{aligned}
$$

Ich nehme an, dass die Scheibe dem Strom überall denselben Widerstand σ entgegensetzt, und habe nach dem Ohmschen Gesetz für die Stromcomponenten u, v die Gleichungen

$$
7\,a)\quad P = \sigma u, \quad Q = \sigma v,
$$

oder, weil zufolge der Definition der Stromfunction

$$
u = \frac{\partial\varphi}{\partial y'}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}
$$

und nach 1_1)

$$
2\pi\varphi = -\frac{\partial V}{\partial z'}
$$

ist,

$$
7\,b)\quad P = -\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial z'}, \quad Q = -\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^2 V}{\partial x'\partial z'}.
$$

Durch Vergleichung mit den Formeln 6) erhält man

$$
8)\quad
\begin{aligned}
\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial z'} &= \frac{\partial^2}{\partial y'\partial t}(V+V') + \frac{\partial\Psi}{\partial x'},\\
\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^2 V}{\partial x'\partial z'} &= \frac{\partial^2}{\partial x'\partial t}(V+V') - \frac{\partial\Psi}{\partial y'}.
\end{aligned}
$$

Die Coordinaten x', y' beziehen sich auf Punkte der positiven Fläche der Scheibe.

Ich differenzire die erste Gleichung nach x', die zweite nach y', und addire die Resultate, dann wird

$$
9')\quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y'^2} = 0.
$$

Bei einer unendlich grossen Scheibe ist Ψ an die Bedingung gebunden, dass es in der Unendlichkeit verschwindet, ausserdem muss es auf der Scheibe

überall endlich sein und stetig variiren. Die einzig mögliche Lösung jener Gleichung ist daher für diesen Fall

$$\Psi = 0. \tag{9}$$

Auf einer unendlich grossen Scheibe von überall gleichem Widerstand können also durch Induction keine electrischen Potentialdifferenzen entstehen, das Gefälle des electrischen Potentials bleibt daselbst stets gleich Null, wenn es zu Anfang gleich Null gewesen ist.

Nach dieser Vereinfachung wird aus den Gleichungen unter 8), wenn man sie nach y' bezüglich x' integrirt,

$$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial z'} - \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial V'}{\partial t} = f(z', t). \tag{10}$$

Es kommt uns hier vor allen Dingen auf die Werte der inducirten Stromcomponenten u, v an, und da diese durch Differentialquotienten von $\partial V / \partial z'$ nach x' und y' definirt sind, dürfen wir die willkürliche Function $f(z', t)$ als überflüssig fortlassen.

Ich setze ferner

$$\frac{\sigma}{2\pi} = R$$

und erhalte

$$R\frac{\partial V}{\partial z'} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V'}{\partial t}. \tag{10_1}$$

659. Electromagnetische Wirkung ablaufender Ströme. Ich wende diese Formel auf den speciellen Fall an, dass eine unendlich grosse Scheibe erst durch Induction mit Strömen versehen und dann nach Aufhebung des electromagnetischen Feldes sich selbst überlassen wird. Die Ströme, die die Scheibenfläche durchfliessen, werden dann von keinen äussern Agentien gestört, sie unterliegen nur den Einwirkungen, die von ihren gegenseitigen Inductionen herrühren. Ausserdem verlieren sie allmälig infolge des Widerstandes, den ihnen die Substanz der Scheibe entgegensetzt, ihre Energie.

Die Function V' ist in diesem Falle gleich Null, die Funktion V genügt also der Gleichung

$$R\frac{\partial V}{\partial z'} = \frac{\partial V}{\partial t}, \tag{10_2}$$

woraus folgt

$$V = f(x', y', z' + Rt). \tag{11_1}$$

Nun beziehen sich zwar die Gleichungen für die electromotorische Kraft auf Punkte der Scheibe selbst, für welche also $z' = 0$ oder doch äusserst klein ist. Die unter 11_1) für die Function V gegebene Lösung gilt aber

auch ganz allgemein für jeden Punkt des Raumes, denn als das Potential einer Belegung variirt dieselbe continuirlich. Wir können daher schreiben

$$11_2) \qquad V = f[x, y, (z + Rt)].$$

Die Funktion f ist, insoweit sie der Differentialgleichung 10_2) zu genügen hat, ganz willkürlich und die Gleichung 11_2) sagt aus, dass V für einen Punkt x, y, z des Raumes zur Zeit t denselben Wert wie für einen Punkt x, y, $z + Rt$ zur Zeit $t = 0$ besitzt.

Die magnetische Kraftwirkung des in der unendlichen Scheibe zur Zeit $t = 0$ erregten und dann sich selbst überlassenen Stromsystems auf einen auf der positiven Seite der Scheibe gelegenen Punkt nimmt also infolge des Abfallens der Ströme mit der Zeit in demselben Maasse ab, wie wenn die Ströme der Scheibe constant auf ihrer ursprünglichen Stärke erhalten blieben, die Scheibe sich aber mit gleichbleibender Geschwindigkeit R normal zu ihrer Fläche von dem betreffenden Punkte entfernte.

660. Instantane Wirkung inducirter Ströme. Die allgemeine Gleichung 10_1) lässt sich auch schreiben

$$R\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial (V + V')}{\partial t}.$$

Integrirt man nach t, so ergiebt sich daraus

$$11_3) \qquad (V + V')_t - (V + V')_0 = \int_0^t R\frac{\partial V}{\partial z}\,dt.$$

Ich setze voraus, dass ursprünglich V und V' beide gleich Null sind, dass also zur Zeit $t = 0$ weder ein magnetisches Feld existirt, noch die Scheibe electromagnetische Wirkungen ausübt, dass dann plötzlich durch Electromagnete oder Ströme in der Umgebung der Schale ein electromagnetisches Feld hervorgebracht wird, welches zur Entstehung der Function V' Veranlassung giebt. Das plötzlich geschaffene Feld inducirt die Scheibe, und da für sehr kleine Zeitintervalle

$$\int_0^{dt} R\frac{\partial V}{\partial z}\,dt = 0$$

ist, so folgt, dass unmittelbar nach Entstehung der Inductionsströme für jeden Punkt der Scheibe

$$V = -V'$$

wird.

Durch das plötzliche Schaffen des Feldes wird also in der Scheibe ein System von Strömen inducirt, dessen electromagnetische Wirkung die entsprechende Wirkung des Feldes an allen Punkten der Scheibe genau neutralisirt.

Auf der Scheibe und, da dieselbe unendlich gross sein sollte, in dem ganzen durch sie vom electromagnetischen Felde abgetrennten Teile des Raumes bringen so die plötzlich inducirten Ströme zu Anfang genau dieselbe, aber gegensinnige electromagnetische Wirkung wie die Agentien des electromagnetischen Feldes hervor.

Electromagnetische Bilder. Indem wir auf analoge Erscheinungen auf dem Gebiete der Electrostatik recurriren, können wir also sagen, dass die electromagnetische Wirkung der in der Schale inducirten Ströme der electromagnetischen Wirkung des *Bildes* vom System der das electromagnetische Feld producirenden Agentien äquivalent ist. Die Lage dieses Bildes fällt mit der des Systems zusammen, die einzelnen Agentien desselben, als Magnete, Ströme u. s. f. sind aber denen des Systems entgegengesetzt.

Ich nenne dieses Bild das *Negative Electromagnetische Bild* des das Feld producirenden Systems von Agentien. Das *Positive Bild* desselben ist dann ein auf der andern Seite der Scheibe genau so wie das System selbst gelegene System von Agentien desselben Zeichens wie die correspondirenden Agentien des abgebildeten Systems. Linien, welche zwei entsprechende Teile des Systems und seines positiven Bildes verbinden, werden von der Scheibe senkrecht getroffen und halbirt.

Auf der Seite der Scheibe, wo das ursprüngliche System von Agentien liegt, wirken die in ihr inducirten Ströme genau so wie das positive Bild des Systems, auf der Seite, wo dieses System sich nicht befindet, wirken die genannten Ströme genau so wie sein negatives Bild.

Daher kann man die Wirkung der Ströme für jeden Punkt des Raumes durch die der bezüglichen Bilder des die Ströme durch seine plötzliche Entstehung inducirenden Systems ersetzen. Auf dem von der positiven Seite der Scheibe begrenzten Gebiet ist es das positive, auf dem von der negativen Seite derselben begrenzten ist es das negative Bild des Systems, welches dieselbe electromagnetische Wirkung wie die Ströme hervorruft.

661. Was wir eben von der electromagnetischen Aequivalenz der inducirten Ströme mit der der bezüglichen Bilder des inducirenden Systems gesagt haben, gilt allgemein nur für die Zeit unmittelbar nach Entstehung der Ströme, nicht für spätere Momente.

Wenn aber die Substanz der Scheibe eine unendlich grosse Leitungsfähigkeit besitzt, ist $R = 0$, hier verschwindet also das Glied rechter Hand in Gleichung 11_2) nicht blos beim Entstehen der Ströme, sondern überhaupt zu jeder Zeit.

Demnach wird bei so beschaffenen Scheiben die electromagnetische Wirkung der inducirten Ströme zu jeder Zeit durch die der bezüglichen Bilder des die Ströme inducirenden Systems ersetzt.

Bei Scheiben, wie sie in der Natur vorkommen, wird man natürlich nie $R = 0$ setzen dürfen, hier gilt also auch die Theorie der electromagnetischen Bilder nur für den Moment, der der plötzlichen Schaffung der inducirenden Agentien nachfolgt. In diesem Momente entstehen die inducirten Ströme in

der Scheibe, nachher fallen sie sofort wieder ab. Combinirt man die Resultate der beiden letzten Artikel mit den im Art. 659 eruirten, so sieht man, dass das Abfallen der Ströme auf die electromagnetische Action derselben genau dieselbe Wirkung hervorbringt, wie wenn die bezüglichen Bilder des inducirenden Systems sich mit constanter Geschwindigkeit R von der Schale und normal zu derselben fortbewegten.

662. Allgemeine Induction. Ich gehe jetzt zur Untersuchung der in einer Scheibe durch irgend welche Variation der Stärke oder Lage irgend eines electromagnetischen Systems M inducirten Ströme über.

Sei V wie bisher die Function, welche gemäss den Gleichungen 1') und 4') des Art. 657 die directe Wirkung des Systems von Agentien bestimmt.

Die Aenderung, die das System M während der Zeit δt etwa erfährt, können wir symbolisch durch $(dM/dt)\,\delta t$ darstellen, und ihre Wirkung wie die eines neu eingeführten entsprechenden electromagnetischen Systems betrachten. Die Grösse $(dV'/dt)\,\delta t$ steht dann zu diesem Systemincrement in ganz demselben Verhältnis wie V' zu M.

Entsteht nun zur Zeit t ein positives Bild des Systems $(dM/dt)\,\delta t$ auf der negativen Seite der Scheibe, so ist die instantane electromagnetische Wirkung dieses Bildes auf einen auf der positiven Seite der Scheibe gelegenen Punkt genau so gross, wie die instantane electromagnetische Wirkung der durch die Aenderung von M in $M + (dM/dt)\,\delta t$ in der Scheibe inducirten Ströme unmittelbar nach dieser Aenderung. Erteilen wir noch dem positiven Bilde von $(dM/dt)\,\delta t$ eine von der Scheibe fortgerichtete in Richtung der negativen z Axe mit der constant bleibenden Geschwindigkeit R vor sich gehende Bewegung, so wird dieses Bild zu jeder Zeit die inducirten Ströme vertreten.

Ich setze jetzt voraus, dass in jedem der aufeinanderfolgenden Zeitelemente ein Bild der gerade vor sich gehenden Veränderung von M auftritt, und dass ferner, sowie ein solches Bild entstanden ist, dasselbe sofort mit constanter Geschwindigkeit R von der Scheibe fortbewegt wird. Man erhält so einen ganzen Zug von Bildern mit immer neu entstehenden Gliedern, der sich wie ein starrer Körper mit sich gleichbleibender Geschwindigkeit von der Scheibe fortbewegt und durch seine Lage und Länge zu einer bestimmten Zeit die electromagnetische Wirkung der bis zu dieser Zeit in der Scheibe inducirten Ströme ersetzt.

663. Sei zur Zeit $t-\tau$ der Wert der dem inducirenden System angehörenden Function V' gleich V'_τ und der Wert der der inducirten Schale angehörenden Function V geich V_τ. Ich beziehe aber V'_τ auf den Punkt $x, y, -(z+R\tau)$ und V_τ auf den Punkt $x, y, z+R\tau$.

Wir haben dann durch Differentiation

$$\frac{\partial V_\tau}{\partial \tau} = R\frac{\partial V_\tau}{\partial z} - \frac{\partial V_\tau}{\partial t}.$$

Da aber V_τ für Punkte $x, y, +z$ ebenso gross wie für Punkte $x, y, -z$ ist, so haben wir auch zufolge der Gleichung 10_1)

$$\frac{\partial V_\tau}{\partial t} + \frac{\partial V'_\tau}{\partial t} = R \frac{\partial V}{\partial z},$$

somit wird

$$\frac{\partial V_\tau}{\partial \tau} = \frac{\partial V'_\tau}{\partial t}.$$

Integrirt man von τ gleich 0 bis zu $\tau = \infty$, so resultirt

$$(V)_{x,y,z} - (V)_{x,y,\infty} = -\int_0^\infty \frac{\partial V'_\tau}{\partial t} d\tau.$$

Als das Potential einer Belegung verschwindet aber V in der Unendlichkeit, daher wird für irgend einen Punkt x, y, z zur Zeit t die Function

12) $$V = -\int_0^\infty \frac{\partial V'_\tau}{\partial t} d\tau = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty V'_\tau d\tau;$$

wo V'_τ den Wert der das inducirende System charakterisirenden Function V' zur Zeit $t - \tau$ und im Punkte $x, y, -(z + R\tau)$ angiebt.

V ist auch die dem Zuge der Bilder, welche die Scheibe von den Incrementen von M entwirft, zur Zeit t im Punkte x, y, z angehörende Function.*)

664. Induction durch einen seit unendlicher Zeit gleichförmig bewegten magnetischen Einheitspol. Zur Erläuterung der vorangehenden Betrachtungen behandele ich den Fall, wo ein magnetischer Einheitspol dadurch in einer Scheibe Ströme inducirt, dass er sich in gerader Bahn mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewegt.

Es seien die Coordinaten des Pols zur Zeit t

$$\xi = \mathfrak{u}t, \quad \eta = 0, \quad \zeta = c + \mathfrak{w}t.$$

Zur Zeit $t - \tau$ hat dann das positive Bild des Pols die Coordinaten

$$\xi_\tau = \mathfrak{u}(t - \tau), \quad \eta_\tau = 0, \quad \zeta_\tau = -(c + \mathfrak{w}(t - \tau) + R\tau).$$

Das magnetische Potential eines Einheitspols ist in der Entfernung r

$$\Omega' = \frac{1}{r}.$$

*) Die weitere Ausführung dieser Maxwellschen Theorie der electromagnetischen Bilder findet der Leser in Mascart und Joubert, *Leçons sur l' Electricité et le Magnétisme* T. I., 634 ff.

Zufolge der unter 1') für V' gegebenen Definition ist also

$$V' = -\int \frac{1}{r}\, dz\,,$$

also nach Gleichung 12)

$$V_{x,y,z} = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \left(\int \frac{1}{r_\tau} dz\right) d\tau\,;$$

Da das magnetische Potential Ω der Scheibe im Punkte x, y, z den Wert

$$\Omega = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

besitzt, so haben wir auch

$$\Omega = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \frac{d\tau}{r_\tau}.$$

Darin ist, entsprechend der Definition von V'_τ, r der Abstand des positiven Bildes $\xi_\tau, \eta_\tau, \zeta_\tau$ des Pols von dem Punkte x, y, z zur Zeit $t - \tau$, also nach unserer Festsetzung

$$r_\tau^2 = \big(x - \mathfrak{u}\,(t - \tau)\big)^2 + y^2 + \big(z + c + \mathfrak{w}\,(t - \tau) + R\tau\big)^2.$$

Ordnet man nach Potenzen von τ, so wird

$$r_\tau^2 = (x - \mathfrak{u}t)^2 + y^2 + (z + c + \mathfrak{w}t)^2$$
$$+ 2\tau\big[\mathfrak{u}\,(x - \mathfrak{u}t) - (\mathfrak{w} - R)\,(z + c + \mathfrak{w}t)\big] + \tau^2\big[\mathfrak{u}^2 + (\mathfrak{w} - R)^2\big]\,.$$

Ich setze

$$r_{\tau=0}^2 = r^2 = (x - \mathfrak{u}t)^2 + y^2 + (z + c + \mathfrak{w}t)^2,$$
$$Q^2 = \mathfrak{u}^2 + (\mathfrak{w} - R)^2$$

und erhalte

$$r_\tau^2 = r^2 + 2\tau\,\big[\mathfrak{u}\,(x - \mathfrak{u}t) - (\mathfrak{w} - R)\,(z + c + \mathfrak{w}t)\big] + \tau^2 Q^2.$$

Hiernach ergiebt eine directe Integration

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{r_\tau} = -\frac{1}{Q}\,\log\Big\{Qr + \mathfrak{u}\,(x - \mathfrak{u}t) + (R - \mathfrak{w})\,(z + c + \mathfrak{w}t)\Big\} + C.$$

Die Grösse C ist eine unendlich grosse Constante, insofern bleibt also das Integral unbestimmt; da wir aber nur die Differentialquotienten desselben nach t brauchen, dürfen wir diese Constante ausser Acht lassen. Wir erhalten so, indem wir den obigen Integralausdruck nach t differenziren und den

gerade betrachteten Zeitpunkt als Anfang der Zeitrechnung t ansehen, für das magnetische Potential der in der Scheibe cursirenden Ströme auf den Punkt x, y, z

$$\Omega = \frac{1}{Q} \frac{Q \frac{\mathfrak{w}(z+c) - \mathfrak{u}x}{r} - \mathfrak{u}^2 - \mathfrak{w}^2 + \mathfrak{w}R}{Qr + \mathfrak{u}x + (R - \mathfrak{w})(z+c)}.$$

Darin sind $\mathfrak{u}, 0, \mathfrak{w}$ die Geschwindigkeitscomponenten, $0, 0, c$ die Coordinaten des Pols zur Zeit $t = 0$. Ferner haben wir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+c)^2}$$

als Abstand des positiven Bildes des Pols von dem betrachteten Punkt zur Zeit $t = 0$, $r = 2c$ als Abstand des Pols von seinem Bilde zu derselben Zeit.

Die magnetischen Kraftcomponenten der Schale ergeben sich durch Differentiation von Ω nach x, y, z.

Speciell erhält man für die Componenten der von der inducirten Scheibe auf den magnetischen Pol selbst ausgeübten Kraft

$$X = -\frac{1}{4c^2} \frac{\mathfrak{u}}{Q + R - \mathfrak{w}} \left\{ 1 + \frac{\mathfrak{w}}{Q} - \frac{\mathfrak{u}^2}{Q(Q + R - \mathfrak{w})} \right\},$$

$$Y = 0,$$

$$Z = -\frac{1}{4c^2} \left\{ \frac{\mathfrak{w}}{Q} - \frac{\mathfrak{u}^2}{Q(Q + R - \mathfrak{w})} \right\}.$$

665. Da die Rechnung auf der Voraussetzung beruht, dass der Pol zur betrachteten Zeit $t = 0$ schon eine unendlich lange Zeit sich bewegt hat, so darf man $\mathfrak{w}$, die Geschwindigkeit, die er in Richtung der z Axe besitzt, nicht als positive Grösse ansehen, weil der Pol sonst schon vor dieser Zeit durch die Scheibe hätte gehen müssen.

Läuft erstens die Bewegungsrichtung des Pols senkrecht zur Scheibe, so wird $\mathfrak{u} = 0$, also

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -\frac{1}{4c^2} \frac{\mathfrak{w}}{R - \mathfrak{w}}.$$

Da $\mathfrak{w}$ eine negative Grösse sein muss, so folgt, dass die inducirte Scheibe den Pol, während er sich ihr nähert, abstösst.

Zweitens lasse ich den Pol sich parallel zur Scheibe verschieben. Es ist dann $\mathfrak{w} = 0$, $Q^2 = \mathfrak{u}^2 + R^2$, also haben wir

$$X = -\frac{1}{4c^2} \frac{\mathfrak{u}R}{Q(Q+R)}, \quad Y = 0, \quad Z = \frac{1}{4c^2} \frac{\mathfrak{u}^2}{Q(Q+R)}.$$

Die x Componente zeigt eine retardirende Kraft, die den Pol aus der Richtung seiner Bewegung in die entgegengesetzte Richtung zu ziehen sucht. Sie erreicht ihren grössten Betrag, wenn die Geschwindigkeit des Pols das 1,27fache des Widerstandes R der Scheibe wird, und verschwindet sowohl

wenn die Scheibe einen unendlich grossen, als auch wenn sie einen unendlich kleinen Widerstand besitzt.

Die z Componente repräsentirt eine Kraft, die den Pol von der Scheibe fortzutreiben strebt, sie wächst mit der Geschwindigkeit des Pols an und erreicht, wenn der Pol sich unendlich schnell bewegt, ihren höchsten Betrag $1/4c^2$, den sie übrigens auch besitzt, wenn die Scheibe einen unendlich kleinen Widerstand aufweist.

666. Induction durch einen krummlinig bewegten magnetischen Einheitspol. Complicirter gestaltet sich die Rechnung, wenn der Pol sich nicht mehr in geradliniger, sondern in krummliniger Bahn gegen die Scheibe bewegt. Doch ist auch hier die Wirkung der in der Scheibe durch den Pol inducirten Ströme äquivalent der des Bilderzuges des Pols. Im Falle, dass der Weg des Pols der Scheibe parallel liegt, wirkt jeder Teil des Zuges bei seiner Entstehung retardirend, und wenn er entstanden ist, auch accelerirend auf die Bewegung des Pols. Von dem ihm zu einer bestimmten Zeit nächsten Teile des Zuges erfährt also der Pol eine Anziehung. Von dem unmittelbar sich anschliessenden Teil wird er so beeinflusst, wie von einem Magnet, der ihm seinen ihm gleichnamigen Pol zukehrt und seine Axe nach der Richtung kehrt, nach welcher der Pol einige Zeit vorher eilte. Die von diesem Teile auf den Pol zu einer bestimmten Zeit ausgeübte Kraft setzt sich also aus einer Repulsion nach der Richtung, die der Pol gerade besitzt, und aus einer Attraction nach der Richtung, die er vor einiger Zeit besass, zusammen. Die Attraction zieht dann den Pol in Richtung der zeitlichen Bewegung zurück und drängt ihn zugleich nach der concaven Seite seiner Bahn hin.

667. Induction in einer begrenzten Scheibe. Ganz ungelöst lässt unsere Untersuchung den Fall, wo die Scheibe Unterbrechungen ihrer Substanz erleidet, oder wo sie begrenzt ist, wo also das System der inducirten Ströme sich nicht vollständig auszubilden vermag. Doch bemerkt man leicht, dass wenn der Pol sich der Kante der Scheibe parallel bewegt, er die dieser Kante nächstgelegenen Ströme zu schwächen sucht. Dem entsprechend werden diese Ströme ihn auch mit einer geringern Kraft, als die andern von der Kante entfernteren Ströme angreifen. Einerseits fällt also die retardirende Kraft dieser Ströme kleiner als die der andern aus, andererseits ist aber die auf den Pol wirkende Repulsion auf der der Kante zugekehrten Seite kleiner als auf der von der Kante abgewendeten. Im ganzen wird sich also der Pol, unter der Wirkung der durch seine Bewegung inducirten Ströme, nach der Kante der Scheibe hinzubewegen suchen.

Theorie der Aragoschen rotirenden Scheibe.

668. Im Jahre 1826 entdeckte Arago *), dass eine rotirende metallische Scheibe einen in ihrer Nähe befindlichen Magnet, selbst wenn ihre Substanz

*) *Annales de Chimie et de Physique* 1826.

an sich gar keine magnetischen Eigenschaften besitzt, in ihre Bewegung mit hineinzuziehen sucht.

Man schrieb diese merkwürdige Erscheinung der Wirkung einer in besonderer Weise in der Scheibe durch ihre Rotation inducirten Magnetisirung zu, bis Faraday sie durch die Action der electrischen Ströme, die in der Scheibe, weil sie sich in einem vom Magnete hervorgerufenen magnetischen Felde bewegte, inducirt werden mussten, erklärte.

Bei der Ableitung der Verteilung dieser inducirten Ströme und ihrer Wirkung auf den Magnet könnten wir von den in den vorhergehenden Artikeln geführten Untersuchungen ausgehen. Dort war freilich angenommen worden, dass die Scheibe fest ist und die Magnete sich bewegen, man könnte sich aber dadurch helfen, dass man die Coordinaten der Scheibe auf ein bewegliches Axensystem bezöge und nach den in Art. 600 gegebenen Anleitungen die Gleichungen des electromagnetischen Feldes für das bewegliche Axensystem umformte.

Da jedoch unser jetziges Problem von ganz besonderer Wichtigkeit ist, werde ich es direct angreifen und zu lösen suchen. Doch muss die vereinfachende Annahme gemacht werden, dass beide Pole des die Scheibe inducirenden Magnets so weit von der Kante der Scheibe abstehen, dass diese für den Magnet als unendlich gross betrachtet werden darf.

Ich verlege die xy Ebene in die Ebene der Scheibe und die z Axe in die Rotationsaxe dieser. Bei Vernachlässigung der Dicke der Scheibe erhält man, weil, wenn der Zustand der Scheibe stationär geworden ist, sowohl dz/dt als $\partial F/\partial t$ und $\partial G/\partial t$ sich auf Null reduciren, für die Componenten der an der Stelle x, y der Scheibe infolge ihrer Rotation vom Magnete inducirten electromotorischen Kraft

$$
1) \quad \begin{aligned} P &= \quad c\frac{dy}{dt} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ Q &= -c\frac{dx}{dt} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \end{aligned}
$$

Da es sich um Punkte handelt, die ausserhalb der Magnete gelegen sind, so fällt die z Componente c der magnetischen Induction der Magnete und der Scheibe mit der senkrecht zur Scheibe wirkenden z Componente γ der magnetischen Kraft der Magnete und der Scheibe zusammen. Ferner ist auch, falls die Scheibe überall denselben electrischen Widerstand σ aufweist,

$$
2a) \quad \sigma u = P, \; \sigma v = Q,
$$

wo u, v die Componenten der an der Stelle x, y der Scheibe inducirten Strömung angeben, also wird

$$
2b) \quad \begin{aligned} \sigma u &= \quad \gamma\frac{dy}{dt} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \sigma v &= -\gamma\frac{dx}{dt} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \end{aligned}
$$

Nun haben wir, wenn die Stromfunction der Scheibe durch φ bezeichnet wird,

3 a)
$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

somit

3 b)
$$\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \gamma \frac{dy}{dt} - \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$
$$\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Ich lasse die Scheibe sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z Axe drehen, dann wird

$$\frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dx}{dt} = -\omega y$$

und die Gleichungen unter 3 b) gehen über in

3 c)
$$\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \gamma \omega x - \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$
$$\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\gamma \omega y + \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Indem man zuerst zur ersten mit y multiplicirten Gleichung die zweite mit x multiplicirte addirt und dann von der ersten mit x multiplicirten die zweite mit y multiplicirte subtrahirt, erhält man

3 d)
$$\sigma\left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$
$$\sigma\left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = -x \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \gamma \omega (x^2 + y^2).$$

Ich führe für den Augenblick für x, y Polarcoordinaten r, ϑ ein, setze also

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta.$$

Die Gleichungen 3 d) gehen dann über in

3 e)
$$r \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta},$$
$$\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \gamma \omega r^2 - r \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass φ und Ψ sich beide durch eine und dieselbe Function χ von r und ϑ müssen ausdrücken lassen, denn sie wird identisch erfüllt, wenn man

4)
$$\varphi = \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta},$$
$$\Psi = \sigma r \frac{\partial \chi}{\partial r}$$

setzt. Die zweite Gleichung lehrt dann, dass die Function χ der Beziehung

5a)
$$\sigma \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} + r \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \right] = \gamma \omega r^2$$

gehorchen muss.

Nach Division durch r^2 und Wiedereinführung der rechtwinkligen Coordinaten x, y geht obige Gleichung über in

5b)
$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{\omega}{\sigma} \gamma.$$

Das ist die Hauptgleichung unseres Problems; sie drückt eine Relation zwischen der Function χ und der senkrecht zur Scheibe wirkenden Kraftcomponente des inducirenden Magnets und der inducirten Scheibe aus.

Ich bezeichne mit V das Potential, welches unsere Scheibe auf irgend einen ihrer Punkte ausübt, wenn sie mit einer Materie, deren Flächendichte von Punkt zu Punkt der Scheibe wie die Function χ variirt, belegt ist. Auf der positiven Seite der Scheibe ist dann

6)
$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi \chi.$$

Differenzirt man diese Gleichung zweimal nach x, dann zweimal nach y und addirt die Resultate, so wird

5c)
$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right).$$

Diese Gleichung gilt zwar nur für Punkte, die unmittelbar auf der Scheibe selbst gelegen sind, da aber χ gar nicht von z abhängt, so wird die Substitution eines Punktes x, y, z an Stelle eines Punktes $x, y, 0$ denselben Effect wie eine senkrecht zur Scheibe vor sich gehende Verschiebung des Coordinatensystems um die Strecke z haben. Man darf daher die Gleichung 5c) auf den ganzen Raum ausdehnen. Wie nahe nun ein Punkt auch der Scheibe kommen möge, immer ist, so lange er nicht direct der Substanz derselben selbst angehört, nach der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

also wird

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^3 V}{\partial z^3}.$$

Die Gleichung 5b) transformirt sich daher in

7a) $$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^3 V}{\partial z^3} = \omega\gamma.$$

V ist also eine Function, welche alle Eigenschaften eines Potentials hat, also namentlich im ganzen Raume der Laplaceschen Gleichung genügt, und die auf der Oberfläche der Scheibe der durch 7a) ausgedrückten Beziehung gehorcht.

Da nach 6) χ als eine der Scheibe zugehörige Verteilung von dem Potential V angesehen werden darf, so wird man φ, oder nach 4) $\partial\chi/\partial\vartheta$, als Verteilung vom Potential $\partial V/\partial\vartheta$ betrachten müssen.

Auf der Scheibe wird also

8) $$-2\pi\varphi = \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial\vartheta}.$$

Nun ist aber nach Art. 656 das magnetische Potential, welches die inducirten Ströme der Scheibe auf der positiven Seite derselben hervorrufen,

$$\Omega_1 = -2\pi\varphi,$$

wir haben also

$$\Omega_1 = -\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\,\partial z}.$$

Normal zur Scheibe wirken daher die inducirten Ströme mit einer Kraft

9) $$\gamma_1 = -\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{\partial^3 V}{\partial\vartheta\,\partial z^2}.$$

Das Problem ist insofern noch nicht gelöst, als die Bedingungsgleichung, die V zu erfüllen hat, noch die unbekannte Grösse γ in sich schliesst.

Nennt man aber γ_2 die als gegeben zu betrachtende, senkrecht zur Scheibe wirkende Kraftcomponente der inducirenden Magnete, so ist

10) $$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial^3 V}{\partial\vartheta\,\partial z^2} + \gamma_2.$$

Die Gleichung 7a) wird also

7b) $$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^3 V}{\partial z^3} = \omega\left(\gamma_2 + \frac{\partial^3 V}{\partial\vartheta\,\partial z^2}\right).$$

Ich setze das Potential der inducirenden Magnete

11) $$\Omega_2 = -\frac{\partial V'}{\partial z}$$

und erhalte

$$\gamma_2 = \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2},$$

also

7c) $$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{\partial^3 V}{\partial z^3} - \omega \frac{\partial^3 V}{\partial \vartheta \partial z^2} = \omega \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2}.$$

Nach zweifacher Integration nach z wird, wenn man wieder $R = \sigma/2\pi$ setzt,

$$R\frac{\partial V}{\partial z} - \omega \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \omega V'.$$

V und V' sind Functionen von r, z und ϑ. Für die beiden letztern Coordinaten führe ich zwei neue Variabeln ξ und ζ durch die Definitionen

12) $$\xi = z + \frac{R}{\omega}\vartheta, \quad \zeta = z - \frac{R}{\omega}\vartheta$$

ein.

Der auf der linken Seite der letzten Gleichung stehende Ausdruck wird dann zum vollständigen Differentialquotienten, und eine Integration nach ζ ergiebt

13) $$V = \int \frac{\omega}{R} V' d\zeta.$$

Ist Ω_2 das magnetische Potential der inducirenden Magnete, also auch V' als Function von ξ, ζ, r gegeben, so lässt sich V durch Quadraturen berechnen, damit ist unsere Aufgabe gelöst.

669. Die letzte im vorigen Artikel abgeleitete Gleichung lehrt im Verein mit den Auseinandersetzungen des Art. 662 dass auch in dem jetzigen Problem die magnetische Wirkung der in der Scheibe inducirten Ströme durch die eines Zuges von Bildern des inducirenden Magnetsystems ersetzt werden kann. Hier ist aber das Wort Zug nicht auf die Zeit, sondern auf den Raum zu beziehen. Ferner lehren die Gleichungen 12), dass die Bilder des Magnetsystems im Raume schneckenförmig angeordnet sind.

In dem speciellen Fall, wo das Magnetsystem nur von einem Einheitspol gebildet wird, windet sich die von den Bildern des Pols gebildete Schneckenlinie auf einem Cylinder, dessen Axe mit der Rotationsaxe der Scheibe zusammenfällt, und dessen Mantelfläche durch den Pol hindurchgeht. Sie beginnt da, wo das optische Bild des Pols mit Bezug auf die Scheibe liegt, und steigt mit der Ganghöhe $2\pi R/\omega$ auf dem Cylinder empor.

Dieser schraubenförmige Zug von Bildern ersetzt die magnetische Wirkung der durch den Einheitspol in der Scheibe inducirten Ströme, wenn man ihn seiner ganzen Ausdehnung nach tangential zum Cylinder und normal zur Axe so magnetisirt, dass das magnetische Moment eines seiner Elemente der Länge der Projection dieses Elements auf die Scheibe numerisch gleich wird.

Die Durchführung der einzelnen Rechnungen für die magnetische Wirkung der in der Scheibe inducirten Ströme auf den inducirenden Pol ist hiernach recht complicirt. Man sieht aber von vornherein, dass diese Wirkung sich in folgender Weise äussert.

(1) Erstens wird der Pol parallel der Bewegungsrichtung der Scheibe gedrängt.

(2) Zweitens treibt ihn eine repulsive Kraft von der Scheibe fort.

(3) Drittens zieht ihn eine attrahirende Kraft zur Axe der Scheibe hin.

Doch mache ich noch einmal darauf aufmerksam, dass die Entwickelungen nur für den Fall gelten, dass der Pol der Kante der Scheibe nicht zu nahe kommt, dass man die Scheibe mit Bezug auf seine Lage als unendlich ausgedehnt ansehen darf. Ist das nicht der Fall, so kann, wie schon in Art. 667 bemerkt ist, am Rande der Scheibe die Repulsion die Attraction übersteigen, und dann wird sich der Pol nicht, wie sub (3) angegeben, zur Axe, sondern zur Kante der Scheibe hinbewegen.

Die bezeichneten Kraftwirkungen sind in der Tat sämmtlich von Arago beobachtet und 1826 in den *Annales de Chimie et de Physique* beschrieben worden. Zur Orientirung des Lesers über diese unter dem Namen *Rotationsmagnetismus* berühmt gewordenen Inductionserscheinungen führe ich noch an: Felici in *Tortolinis Annalen* 1853, T. IV., p. 173 und T. V., p. 35; Jochmann in *Crelles Journal* Bd. LXIII., pp. 158 u. 329, und *Pogg. Ann.* CXXII., p. 214 (1864). Die Abhandlung Jochmanns enthält zwar auch die Gleichungen zur Bestimmung der Selbstinduction der Scheibe, allein in der weitern Rechnung ist der von dieser Selbstinduction herrührende Teil der Wirkung vernachlässigt*). Die Methode der magnetischen Bilder habe ich in den *Proc. R. S.* 1872, Febr. 15, veröffentlicht.

Kugelschale.

670. Magnetisches Potential. Als drittes Beispiel betrachte ich die magnetische Kraftwirkung einer inducirten Kugelschale.

Nach Art. 652 lässt sich diese Wirkung, wenn sie für ausserhalb der Substanz der Kugelschale gelegene Punkte berechnet werden soll, durch die Wirkung einer magnetischen Kugelschale von derselben Grösse und Lage, deren Stärke von Punkt zu Punkt wie die Stromfunction der Stromschale variirt, berechnen. Ich bezeichne mit a den Radius der um das Centrum O gelegten Kugelschale, nenne r die Entfernung eines Punktes P von ihrem Mittelpunkt O und $1/p$ den Abstand desselben Punktes von einem Punkte Q ihrer Oberfläche, wo die Stromfunction den Werth φ besitzt.

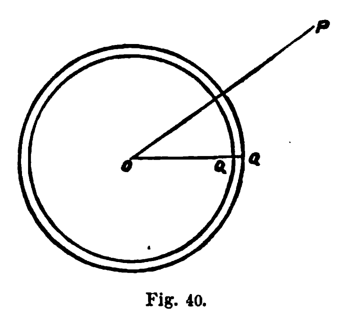


Fig. 40.

*) Hinzuzufügen ist noch die Arbeit von Hertz.

Aus Art. 410 folgt dann, dass das Potential unserer Schale auf einen in P gelegenen Einheitspol

$$\Omega = \iint \varphi \frac{\partial p}{\partial a} dS \tag{1'}$$

ist.

$p = 1/PQ$ ist eine homogene Function des -1ten Grades von r und a, daher nach dem Eulerschen Satz

$$a\frac{\partial p}{\partial a} + r\frac{\partial p}{\partial r} = -p,$$

also

$$\frac{\partial p}{\partial a} = -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial r}(pr).$$

Damit wird

$$\Omega = -\iint \frac{\varphi}{a}\frac{\partial(pr)}{\partial r} dS. \tag{1a}$$

r und a sind in Bezug auf die die Kugelfläche umfassende Integration constante Grössen, ferner kann φ nicht von r abhängen. Wir haben also auch

$$\Omega = -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\iint \varphi\, p\, dS\right). \tag{1b}$$

p ist gleich dem reciproken Betrage der Entfernung unseres Punktes P von den einzelnen Punkten der Kugel,

$$V = \iint \varphi\, p\, dS \tag{2}$$

ist also das gewöhnliche Potential unserer Kugelschale, wenn man sie sich mit einer Materie belegt denkt, deren Dichte von Punkt zu Punkt wie die Stromfunction φ abändert.

Darnach kann das magnetische Potential unserer kugelförmigen Stromschale durch

$$\Omega = -\frac{1}{a}\frac{\partial(Vr)}{\partial r} \tag{1c}$$

dargestellt werden.

671. Vector-Potential. In ganz analoger Weise lässt sich auch das Vector-Potential unserer Kugelschale berechnen.

Nach Art. 416 sind die Componenten F, G, H desselben in Bezug auf den Einheitspol $P(x, y, z)$

$$\begin{aligned} F &= \iint \varphi\left(m\frac{\partial p}{\partial \zeta} - n\frac{\partial p}{\partial \eta}\right) dS, \\ G &= \iint \varphi\left(n\frac{\partial p}{\partial \xi} - l\frac{\partial p}{\partial \zeta}\right) dS, \\ H &= \iint \varphi\left(l\frac{\partial p}{\partial \eta} - m\frac{\partial p}{\partial \xi}\right) dS. \end{aligned} \tag{3'}$$

Darin bezeichnen l, m, n die Richtungscosinusse der zu dS nach aussen gezogenen Normale und ξ, η, ζ geben die Coordinaten der Stelle auf der Kugelfläche, wo das Element dS gelegen ist.

Infolge der sphärischen Gestalt unserer Schale hat man aber

$$l = \frac{\xi}{a}, \quad m = \frac{\eta}{a}, \quad n = \frac{\zeta}{a}.$$

Ferner ist

$$p^{-2} = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

also

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = (x-\xi)p^3 = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = (y-\eta)p^3 = -\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = (z-\zeta)p^3 = -\frac{\partial p}{\partial z},$$

daher z. B.

$$m\frac{\partial p}{\partial \zeta} - n\frac{\partial p}{\partial \eta} = [\eta(z-\zeta) - \zeta(y-\eta)]\frac{p^3}{a} = [z(\eta-y) - y(\zeta-z)]\frac{p^3}{a},$$

oder

$$m\frac{\partial p}{\partial \zeta} - n\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{z}{a}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{y}{a}\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$n\frac{\partial p}{\partial \xi} - l\frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{x}{a}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{z}{a}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$l\frac{\partial p}{\partial \eta} - m\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{y}{a}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{x}{a}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Demnach wird, weil x, y, z Coordinaten eines bestimmten, von der Kugelfläche unabhängigen Punktes angeben,

$$3) \qquad F = \frac{z}{a}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{y}{a}\frac{\partial V}{\partial z}, \quad G = \frac{x}{a}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{z}{a}\frac{\partial V}{\partial x}, \quad H = \frac{y}{a}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{x}{a}\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Aus dieser Form, die die Componenten des Vector-Potentials $\mathfrak{A}$ unserer Kugelschale annehmen, folgt, dass das Vector-Potential zum Radiusvector r und zum Vector, dessen Componenten durch $\partial V/\partial x, \partial V/\partial y, \partial V/\partial z$ gegeben sind, senkrecht steht.

Legt man also die Niveauflächen, die nach arithmetischer Reihe fortschreitenden Werten des Potentials V zugehören, so zeigen ihre Durch-

schnittslinien mit einer mit der Kugelschale concentrischen Kugelfläche vom Radius r die Richtung, die das Vector-Potential in den einzelnen von dem Kugelmittelpunkt um r abstehenden Punkten des Raumes einschlägt, an. Zugleich lässt die Dichtigkeit in der Verteilung dieser Linien an den besonderen Stellen des Raumes auf die Grösse dieses Potentials in diesen bezüglichen Stellen schliessen.

Nach der Symbolik der Quaternionen-Theorie ist

$$4)\qquad \mathfrak{A} = \frac{1}{a} \cdot \text{Vectorteil}\,(\rho \nabla V).$$

672. Entwickelung nach Kugelfunctionen. Als Potential einer belegten Kugelfläche werden wir V immer nach harmonischen Kugelfunctionen entwickeln können.

Ich setze also, um einen einfachen Fall vor Augen zu haben, für Punkte, die innerhalb der Kugelschale gelegen sind,

$$2_1)\qquad V_i = A\left(\frac{r}{a}\right)^i Y_i\,;$$

für Punkte, die sich ausserhalb derselben befinden, ist dann

$$2_2)\qquad V_a = A\left(\frac{a}{r}\right)^{i+1} Y_i\,.$$

Y_i ist eine harmonische Flächenfunction der i^{ten} Ordnung.

Da φ als Flächendichte der Belegung, die das Potential V hervorbringt, der charakteristischen Gleichung zu genügen hat, so wird

$$5_1)\qquad \varphi = \frac{2i+1}{4\pi}\,\frac{A}{a}\,Y_i\,.$$

Für das magnetische Potential unserer Kugelschale erhält man

innerhalb derselben

$$1_1)\qquad \Omega_i = -(i+1)\,\frac{A}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^i Y_i\,,$$

ausserhalb derselben

$$1_2)\qquad \Omega_a = i\,\frac{A}{a}\left(\frac{a}{r}\right)^{i+1} Y_i\,.$$

Wenn also Ströme in einer Kugelschale so verlaufen, wie es die für die Stromfunction aufgestellte Gleichung 5_1) vorschreibt, so hat die magnetische Kraftwirkung der Kugelschale das durch die Gleichungen 1_1) und 1_2) bestimmte magnetische Potential.

Umgekehrt, soll die magnetische Kraftwirkung der Kugelschale das durch 1_1) und 1_2) definirte magnetische Potential besitzen, so muss die

Fläche der Schale so von Strömen durchzogen sein, dass die Stromfunction nach Maassgabe der Formel 5_1) variirt.

Kugelrolle mit gleichförmiger innerer magnetischer Wirkung. Man kann zum Beispiel verlangen, dass um eine Kugel ein Draht so gewunden werden soll, dass ein ihn durchziehender Strom alle innerhalb der Kugel gelegenen Punkte des Raumes mit einer und derselben magnetischen Kraft M nach einer und derselben Richtung angreift. Hier ist das magnetische Potential eine harmonische Raumfunction ersten Grades, es wird

$$\Omega_i = -Mr\cos\vartheta\,,$$

also

$$A = \frac{1}{2}a^2 M$$

und

$$\varphi = \frac{3}{8\pi} Ma\cos\vartheta.$$

ϑ ist die Poldistanz eines auf der Kugel gelegenen Punktes, die Stromfunction ist also in jedem Punkte der Kugel proportional dem Abstande dieses Punktes von der Aequatorealebene der Kugel. Zwischen zwei Breitenkreisen windet sich mithin der Draht gleich oft um die Kugel, wo auch diese Breitenkreise auf derselben gelegen sein mögen.

Ist N die Gesammtzahl aller die Kugel umlaufenden Windungen und bezeichnet γ die Stärke, mit welcher der Strom eine dieser Windungen durchzieht, so wird für eine Windung unter der Poldistanz ϑ zufolge der Bedeutung der Stromfunction

$$\varphi = \frac{1}{2} N\gamma\cos\vartheta.$$

Innerhalb der Kugel wirkt dann, wie man aus der Vergleichung dieses Ausdrucks für φ mit dem kurz vorher gegebenen findet, eine magnetische Kraft von der Grösse

$$M = \frac{4\pi}{3}\frac{N\gamma}{a}\,,$$

die alle Punkte in derselben Richtung und mit derselben Stärke angreift.

673. Kugelrolle mit linear abhängiger innerer magnetischer Wirkung. Ich untersuche ferner, wie man eine Kugelschale mit einem Draht zu umwinden hat, wenn das magnetische Potential eines diesen durchfliessenden Stromes innerhalb der Kugel, wie eine zonale harmonische Raumfunction vom zweiten Grade variiren soll.

Man hat nach Art. 138, 1b)

$$\Omega_i = -3\,\frac{A}{a}\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right),$$

also

$$\varphi = \frac{5}{4\pi}\frac{A}{a}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right).$$

Die Anzahl der Windungen, die zwischen dem Pol und dem Breitenkreise $\pi/2 - \vartheta$ liegen, wird bestimmt durch die Electricitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch den vom Pol zu diesem Breitenkreise führenden Meridianbogen hindurchgeht. Diese Electricitätsmenge ist aber nach Art. 648

$$E = \int_{\vartheta}^{0} \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\, d\vartheta = \frac{3}{2}\frac{5}{4\pi}\frac{A}{a}\sin^2\vartheta.$$

Für eine Halbkugel ist $\vartheta = \pi/2$, bezeichnet also N die Anzahl aller die Kugel umlaufenden Drahtwindungen, so hat man

$$\frac{N}{2} = \frac{3}{2}\frac{5}{4\pi}\frac{A}{a},$$

und die Anzahl der zwischen dem Pol und dem Breitenkreise $\pi/2 - \vartheta$ liegenden Windungen wird

$$N_{(0-\vartheta)} = \frac{1}{2} N \sin^2\vartheta.$$

Die Geschwindigkeit, mit der die Windungszahl für wachsende ϑ zunimmt, ist gleich $N \sin\vartheta \cos\vartheta$, daher die Beschleunigung der Zunahme gleich $N \cos 2\vartheta$; am dichtesten sind also die Windungen in den um 45° von den bezüglichen Polen der Kugelschale entfernten Gegenden an einander gereiht.

Ferner geht $\partial N_{(0-\vartheta)}/\partial\vartheta$ bei $\vartheta = \pi/2$ durch Null hindurch, die Windungen der südlichen Halbkugel laufen also denen der nördlichen entgegen.

Wirkung auf einen Punkt. Bezeichnet γ die Stärke des den Draht durchziehenden Stromes, so hat man noch für innerhalb der Kugelschale gelegene Punkte

$$\Omega_i = -\frac{4\pi}{5} N\gamma \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right).$$

Ich führe ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen z Axe in die Axe und dessen xy Ebene in den Aequator der Kugelschale fällt. Das Potential wird dann

$$\Omega_i = -\frac{4\pi}{5}\frac{N}{a^2}\gamma\left(z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right),$$

wo x, y, z die Coordinaten des Punktes bezeichnen, auf den das Potential der Kugelschale sich bezieht.

Wirkung auf einen ebenen Strom. Greift die von einem Einheitsstrom umflossene Kugel nicht einen Punkt, sondern einen ganzen in ihrem Innern gelegenen Stromkreis an, so wird man ihr magnetisches Potential immer

noch berechnen können, wenn man für den Stromkreis eine von ihm begrenzte magnetische Schale setzt.

Speciell soll der Stromkreis aus einer ebenen, senkrecht zur Axe verlaufenden Curve bestehen. Die ihn ersetzende magnetische Schale ist natürlich eine ebene, senkrecht zur z Axe innerhalb der Kugel liegende Scheibe.

Irgend ein Punkt derselben wird von der Kugelschale in Richtung der z Axe mit einer Kraft von der Grösse $\partial\Omega_i/\partial z$ angegriffen. Daher ist das magnetische Potential der Kugelschale auf dieselbe nach Art. 411 b

$$M = \iint \frac{\partial \Omega_i}{\partial z}\, dS.$$

dS bezeichnet ein Element ihrer Fläche, und da $\partial\Omega_i/\partial z$ nicht von x und y abhängt, so hat man

$$M = \frac{\partial \Omega_i}{\partial z} S.$$

Dieselbe Grösse M mit entgegengesetztem Zeichen ist auch das magnetische Potential der Kugelschale auf den ebenen Stromkreis, wenn S die Grösse der von diesem umspannten Fläche angiebt.

Aus der Gleichung für Ω_i folgt, wenn der die Kugel durchziehende Strom die Stärke Eins hat,

$$-\frac{\partial \Omega_i}{\partial z} = \frac{8\pi}{5a^2} Nz.$$

Man hat also

$$M = \frac{8\pi}{5a^2} NzS.$$

Wird die Kugel von einem Strome mit der Stärke γ und der Stromkreis von einem Strome mit der Stärke γ' durchflossen, so ist die Kraft, die den Stromkreis in Richtung der z Axe, also der Axe der Kugel, zu drängen sucht, nach Art. 583

$$Z = \gamma\gamma' \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{8\pi}{5a^2} NS\gamma\gamma'.$$

Man sieht, dass Z weder von z noch von x und y abhängig ist, der Stromkreis wird also, wo er sich auch innerhalb der Kugelschale befinden mag, in Richtung der Axe der Kugel von dieser immer mit derselben Stärke angegriffen.

Ebene parallele Ströme.

674. Ich habe in Art. 437 die bemerkenswerthe Poissonsche Methode zur Lösung magnetischer Probleme durch solche, die der Gravitationstheorie

angehören, auseinandergesetzt, und gebe hier einige auf Stromschalen bezügliche Anwendungen von derselben.

Man weiss, dass jene Methode sich für gleichmässig magnetisirte Körper benutzen lässt, wir werden ihr daher bei Stromschalen auch nur für eine engbegrenzte Classe von Problemen folgen können.

Ist aber ein Körper in seiner ganzen Ausdehnung in Richtung der z Axe gleichmässig zur Stärke J magnetisirt, so wirkt er magnetisch genau so wie eine Stromschale, die seiner Oberfläche nachgebildet ist, und

$$\varphi = Jz \tag{1}$$

zur Stromfunction besitzt.

Demnach lässt sich die Poissonsche Methode auf die Fälle anwenden, in welchen Schalen von ebenen parallelen Strömen so umflossen werden, dass durch die Breite dz einer von zwei Strombahnen eingefassten Zone in der Zeiteinheit die Electricitätsmenge Jdz hindurchgeht.

Liegen die Strombahnen alle der xy Ebene parallel, so ist das magnetische Potential der Schale

ausserhalb derselben

$$\Omega_a = -J\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{2}$$

innerhalb derselben

$$\Omega_i = -4\pi Jz - J\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{3}$$

Die Componenten des Vector-Potentials haben die Werte

$$F = J\frac{\partial V}{\partial y}, \quad G = -J\frac{\partial V}{\partial x}, \quad H = 0. \tag{4}$$

Darin bezeichnet V das Gravitations-Potential, welches ein der Schale nachgeformter Körper besitzen würde, wenn er durch seine ganze Substanz eine und dieselbe Dichtigkeit Eins hätte.

675a. Ebener Strom. Der Fall ist schon vielfach behandelt worden, man gelangt zu den bekannten Gleichungen, wenn man das Gravitations-Potential V der vom Strom umflossenen Scheibe, unter der Annahme, dass sie aus überall gleich dichter Substanz besteht, berechnet und die obigen Formeln in Anwendung bringt.

675b. Kugelrolle. Auch dieser Fall ist schon (Art. 672) betrachtet worden. Denken wir uns den von der mit Drahtwindungen umgebenen Kugelfläche eingeschlossenen Raum als mit Materie von der Dichtigkeit Eins ausgefüllt, so wird sein Gravitations-Potential

$$V_a = \frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{r}, \qquad \text{für } r > a,$$

$$V_i = \frac{2\pi}{3}(3a^2 - r^2) \quad ,, \ r < a.$$

Eine solche Kugel hat also, wenn sie parallel der z Axe gleichförmig zur Stärke J magnetisirt ist, das magnetische Potential

$$\Omega_a = \frac{4\pi}{3} J \frac{a^3}{r^3} z, \text{ für } r > a,$$

$$\Omega_i = \frac{4\pi}{3} Jz, \quad \text{„} \ r < a,$$

Ist die Kugel nicht magnetisirt aber statt dessen mit einem Draht, der von einem Strom J durchflossen wird, gleichmässig bewickelt, so hat ihr magnetisches Potential ausserhalb der Kugel wieder den Wert

$$\Omega_a = \frac{4\pi}{3} J \frac{a^3}{r^3} z,$$

innerhalb derselben ist aber nach Art. 674, 3)

$$\Omega_i = -\frac{8\pi}{3} Jz.$$

675 c. Ellipsoidrolle. Das Problem eines gleichmässig magnetisirten Ellipsoids habe ich schon in Art. 437 besprochen. Aus den dort gegebenen Formeln folgt, dass eine ellipsoidische Schale, wenn sie mit einem Draht gleichmässig bewickelt wird, innerhalb ihrer Fläche überall eine und dieselbe magnetische Kraft ausübt.

Theorie des Solenoids.

676. Potential. Getrennt von den eben behandelten Problemen, aber mit denselben Hilfsmitteln untersuche ich noch die wichtige Theorie des Solenoids, oder, wie wir auch sagen können, des cylindrischen Magnets.

Es möge ein Cylinder, dessen Mantelfläche irgendwie geformt ist, von zwei Querschnitten begrenzt sein. Ich belege beide Endquerschnitte, den positiven sowohl wie den negativen, mit Materie zur Flächendichte Eins. Ist dann V_1 das Potential, welches die Belegung des positiven Endes, und V_2 das, welches die Belegung des negativen im Punkte x, y, z hervorruft, so stellt

$$1_1) \qquad \Omega_a = (V_1 - V_2) n\gamma$$

das magnetische Potential des Cylinders in demselben Punkte dar, wenn man sich ihn entweder longitudinal gleichmässig zur Stärke $n\gamma$ magnetisirt denkt, oder wenn man ihn mit Drahtwindungen transversal und gleichmässig so umgiebt, dass auf seiner Längeneinheit n Drahtwindungen zu liegen kommen, und durch die Windungen einen Strom von der Stärke γ hindurchgeht.

Die letztere Alternative gilt nur, falls der Punkt, auf den unser Potential sich bezieht, ausserhalb des Cylinders liegt. Befindet er sich dagegen

innerhalb desselben (also in dem Raume, den die Drahtwindungen zusammen mit den Endflächen einschliessen), so hat man

$1_2)$ $$\Omega_i = n\gamma(-4\pi z + V_1 - V_2).$$

Wie man sieht, springt das magnetische Potential des Solenoids beim Durchgang durch die ebenen Endquerschnitte um $4\pi z$, die magnetische Kraft variirt aber continuirlich.

V_1 und V_2 sind nach bekannten Regeln durch die Form der Endquerschnitte zu berechnen.

Lösung für ein sehr dünnes Solenoid. Für den Fall, wo die Abstände r_1, r_2 des Punktes (x, y, z), auf den das Potential sich bezieht, von den bezüglichen Schwerpunkten der Endquerschnitte sehr gross gegen die Querdimensionen des Solenoids sind, darf man

$$V_1 = \frac{A}{r_1}, \quad V_2 = \frac{A}{r_2}$$

setzen, wenn man unter A den Flächeninhalt jedes der Endquerschnitte versteht.

Ausserhalb des Solenoids nimmt dann seine magnetische Kraftwirkung sehr rasch ab. Innerhalb desselben nähert sie sich einer in Richtung der positiven Axe des Solenoids überall mit derselben Stärke $4\pi n\gamma$ auftretenden Kraft.

Solenoid mit kreisförmigem Querschnitt. Für kreisförmige Endquerschnitte vom Radius a lässt sich V nach Kugelfunctionen entwickeln. Die diesbezüglichen Rechnungen findet der Leser in Thomson und Taits *Theoretischer Physik* Art. 546, Ex. II.

Das Resultat ist

für $r < a$

$2_1)$ $$V_i = 2\pi\left\{-rP_1 + a + \frac{1}{2}\frac{r^2}{a}P_2 - \frac{1.1}{2.4}\frac{r^4}{a^3}P_4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{r^6}{a^5}P_6 - \ldots\right\},$$

für $r > a$

$2_2)$ $$V_a = 2\pi\left\{\frac{1}{2}\frac{a^2}{r} - \frac{1.1}{2.4}\frac{a^4}{r^3}P_2 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{a^6}{r^5}P_4 - \ldots\right\}.$$

Darin bezeichnet r den Abstand des Punktes x, y, z, auf den das Potential sich bezieht, von der Mitte des Endquerschnitts, dem V zugehören soll.

$P_1, P_2 \ldots$ sind zonale harmonische Functionen des Winkels ϑ, den r mit der Axe des Solenoids einschliesst. Ihre Entwickelung nach Potenzen von $\cos\vartheta$ oder $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ ist in Art. 138 angegeben.

V_i wird discontinuirlich für $\vartheta = \pi/2$, doch ist zu beachten, dass innerhalb des Solenoids das magnetische Potential durch den Ausdruck 1_2) dargestellt wird.

677. Induction eines Solenoids in der Nähe seiner Mitte auf umschlingende Drahtkreise und auf sich selbst. In weiterer Specialisirung nehme ich an, dass das Solenoid so lang ist, dass für seine magnetische Wirkung in dem von uns zu betrachtenden Gebiete die Endquerschnitte gar keine Rolle mehr spielen.

Ausserhalb des Solenoids reducirt sich dann das magnetische Potential, da wo die Supposition berechtigt ist, auf Null, innerhalb desselben ist es, bezogen auf eine Längeneinheit des Solenoids, gleich $-4\pi z n\gamma$.

Da also die magnetische Induction in Richtung der z Axe innerhalb des Solenoids den Wert $4\pi n\gamma$ besitzt, so ist die Induction durch eine irgendwie begrenzte, ebenda liegende Fläche

$$3_1) \qquad Q_i = 4\pi n\gamma A',$$

falls A' den Inhalt des von der Projection der Grenzcurve der Fläche auf eine zur Axe des Solenoids senkrechte Ebene eingeschlossenen Flächenstücks ist.

Ausserhalb des Solenoids ist die magnetische Induction gleich Null, ihr Integral verschwindet also auch für jede Fläche, deren Grenzcurve ganz ausserhalb des Solenoids liegt und seine Mantelfläche nicht umschlingt. Dagegen wird sie

$$3_2) \qquad Q_a = 4\pi n\gamma A,$$

das $4\pi n\gamma$ fache des Querschnitts A des Solenoids, wenn die betreffende Grenzcurve einmal um das Solenoid herumgeht.

Hiernach ist der Inductionscoefficient M eines das Solenoid n'mal nach derselben Richtung umschlingenden Drahtes (d. h. nach Art. 583 das Potential des Solenoids auf den umschlingenden Draht) in Gegenwart des Solenoids

$$4_1) \qquad M = 4\pi n n' A.$$

Man kann die Windungen dieses Drahtes beliebig weit, aber auch beliebig eng machen, ohne dass dieser Ausdruck für M zu gelten aufhört. Lässt man seine Windungen mit den Drahtwindungen des Solenoids zusammenfallen, so geht der Inductionscoefficient M in den Coefficienten L der Selbstinduction einer Längeneinheit des Solenoids über. Man hat also

$$5_1) \qquad L = 4\pi n^2 A.$$

Das gilt aber nur für den Teil des Solenoids, der sich in genügender Entfernung von jedem seiner beiden Enden befindet.

In der Nähe dieser Enden hat man auch die auf ihnen supponirten Belegungen zu berücksichtigen. Diese bewirken, dass der Inductionscoefficient eines Stromkreises, der das Solenoid umgiebt, kleiner als $4\pi n A$, der Inductionscoefficient, wenn der betreffende Stromkreis sich in sehr grosser Entfernung von den Enden des Solenoids befindet, ausfällt.

678. Induction zweier coaxialer gleich langer Solenoide auf einander. Näher betrachte ich den Fall, dass die das Solenoid umschlingenden Drahtwindungen ein zweites, mit ihm coaxiales Solenoid von derselben Länge l bilden.

Es sei der Radius des äussern Solenoids gleich c_1, der des innern gleich c_2; auf der Längeneinheit des äussern Solenoids mögen n_1, auf der des innern n_2 äquidistante Drahtwindungen enthalten sein.

Vernachlässigt man zunächst die Wirkung der Enden der Solenoide, so ist der Coefficient der Induction des innern Solenoids auf eine Längeneinheit des äussern

$$M = G.g. \tag{4$_2$}$$

Darin habe ich

$$G = 4\pi n_1, \tag{a$_1$}$$

$$g = \pi c_2^2 l n_2 \tag{b$_1$}$$

gesetzt und mit l die Länge des innern Solenoids bezeichnet.

Will man aber die Wirkung der Enden der Solenoide aufeinander mit berücksichtigen, so hat man auch die Potentiale V_1 und V_2 dieser Enden in Rechnung zu ziehen.

Betrachten wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, die Wirkung des positiven Endes des innern Solenoids auf eine von ihm in Richtung der z Axe um z abstehende Windung des äussern.

Bezeichnet man mit dS ein Element einer von der betreffenden Windung des äussern Solenoids umschlossenen Fläche S, nennt r den Abstand dieses Elements von dem Centrum des positiven Endes des innern Solenoids, so hat man für die magnetische Induction dieses Endes durch die Fläche S

$$Q_1 = -\iint \frac{\partial V_1}{\partial \nu} dS. \tag{3'}$$

ν giebt die von der positiven Seite der Fläche S aus zu dS gezogene Normale. Je nachdem die Flächenelemente dS dem Mittelpunkt des positiven Endes des innern Solenoids näher oder entfernter als die Punkte seines Umfanges liegen, hat man für V_1 die unter 2_1) oder die unter 2_2) gegebene Function V_i bezüglich V_a zu setzen. Da aber die Form der Fläche S ganz beliebig gewählt werden darf, so richten wir sie so ein, dass für alle Elemente derselben r grösser als c_2 ausfällt, wir werden dann nur die Function V_a anzuwenden haben.

Ich nehme für S ein durch die betreffende Windung des äusseren Solenoids begrenztes Stück einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt in die Mitte des positiven Endes des innern Solenoids fällt.

Es wird dann

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = -\frac{\partial V_a}{\partial r}$$

und

$$Q_1 = 2\pi r^2 \int_0^{\vartheta_1} \frac{\partial V_a}{\partial r} \sin\vartheta\, d\vartheta = -2\pi r^2 \int_1^{z/\sqrt{z^2+c_1^2}} \frac{\partial V_a}{\partial r}\, d\mu.$$

r bezeichnet die Entfernung des Centrums des positiven Endes des innern Solenoids von den Punkten der betrachteten Windung des äussern Solenoids; ferner ist

$$\vartheta = \sphericalangle(\rho, z), \quad \mu = \cos\vartheta.$$

Wir haben nun

$$2\pi r^2 \frac{\partial V_a}{\partial r} = -4\pi^2 \left\{ \frac{1}{2} c_2^2 - \frac{1.1.3}{2.4} \frac{c_2^4}{r^2} P_2 + \frac{1.1.3.5}{2.4.6} \frac{c_2^6}{r^4} P_4 - \dots \right\}.$$

Aus der Theorie der zonalen Kugelfunctionen folgt (Art. 138)

$$P_2 = \frac{1.3}{1.2}\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right),$$

$$P_4 = \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\left(\mu^4 - \frac{6}{7}\mu^2 + \frac{3}{35}\right),$$

— — — — — — — — — —

Hiernach wird, wenn wir bei den drei ersten Gliedern stehen bleiben,

$$Q_1 = 4\pi^2 c_2^2 \left\{ \frac{1}{2}\zeta - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1.3}{1.2} \frac{c_2^2}{r^2} \left(\frac{1}{3}\zeta^3 - \frac{1}{3}\zeta\right) + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4} \frac{c_2^4}{r^4} \left(\frac{1}{5}\zeta^5 - \frac{2}{7}\zeta^3 + \frac{3}{35}\zeta\right) \right\}_1^{z/\sqrt{z^2+c_1^2}}$$

oder

$$Q_1 = 4\pi^2 c_2^2 \left\{ \frac{1}{2}(\zeta - 1) - \frac{3}{16}(\zeta^3 - \zeta)\frac{c_2^2}{r^2} + \frac{5}{128}(7\zeta^5 - 10\zeta^3 + 3\zeta)\frac{c_2^4}{r^4} \right\},$$

wo ζ für $z(z^2 + c_1^2)^{-\frac{1}{2}}$ gesetzt ist.

Den Werth Q', den Q_1 für das ganze äussere Solenoid besitzt, erhält man, wenn man Q_1 mit $n_1 dz$ multiplicirt und von 0 bis l integrirt. Beachtet man, dass

$$r^2 = z^2 + c_1^2$$

ist, so resultirt

$$Q' = 4\pi n_1 c_2^2 \int_0^l \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{z}{r} - 1\right) - \frac{3c_2^2}{16}\left(\frac{z^3}{r^5} - \frac{z}{r^3}\right) + \frac{5c_2^4}{128}\left(7\frac{z^5}{r^9} - 10\frac{z^3}{r^7} + 3\frac{z}{r^5}\right) \right\} dz,$$

oder unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\frac{dr^{-n}}{dz} = -\frac{nz}{r^{n+2}},$$

$$Q' = 4\pi n_1 c_2^2 \int_0^l \left\{ \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}(r-z) - \frac{3c_2^2}{16} r^{-1} - \frac{5c_2^4}{128} r^{-3}\right) + \frac{c_2^2 z^2}{16}\frac{d}{dz}\left(r^{-3} + \frac{5}{4} r^{-5}\right) - \frac{5}{128} c_2^4 z^4 \frac{dr^{-7}}{dz} \right\} dz.$$

Nach Ausführung der Integration erhält man, wenn

3) $$Q' = 4\pi^2 n_1 c_2^2 c_1 \alpha$$

gesetzt wird,

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\rho - c_1 - l}{c_1} - \frac{3}{16}\frac{c_2^2}{c_1^2}\left(\frac{c_1}{\rho} - 1\right) - \frac{5}{128}\frac{c_2^4}{c_1^4}\left(\frac{c_1^3}{\rho^3} - 1\right)$$
$$+ \frac{c_2^2 l^2}{16 c_1}\left(\frac{1}{\rho^3} + \frac{5c_2^2}{4}\frac{1}{\rho^5}\right) - \frac{5c_2^4 l^4}{128 c_1}\frac{1}{\rho^7} + \frac{1}{8}\frac{c_2^2}{c_1^2}\left(\frac{c_1}{\rho} - 1\right)$$
$$+ \frac{5}{3.4.8}\frac{c_2^4}{c_1^4}\left(\frac{c_1^3}{\rho^3} - 1\right) - \frac{1}{32}\frac{c_2^4 l^2}{c_1}\frac{1}{\rho^5} - \frac{1}{3.16}\frac{c_2^4}{c_1^4}\left(\frac{c_1^3}{\rho_3} - 1\right),$$

wo

$$\rho^2 = l^2 + c_1^2$$

ist. Die Glieder lassen sich gehörig zusammenziehen, und man bekommt

c) $$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\rho - c_1 - l}{c_1} + \frac{1}{16}\frac{c_2^2}{c_1^2}\left(1 - \frac{c_1^3}{\rho^3}\right) + \frac{1}{128}\frac{c_2^4}{c_1^4}\left(1 + 4\frac{c_1^5}{\rho^5} - 5\frac{c_1^7}{\rho^7}\right).$$

Hiernach wird der Coefficient der gegenseitigen Induction der beiden Solenoide auf einander

4) $$M = 4\pi^2 n_1 n_2 c_2^2 \left\{ l - 2c_1\left[\frac{1}{2}\frac{c_1 + l - \rho}{c_1} - \frac{1}{16}\frac{c_2^2}{c_1^2}\left(1 - \frac{c_1^3}{\rho^3}\right) - \frac{1}{128}\left(1 + 4\frac{c_1^5}{\rho^5} - 5\frac{c_1^7}{\rho^7}\right)\right]\right\}.$$

Das Glied $2c_1\alpha$ giebt die Correction, die man an die wahre Länge l der beiden Solenoide anzubringen hat, wenn man ihre Induction auf einander ohne Rücksicht auf ihre Enden berechnen will. Man hat also dann von jeder Seite der Solenoide ein Stück αc_1 sich abgeschnitten zu denken.

Bei Solenoiden, die im Verhältnis zu ihren Querdimensionen sehr grosse Längsausdehnungen besitzen, darf man

c_1) $$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{1}{128}\frac{c_2^4}{c_1^4} - \cdots$$

setzen.

Gleichmässig gewundene Rollen.

679. In der Praxis giebt man den Solenoiden im allgemeinen nicht eine Lage von Drahtwindungen, sondern deren mehrere. Man nennt sie dann *Rollen.*

Gehen durch die Längeneinheit des Radius r einer solchen Rolle m Windungen hindurch, so sind auf der Strecke dr desselben mdr Windungen zu zählen.

Rollen ohne Eisenkern. Der Inductionscoefficient zweier gleich langer Rollen, bezogen auf eine Längeneinheit der äussern Rolle, ist also bei Ausserachtlassung der Wirkungen ihrer Enden auf einander nach Art. 674, 4_1)

$$1_1') \qquad M = 4\pi^2 l n_1 n_2 \int m_1 \, dr \int m_2 r^2 dr.$$

Im allgemeinen wird man dafür sorgen, dass der Draht, dessen Windungen eine Rolle constituiren, überall dieselbe Dicke besitzt, und bei jeder Rolle in Richtung der Länge ebenso dicht wie in der der Quere gewunden ist. In diesem Falle sind m_1 und m_2 constant; zugleich wird $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$, und man hat

$$1_1) \qquad M = \frac{4}{3}\pi^2 l n_1^2 n_2^2 (x-y)(y^3 - z^3).$$

Hier ist

x der äussere Radius der äussern Rolle,
y „ innere „ „ „ „ ;
y „ äussere „ „ innern „ ,
z „ innere „ „ „ „ .

Haben x und z vorgeschriebene Werte, so kann man y noch so wählen, dass M ein Maximum wird. Der Inductionscoefficient erreicht dann seinen grössten Betrag, wenn y der Gleichung

$$2_1) \qquad \frac{4}{3} y_1 - \frac{1}{3}\frac{z^3}{y_1^2} = x$$

gemäss gewählt wird. Dadurch bestimmt sich das beste Verhältnis für die Dicke der inducirten Rolle zu der der inducirenden, wenn man eine Inductionsmaschine ohne Eisenkern zu construiren wünscht.

Rollen mit sehr langem weichem Eisenkern. Befindet sich innerhalb der innern Rolle ein sehr langer weicher Eisenkern, der sie ganz ausfüllt, dessen Radius also gleich z ist, so wird ihre Induction auf die äussere Rolle verstärkt, weil zu ihren Inductionslinien noch die des Magnets hinzutreten. Nach der in Art. 541 und an andern Orten auseinandergesetzten Theorie der Induction wird aber die Anzahl der hinzugetretenen Inductionslinien durch die Induction des Magnets auf die äussere Rolle gemessen. Der

Magnet darf nun in seinen Wirkungen einem Solenoide gleichgesetzt werden. Sein Inductionscoefficient auf die äussere Rolle berechnet sich daher, falls man nur Stellen der Rolle berücksichtigt, die genügend weit von seinen Enden abliegen, genau nach den Vorschriften des Art. 677 und ist

$$G'g' = 4\pi^2 l \int n_1^2\, dr \int n_2^2 4\pi \varkappa z^2 dr.$$

Damit erhalten wir für den Inductionscoefficienten der innern Rolle, wenn sich in ihrem Innern ein Eisenkern befindet, auf eine Längeneinheit der äussern in genügender Entfernung von den Enden dieser Rolle

$$1_2') \qquad M = 4\pi^2 l \int n_1^2 dr \int n_2^2 \,(r^2 + 4\pi\varkappa z^2)\, dr,$$

oder

$$1_2) \qquad M = 4\pi^2 l\, n_1^2 n_2^2 (x-y) \left(\frac{y^3 - z^3}{3} + 4\pi\varkappa z^2 (y-z)\right).$$

Bei vorgeschriebenen Werten für die äussern Umfänge der beiden Rollen fällt die Inductionswirkung am stärksten aus, wenn man dem Eisenkern die Dicke

$$2_2) \qquad 2z_1 = \frac{4}{3} y \frac{12\pi\varkappa}{12\pi\varkappa + 1}$$

verleiht. Wo, wie eben beim Eisen, $\varkappa$ verhältnismässig gross ist, wird

$$z_1 = \frac{2}{3} y.$$

Nun sollte y den geeignetsten Wert erhalten, wenn

$$x = \frac{4}{3} y_1 - \frac{1}{3} \frac{z^3}{y_1^2}$$

wird, ersetzt man z durch z_1, so resultirt

$$3) \qquad 3x = 4\left(1 - \frac{2}{27}\left(\frac{12\pi\varkappa}{12\pi\varkappa + 1}\right)^2\right) y_1.$$

Für ein sehr grosses $\varkappa$ hat man

$$\frac{x}{y_1} = \left(\frac{100}{4 \cdot 3^3}\right) \frac{4}{3},$$

$$\frac{x}{z_1} = \left(\frac{100}{4 \cdot 3^3}\right) \frac{4}{2},$$

also

$$4) \qquad x : y_1 : z_1 = 4 : 3 : 2.$$

Selbstinduction einer Rolle mit langem weichem Eisenkern. Entfernen wir die innere Rolle ganz, so bleibt nur die äussere Rolle von den Radien

x und y und innerhalb derselben der Eisenkern vom Radius z. Nun ist die Induction eines Drahtes auf sich selbst gleich der Summe der Inductionen jedes seiner Teile auf alle andern Teile. Fassen wir eine besondere Drahtlage der Rolle ins Auge, deren Abstand von der innersten Windung gleich $\rho - y$ und von der äussersten gleich $x - \rho$ und deren Dicke gleich $d\rho$ ist, so ist einerseits die Induction der unter ihr befindlichen Lagen der Rolle auf sie nach dem Vorigen

$$4\pi n^2 d\rho \pi l \int_y^\rho (r^2 + 4\pi\varkappa z^2) n^2 dr$$

und andererseits ihre eigene Induction auf die über ihr liegenden Drahtlagen

$$4\pi n^2 d\rho \pi l \int_\rho^x (\rho^2 + 4\pi\varkappa z^2) n^2 dr.$$

Der Coefficient der Selbstinduction einer langen Rolle, die in ihrem Innern einen Eisenkern enthält, ist also, bezogen auf die Längeneinheit

$$1_3') \qquad M = 4\pi \int_y^x n^2 \left\{ \pi l \int_\rho^x n^2 (\rho^2 + 4\pi\varkappa z^2) dr + \pi l \int_y^\rho n^2 (r^2 + 4\pi\varkappa z^2) dr \right\} d\rho,$$

oder nach Ausführung der Integrationen

$$1_3) \qquad M = \frac{2}{3} \pi^2 l n^4 (x - y)^2 (x^2 + 2xy + 3y^2 + 24\pi\varkappa z^2).$$

Rollen von ungleich dickem Draht.

680. Ich lasse jetzt die Voraussetzung, dass die Rollen aus überall gleich dickem Draht gewunden sind, fallen, nehme vielmehr an, man wolle die Dicke des Drahtes in jedem Querschnitt so variiren lassen, dass bei gegebenem Werte des Widerstandes der primären oder secundären Rolle die gegenseitige Induction der Rollen so gross als möglich ausfällt.

Bezeichnet ρn^2 den Widerstand einer Volumeinheit eines Drahtes, die so ausgezogen ist, dass sie die Längeneinheit des Solenoids mit n Windungen bedeckt, so ist der Gesammtwiderstand einer Rolle

$$R = 2\pi l \rho \int n^4 r dr.$$

Soll also bei gegebenem Widerstande R der äussern Rolle die Dicke seines Drahtes so hergestellt und eventuell von Lage zu Lage variirt werden, dass die Induction in ihr möglichst stark ausfällt, so hat man in dem Ausdrucke (Art 679)

$$M = Gg$$

n^2 so zu wählen, dass

$$\frac{\partial G}{\partial r} = C \frac{\partial R}{\partial r}$$

wird, wo C eine Constante bezeichnet. Hiernach hat man

1a) $$n^2 = \frac{\text{Const}}{r}.$$

Ist aber δ_a der Durchmesser des Drahtes auf den Windungen der äussern Rolle, die von der Axe derselben um r abstehen, so hat man

$$n\delta_a = \text{Const},$$

also

1b) $$\delta_a = \text{Const}\sqrt{r}.$$

Die Dicke des Drahtes muss also in jedem Querschnitt der inducirten Rolle von Windung zu Windung wie die Quadratwurzel aus der Weite der betreffenden Windungen variiren.

Soll die gegenseitige Induction bei gegebenem Widerstande der innern Rolle zu einem Maximum werden, so hat man

2a) $$n^2 = \text{Const}\left(r + \frac{4\pi\varkappa z^2}{r}\right),$$

also

2b) $$\delta_i = \text{Const}\left(r + \frac{4\pi\varkappa z^2}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Enthält die innere Rolle keinen Eisenkern, so muss in jedem Querschnitt der innern Rolle der Durchmesser des Drahtes von Windung zu Windung umgekehrt proportional der Quadratwurzel des Radius der betreffenden Windungen variiren. Liegt aber innerhalb derselben ein Eisenkern, so wird die Dicke des Drahtes weniger rasch abnehmen als das Reciproke der Quadratwurzel des Radius, sie wird sogar zunehmen können, wenn $4\pi\varkappa z^2/r$ entsprechend gross wird, und wird schliesslich, wenn der Eisenkern durch eine geringe Kraft sich verhältnismässig stark magnetisiren lässt, der Quadratwurzel des Radius fast proportional wachsen.

Solenoid ohne Ende.

681. Durch Drehung eines ebenen Flächenstücks A um eine in seiner Ebene gelegene, es nicht scheidende Axe entsteht ein ringförmiger Körper. Indem man diesen Körper mit Draht vollständig so umwickelt, dass die Ebenen aller Windungen sich in seiner Axe schneiden, erhält man ein Solenoid ohne Ende. Es seien auf einer Längeneinheit des Ringes n Draht-

windungen aufgewickelt; eine den ganzen Ring bedeckende Lage hat dann $2\pi n$ Drahtwindungen, und in dem Teil dieser Lage, der zwischen zwei an der Axe des Ringes um ϑ gegen einander geneigte Ebenen sich befindet, sind $n\vartheta/2\pi$ Windungen vorhanden.

Bezeichnet also γ die Stärke des diese Lage durchziehenden Stromes, so hat man für die Stromfunction derselben an einer gegen eine feste durch die Ringaxe gehende Ebene um ϑ geneigten Windung nach der Definition

$$1)\qquad \varphi = \frac{1}{2\pi} n\vartheta\gamma.$$

Das magnetische Potential Ω_a des Solenoids wird offenbar ebenfalls nur von dem Winkel ϑ abhängen, und ist ausserhalb seiner Substanz, wie man aus der Aequivalenz zwischen der magnetischen Wirkung eines Stromes und der einer entsprechenden magnetischen Schale und aus den Entwickelungen des Art. 407b ersieht,

$$2_1)\qquad \Omega_a = 0.$$

Ferner haben wir für die Potentialdifferenz zweier Punkte, deren einer innerhalb, deren anderer ausserhalb des Solenoids sich befindet.

$$\Omega_i - \Omega_a = -4\pi\varphi + \text{Const}$$

also

$$2_2\text{a})\qquad \Omega_i = -2n\gamma\vartheta + \text{Const}.$$

Legt man die z Axe in Richtung der Ringaxe, so wird auch

$$2_2\text{b})\qquad \Omega_i = -2n\gamma \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \text{Const}.$$

Ausserhalb des Solenoids ist seine magnetische Kraftwirkung überall gleich Null, innerhalb desselben hat sie die Componenten

$$3)\qquad X = -\frac{\partial\Omega_i}{\partial x} = 2n\gamma\frac{y}{r^2},\quad Y = -\frac{\partial\Omega_i}{\partial y} = 2n\gamma\frac{x}{r^2},\quad Z = -\frac{\partial\Omega_i}{\partial z} = 0.$$

Sie greift dort jeden Punkt senkrecht zu der durch ihn und die Axe des Solenoids (Axe des Ringes) gelegten Ebene mit der Stärke

$$R_i = 2n\gamma\frac{1}{r}$$

an, wo r den Abstand des betreffenden Punktes von der Axe angiebt.

Nach der in Art. 404 gegebenen Definition der Componenten F, G, H des Vector-Potentials haben wir

$$X = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},\quad Y = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x},\quad Z = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y},$$

also

$$4)\qquad F=2n\gamma\frac{xz}{r^2},\quad G=2n\gamma\frac{yz}{r^2},\quad H=0,$$

und da nach Art. 403, 3) die magnetische Induction eines Magnets durch einen geschlossenen Drahtkreis s

$$5')\qquad Q=\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds$$

ist, so hat man für die magnetische Induction unseres Solenoids, durch einen geschlossenen Drahtkreis

$$Q=2n\gamma\int_0^s\frac{z}{r}\frac{dr}{ds}ds.$$

Liegt dieser Drahtkreis ganz innerhalb des Solenoids, so ist ds ein Element seiner Circumferenz s_i, und es wird

$$5_1)\qquad Q_i=2n\gamma\int_0^s\frac{z}{r}\frac{dr}{ds_i}ds_i.$$

Liegt er dagegen ganz ausserhalb des Solenoids, umschliesst er aber dasselbe vollständig, so ist ds ein Element einer Windung s' des Solenoids, es wird also dann

$$5_2)\qquad Q_a=2n\gamma\int_0^s\frac{z'}{r'}\frac{dr'}{ds'}ds'=2n\gamma a.$$

a ist eine lineare Grösse, nämlich

$$6)\qquad a=\int_0^s\frac{z'}{r'}\frac{dr'}{ds'}ds'.$$

Da z', r', s' sich nur auf eine Windung des Solenoids beziehen, so besitzt diese Grösse a, welche Form man auch dem umschlingenden Drahtkreise geben mag, stets einen und denselben Wert.

Befindet sich endlich der Drahtkreis ganz ausserhalb des Solenoids und umschliesst er ihn auch an keiner Stelle, so ist

$$5_3)\qquad Q_a=0.$$

Ich nehme jetzt an, dass das Solenoid von einem Drahte, der seine Windungen nicht notwendig zu berühren braucht, n' mal umschlungen wird. Die magnetische Induction durch diesen Draht ist dann

$$7)\qquad Q'=2nn'\gamma a,$$

daher der Inductionscoefficient zwischen Solenoid und Draht

8) $$M = 2nn'a.$$

Da dieser Ausdruck von der besondern Form und Lage des umschlingenden Drahtes unabhängig ist, so folgt, dass zwischen Solenoid und umschlingendem Draht, wenn auch beide von Strömen durchflossen werden, keine mechanische Kraft wirkt. Man darf also den umschlingenden Draht den Windungen des Solenoids beliebig nahe bringen. Lässt man ihn vollständig mit diesen coincidiren, so geht M in den Coefficienten L der Selbstinduction eines endlosen Solenoids über, und man erhält

9) $$L = 2n^2a.$$

Cap. XIII.

Parallele Ströme.

Cylindrische Leiter.

682. In vielen durch ihre Bedeutung hervorragenden electrischen Untersuchungen lässt man den Strom durch runde Drähte von nahezu gleichförmigem Querschnitte fliessen, die man entweder zu geraden Bahnen streckt oder so krümmt, dass die Krümmungsradien der Curven, die ihre Axen bilden, überall die Krümmungsradien ihrer Querschnitte weit überragen. Ich werde im Folgenden die Theorie so geleiteter Ströme auseinandersetzen und beginne, um den Leser mit dem nötigen besondern Calcul vertraut zu machen, mit dem Fall, wo die Strombahnen sich aus zwei langen parallelen Drähten zusammensetzen, die an den bezüglichen Enden durch Metallstücke mit einander verbunden sind.

Unendlich langer, gerader, cylindrischer Leiter.

683a. Ich setze zunächst voraus, dass sich im Felde nur ein unendlich langer, cylindrischer, von einem Strom durchflossener Leiter befindet.

Es ist klar, dass das Feld, das die Strombahn umgiebt, in allen zu dieser senkrechten Querschnitten, so lange man sich ihren Enden nicht zu sehr nähert, genau dieselben Eigentümlichkeiten aufweisen wird. Verlegt man daher die z Axe in Richtung dieser Strombahn, so wird alles von der Componente H des Vector-Potentials abhängen, und man hat

1) $$F = 0, \quad G = 0, \quad H = H.$$

Darnach besitzt die magnetische Induction in einem Punkte x, y, z des Feldes die Componenten

2a) $$a = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad b = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad c = 0.$$

Dieselben Componenten sind aber auch durch das Gleichungssystem 2)

2b) $$a = \alpha + 4\pi A, \quad b = \beta + 4\pi B, \quad c = \gamma + 4\pi C$$

in Art. 399b bestimmt.

Da wir es hier mit einem durch Ströme hervorgebrachten magnetischen Felde zu tun haben, so wird zwar ausserhalb des Leiters

$$A = B = C = 0$$

sein, der Allgemeinheit wegen lasse ich aber diese Grössen stehen, wodurch auch der Fall, dass die Leiter aus magnetisirbaren Stoffen bestehen, in die Betrachtung mit einbegriffen ist. Ist dann μ der magnetische Inductionscoefficient an der Stelle x, y, z des Feldes, so hat man

2c) $$a = \mu\alpha, \quad b = \mu\beta, \quad c = 0,$$

$\alpha, \beta, 0$ sind die Componenten der den Punkt (x, y, z) angreifenden magnetischen Kraft der Ströme.

Nach dem in Art. 607 gegebenen fundamentalen Gleichungssystem E) sind ferner die Componenten der in dem fraglichen Punkte (x, y, z) stattfindenden electrischen Strömung

3a) $$u = 0, \quad v = 0, \quad w = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)$$

oder wegen 2a) und 2c)

3b) $$u = 0, \quad v = 0, \quad w = -\frac{1}{4\pi\mu}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right).$$

683b. Wir haben vom magnetischen Felde immer nur einen zu der Strombahn senkrechten Querschnitt zu betrachten.

Nehmen wir die Ebene der x, y als solchen Querschnitt, nennen r den Abstand des Punktes (x, y, z) von der z Axe und ϑ den Winkel, den r mit der x Axe einschliesst, so wird

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Die Kraft β rechne ich als positiv, wenn sie in Richtung der positiven y Axe wirkt. Da alles um die Axe des Leiters symmetrisch angeordnet ist, so kann die electrische Strömung an jeder Stelle nur von der Entfernung r dieser Stelle von der genannten Axe abhängen. Wir haben daher in bekannter Transformation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)}{\partial r}$$

und

3₁) $$4\pi\mu w = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right).$$

$-\partial H/\partial r$ ist aber die in Richtung von r wirkende magnetische Induction, bezeichnet also ρ die den betreffenden Punkt von der Axe des Leiters forttreibende magnetische Kraft des betrachteten Querschnitts, so haben wir

4) $$\int_0^r 2\pi r w\,dr = \frac{1}{2}\rho r.$$

r ist der Radius eines mit dem cylindrischen Leiter coaxialen zweiten Cylinders, auf dessen Mantelfläche der angegriffene Punkt liegt. Daher bezeichnet die Grösse linker Hand die durch einen Querschnitt dieses zweiten Cylinders in der Zeiteinheit hindurchgehende Electricitätsmenge.

Bewegt sich also Electricität in coaxialen cylindrischen Schichten, so hängt ihre magnetische Kraftwirkung auf einen Punkt nicht von der Verteilung ihrer Strömungsgeschwindigkeit in den einzelnen Schichten, sondern von der Gesammtstärke des Stromes ab, der die zwischen der Axe und dem betreffenden Punkte liegenden Schichten entlang fliesst.

684. Stromdurchflossener Draht. Sei, zum Beispiel, der Leiter ein Draht von überall gleicher Dicke $2a$, der so von einem Strome durchflossen wird; dass die Stromdichte in allen Punkten seiner Substanz einen und denselben Wert besitzt.

Für einen ausserhalb der Substanz dieses Drahtes befindlichen Punkt ist

$$5_1)\qquad C_a = \int_0^a 2\pi w r dr = \pi a^2 w, \quad r > a.$$

Für einen innerhalb seiner Substanz in der Entfernung r von seiner Axe liegenden Punkt wird dagegen

$$5_1')\qquad C_i = \int_0^r 2\pi w r dr = \pi r^2 w, \quad r < a.$$

Ausserhalb des Drahtes haben wir also

$$4_1)\qquad \rho_a = 2\frac{C}{r};$$

innerhalb desselben

$$4_1')\qquad \rho_i = 2\frac{C_i}{r} = 2\,C\frac{r}{a^2}.$$

Das magnetische Potential ist hiernach ausserhalb des Drahtes

$$6')\qquad \Omega_a = -2C\vartheta,$$

innerhalb desselben existirt, wie der Ausdruck für ρ_i lehrt, kein magnetisches Potential.

Stromdurchflossene Röhre. Als zweiten Fall nehme ich an, dass der cylindrische Leiter durch eine sehr lange Metallröhre gebildet werde.

Der äussere Radius der Röhre sei a_1, der innere a_2, der Strom habe wieder überall dieselbe Dichte.

Die gesammte, einen Querschnitt der Röhre in der Zeiteinheit durchfliessende Electricitätsmenge ist

$$5_2)\qquad C = \pi w (a_1^2 - a_2^2).$$

Ferner haben wir

ausserhalb der Röhre

$$4_2)\qquad \rho_a = 2\frac{C}{r}, \quad r > a_1,$$

in der Substanz derselben

$$4_2')\qquad \rho_i = 2C\frac{1}{a_1^2 - a_2^2}\left(r - \frac{a_2^2}{r}\right), \quad a_1 > r > a_2.$$

in ihrem Hohlraum

$$4_2'')\qquad \rho_h = 0, \quad r < a_2.$$

Die Röhre wirkt also im Aussenraum magnetisch ganz so, wie wenn auch ihr Hohlraum von dem Strom durchflossen wäre.

Nach der Definition war

$$\rho = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial H}{\partial r}.$$

Da ρ nur von r abhängt, so haben wir

$$7)\qquad H = -\int \mu\rho\, dr.$$

Hiernach wird

ausserhalb der Röhre

$$7_2)\qquad H_a = A - 2\mu_0 C \log r, \quad r > a_1.$$

μ_0 bezeichnet den Wert, den der magnetische Inductionscoefficient in dem den Leiter umgebenden Medium besitzt, und A ist eine von der Lage des rückführenden Stromleiters abhängige Constante.

In der Substanz der Röhre haben wir

$$7_2')\quad H_i = A - 2\mu_0 C \log a_1 + \frac{\mu C}{a_1^2 - a_2^2}\left(a_1^2 - r^2 + 2a_2^2 \log\frac{r}{a_1}\right); \; a_1 > r > a_2.$$

Endlich ist im Hohlraum der Röhre

$$7_2'')\qquad H_h = A - 2\mu_0 C \log a_1 + \mu C\left(1 + \frac{2a_2^2}{a_1^2 - a_2^2}\log\frac{a_2}{a_1}\right); \quad r < a_2.$$

Daselbst hat diese Grösse überall einen und denselben Wert.

Zwei parallele unendlich lange cylindrische Leiter.

685. Selbstinduction. Es mögen sich nunmehr im Felde zwei sehr lange parallele cylindrische Leiter befinden, deren Axen von einander um b abstehen. Ihre Enden sollen durch Metallstücke leitend verbunden sein, sodass sie mit diesen zusammen einen geschlossenen Stromkreis constituiren. Den einen Leiter nenne ich den hinführenden, den andern den rückführenden.

Betrachtet man ein Gebiet des die Leiter umgebenden Feldes, das sich in solcher Entfernung von den Enden dieser befindet, dass man letztere als ganz einflusslos auf die Verteilung der magnetischen Kraft in diesem Gebiete ansehen darf, so wird wieder alles von den bezüglichen Componenten H der Vector-Potentiale der beiden Leiter allein abhängen.

Ich bezeichne mit L den Coefficienten der Selbstinduction unseres ganzen Stromkreises, bezogen auf die Längeneinheit eines jeden der beiden Leiter. Wird der Kreis von einem Strome mit der constanten Stärke C durchflossen, so ist die kinetische Energie einer Längeneinheit unseres Systems

$$\text{1a)} \qquad T = \frac{1}{2} L C^2.$$

Dieselbe Energie ist aber auch

$$\text{1b)} \qquad T = \frac{1}{2} \iiint (H + H')(w + w')\, dx\, dy\, dz,$$

wenn nicht accentuirte Buchstaben sich auf den hinführenden, accentuirte auf den rückführenden Leiter beziehen. In dem von uns betrachteten Gebiete hängen weder die H noch die w von z ab. Schneidet man das Gebiet aus dem Felde durch zwei zu den Axen der parallelen Leiter senkrechte und in der Einheit der Länge von einander abstehende Ebenen aus, so wird also

$$\text{2'a)} \quad L C^2 = \iint H w\, dx dy + \iint H w' dx dy + \iint H' w\, dx' dy' + \iint H' w' dx' dy'.$$

w' ist im hinführenden, w im rückführenden Leiter gleich Null, und w sowohl wie w' verschwinden ausserhalb der Substanz der Leiter gänzlich.

Wir haben also

$$\text{2'b)} \quad L C^2 = \iint H_i w dx dy + \iint H_a w' dx' dy' + \iint H'_a w\, dx dy + \iint H'_i w' dx' dy'.$$

Die erste und dritte Integration ist in Bezug auf einen Querschnitt des hinführenden, die zweite und vierte in Bezug auf einen des rückführenden Leiters auszuführen.

Der Allgemeinheit wegen nehme ich an, dass beide Leiter Röhren sind, die hinführende Röhre soll von einem Strome mit der Stärke C, die rückführende von einem solchen nach derselben Richtung mit der Stärke C' durchflossen werden. Da beide einen stationären Strom leiten, so ist

$$\text{a)} \qquad C + C' = 0.$$

Ferner geben die Entwickelungen der vorigen Artikel

$$H_i = A - 2\mu_0\, C \log a_1 + \frac{\mu C}{a_1^2 - a_2^2}\left(a_1^2 - r^2 + 2a_2^2 \log \frac{r}{a_1}\right),$$
$$H_a = A - 2\mu_0\, C \log r;$$

b)
$$H'_a = A' - 2\mu_0\, C' \log r',$$
$$H'_i = A' - 2\mu_0\, C' \log a'_1 + \frac{\mu C'}{a'^2_1 - a'^2_2}\left(a'^2_1 - r'^2 + 2a'^2_2 \log \frac{r'}{a_1'}\right).$$

$$w = \frac{C}{2\pi(a_1^2 - a_2^2)}, \quad w' = \frac{C'}{2\pi(a'^2_1 - a'^2_2)}.$$

Ich ersetze in dem zweiten und dritten Integral H_a und H'_a durch ihre bezüglichen Mittelwerte $\overline{H}_a$, $\overline{H}'_a$. Für einen Querschnitt des rückführenden Leiters ist

$$\overline{H}_a = A - 2\mu_0\, C \log b,$$

für einen des hinführenden

$$\overline{H}'_a = A' - 2\mu_0\, C' \log b.$$

Da weiter

$$\iint w'\, dx'\, dy' = C', \quad \int w\, dx\, dy = C$$

ist, so haben wir für die Summe des zweiten und dritten Gliedes in dem Ausdrucke 2'b)

$$II + III = AC' - 2\mu_0\, CC' \log b + A'C - 2\mu_0\, CC' \log b.$$

Das erste Glied in dem fraglichen Ausdrucke ist

$$I = \iint H_i w\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_{a_2}^{a_1} H_i w\, r\, dr\, d\varphi = 2\pi w \int_{a_2}^{a_1} H_i\, r\, dr,$$

oder nach Einführung des Wertes für H_i

$$I = AC - 2\mu_0\, C^2 \log a_1 + 2\,\mu C \pi w \frac{a_1^2 - 3a_2^2}{2} + \frac{2\mu C^2 a_2^4}{(a_1^2 - a_2^2)^2} \log \frac{a_1}{a_2}.$$

Der Betrag für das vierte Glied ergiebt sich daraus, wenn man die einzelnen Buchstaben mit Accenten versieht. Aus der Summation der vier Glieder unter Berücksichtigung der Beziehung

$$C + C' = 0$$

resultirt nunmehr

$$2_1)\qquad L = 2\mu_0 \log \frac{b^2}{a_1 a_1'} + \frac{1}{2}\mu \frac{a_1^2 - 3a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} + \mu \frac{2a_2^4}{(a_1^2 - a_2^2)^2} \log \frac{a_1}{a_2}$$
$$+ \frac{1}{2}\mu' \frac{a'^2_1 - 3a'^2_2}{a'^2_1 - a'^2_2} + \mu' \frac{2a'^4_2}{(a'^2_1 - a'^2_2)^2} \log \frac{a'_1}{a'_2}.$$

686. Für Vollcylinder ist $a_2 = a'_2 = 0$ zu setzen. Der Coefficient der Selbstinduction zweier paralleler sehr langer Drähte von den bezüglichen Dicken $2a_1$, $2a'_1$, die einem Stromkreise angehören, ist also auf Längeneinheit bezogen in genügender Entfernung von den Enden derselben

$$2_2)\qquad L = 2\mu_0 \log \frac{b^2}{a_1 a'_1} + \frac{1}{2}(\mu + \mu'.)$$

Unsere Formeln gelten allgemein, aus was für Stoffen auch die Leiter hergestellt sein mögen und wodurch auch der unendliche Raum ausgefüllt sein mag. Doch ist zu beachten, dass nur beim Eisen die magnetischen Inductions-Coefficienten von 1 erheblich verschiedene Werte besitzen, bei allen andern Substanzen darf man μ_0, μ, μ' der 1 gleichsetzen.

Ferner ersieht man aus der letzten Gleichung, dass die Selbstinduction zweier Drähte um so grösser ausfällt, je geringer ihre bezüglichen Dicken und je bedeutender ihr Abstand von einander genommen wird.

Hat b seinen kleinsten Betrag, $a_1 + a'_1$, erreicht, befinden sich also die Drähte in unmittelbarer Berührung, so wird

$$L = 2\mu_0 \log \frac{(a_1 + a'_1)^2}{a_1 a'_1} + \frac{1}{2}(\mu + \mu').$$

Für $\mu_0 = \mu = \mu' = 1$ folgt hieraus

$$L = 2 \log \frac{(a_1 + a'_1)^2}{a_1 a'_1} + 1.$$

In diesem Falle wird L am kleinsten, wenn man beiden Drähten gleiche Dicke giebt, man hat dann auf Längeneinheit bezogen

$$L = 2\left(\log 4 + \frac{1}{2}\right) = 3{,}7726.$$

Am kleinsten fällt also die Selbstinduction bei einem Stromkreise aus, wenn man seinem Draht überall die gleiche Dicke giebt und den hinführenden Draht unmittelbar an den rückführenden anlegt.

Natürlich müssen beide Drähte von einander isolirt sein, deshalb kann man in der Praxis diesen kleinsten Betrag nicht voll erreichen. Doch vermag man durch Anwendung breiter flacher Metallstreifen die Selbstinduction auf jede beliebig kleine Grösse zu reduciren.

Die Selbstinduction für Stücke von der Länge l findet man, wenn man die gegebenen Ausdrücke für L mit l multiplicirt.

687. Abstossung zwischen zwei Stücken der bezüglichen Drähte. Nach Art. 580 suchen die beiden Leiter ihren Abstand b von einander mit der Kraft

$$3_1)\qquad X = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial b} C^2$$

zu vergrössern.

Bleiben wir beim Fall zweier Drähte, so wird die zwei Stücke derselben von der Länge l aus einander drängende Kraft

$$3_2) \qquad X = 2\mu_0 \frac{l}{b} C^2,$$

eine Gleichung, die, wenn μ_0 — wie das, wenn die Drähte sich in der Luft befinden, statthaft ist — gleich 1 gesetzt wird, mit der in Art. 479 schon abgeleiteten, von Ampère gegebenen Formel übereinstimmt.

688. Ausser dieser Wirkung existirt auch in der Längsrichtung jedes der Drähte eine Tension Z, die sich im Fall, dass die Drähte sehr lang sind, durch die Gleichung

$$4_1) \qquad Z = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial l} C^2 = C^2 \left\{ \mu_0 \log \frac{b^2}{a_1 a'_1} + \frac{\mu}{2} \right\}$$

bestimmt.

Ich wende diese Formel zur Erklärung einer von Ampère beobachteten Erscheinung an.

In einem seiner Experimente füllte er zwei parallele Rinnen mit Quecksilber und verband sie durch einen vertical gestellten Metallbügel. Dann führte

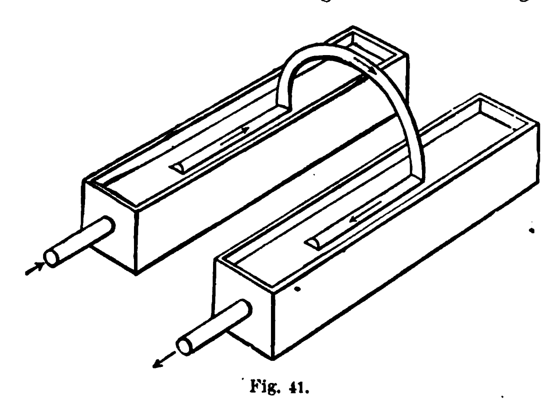


Fig. 41.

er — das Arrangement ist in der vorstehenden Figur 41 skizzirt — durch das eine Ende einer der Rinnen einen Strom in die fragliche Rinne ein, liess diesen aus dieser Rinne durch den Bügel in die andere Rinne fliessen und leitete ihn von da wieder in die Batterie zurück. Er bemerkte nun, dass der Bügel sich in Längsrichtung der Rinnen fortbewegte und zwar so, dass die Längen der vom Strom durchflossenen Rinnenteile vergrössert wurden.

Später hat dann Tait die Bedingungen dieses Experiments dadurch vereinfacht, dass er den Metallbügel durch eine geeignet gebogene, mit Quecksilber gefüllte Glasröhre ersetzte. Das Resultat war aber dasselbe.

Man hat das Ergebnis des beschriebenen Versuches oft als Beweis dafür angeführt, dass zwei Stromelemente, die in derselben geraden Linie liegen, einander abstossen. Daraus wollte man dann auf die Ueberlegenheit des

Ampèreschen electrodynamischen Grundgesetzes, weil es diese Abstossung collinearer Stromelemente voraussagt, über dem Grassmannschen, das eine solche Abstossung nicht anzeigt, schliessen.

Allein, auch dieses Experiment bezieht sich auf geschlossene Ströme, und da die Grassmannsche Formel für geschlossene Ströme zu genau denselben Resultaten wie die Ampèresche führt, so hätte man daraus schon ersehen können, dass dasselbe nicht zur Entscheidung zwischen den beiden genannten Grundgesetzen herangezogen werden darf.

In der Tat ist die Ableitung, die ich für die Kraft Z gegeben habe, ganz unabhängig davon, welches der beiden Grundgesetze man zur Anwendung bringt, man findet nach dem einen genau denselben Ausdruck, wie nach dem andern. Daraus aber, dass in diesem Ausdruck die Grösse b, die laterale Entfernung der beiden Drähte von einander vertreten ist, erhellt, dass es sich in dem Ampèreschen Experiment um etwas ganz anderes als um die Wirkung collinearer Stromelemente handelt.

Stromschwankungen in einem geraden, langen und dicken Leiter.

689. Variirt ein einen Draht durchfliessender Strom seine Intensität, so wird er in seinem Leiter durch Selbstinduction eine electromotorische Kraft wachrufen, die nicht blos von Querschnitt zu Querschnitt des Drahtes, sondern auch in jedem Querschnitt für sich von Punkt zu Punkt abändern kann. Im allgemeinen wird sie in einem Punkte eines Querschnitts ausser von dem Abstande dieses Punktes von der Axe des Drahtes noch von der Zeit abhängen. Doch kann man sich, wenn man den Draht sehr dünn wählt, von der ersten, localen Abhängigkeit frei machen.

Hat man nun einen cylindrischen Leiter von bedeutendem Querschnitt, den ein Strom durchfliesst, so wird man von den bisherigen Rechnungen Gebrauch machen dürfen, wenn er innerlich so construirt und seine Einfügung in einen Stromkreis so arrangirt ist, dass man ihn beliebig auch durch ein Bündel von Drähten, die alle von dem Strome an entsprechenden Stellen zu jeder Zeit auch mit gleichförmiger Stärke durchzogen werden, zu ersetzen vermag. Wo das aber nicht der Fall ist, wo der Leiter in seiner Eigenschaft als nach allen Richtungen ausgedehnte Masse der Electricität dahin zu fliessen gestattet, wohin sie die an der betreffenden Stelle gerade wirkende electromotorische Kraft treibt, da hat der Strom an verschiedenen Stellen eines Querschnitts auch verschiedene Stärken. Die localen electromotorischen Kräfte hängen dann umgekehrt von der Stromverteilung in den einzelnen Schichten des Leiters ab.

Der Körper soll wieder ein sehr langer Cylinder sein, die Rechnungen sollen sich auf ein Gebiet beschränken, welches durch die Enden des Cylinders nicht afficirt wird.

Wir haben dann das Vector-Potential H, die Stromdichte w und die locale electromotorische Kraft als gegebene Functionen der Zeit und des Abstandes der Stelle, auf die sich die genannten Grössen beziehen, von der Axe des Cylinders anzusehen.

Was wir nun zu bestimmen suchen, ist erstens die Electricitätsmenge C, die zu einer bestimmten Zeit durch einen bestimmten Querschnitt des Leiters in der Zeiteinheit hindurchgeht, wenn die totale electromotorische Kraft, die zu einer bestimmten Zeit in einem bestimmten Stück des Leiters (etwa in dem ganzen Stromkreis) wirkt, gegeben ist, und zweitens diese totale electromotorische Kraft, wenn die Electricitätsmenge C und ihre Abhängigkeit von der Zeit bekannt ist; oder die Electricitätsmenge C und die totale electromotorische Kraft, wenn das Vector-Potential für jeden Zeitmoment gegeben ist.

H hängt für einen von der Axe des Leiters um r abstehenden Punkt ausser von r noch von der Zeit t ab, ich setze

$$1)\qquad H = S + T_0 + T_1 r^2 + T_2 r^4 + \dots T_n r^{2n}.$$

$S, T_0, T_1, \dots T_n$ sind Functionen der Zeit, und nur dieser.

Da nun nach Art. 683b, 3_1), bei $\mu = 1$

$$2')\qquad -4\pi w = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}$$

ist, so finden wir

$$2)\qquad -\pi w = T_1 + 4 T_2 r^2 + \dots + n^2 T_n r^{2n-2}.$$

Die Natur des Problems bringt es mit sich, dass das Vector-Potential nicht in der angenommenen sehr allgemeinen Weise mit der Zeit variiren kann. Giebt nämlich ρ den auf Volumeinheit bezogenen specifischen Widerstand der Substanz des Leiters, so hat die electromotorische Kraft an der Stelle, wo die Stromdichte w herrscht, den Wert

$$3a)\qquad E = \rho w.$$

Dieselbe electromotorische Kraft ist jedoch nach dem fundamentalen Gleichungssystem B) auch

$$3b)\qquad E = -\frac{\partial \Psi}{dz} - \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Wir haben daher

$$4)\qquad -\rho w = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{dS}{dt} + \frac{dT_0}{dt} + \frac{dT_1}{dt} r^2 + \dots + \frac{dT_n}{dt} r^{2n}.$$

Durch Vergleichung mit der Formel 2) folgt hieraus das System von Gleichungen

5′)
$$T_1 = \frac{\pi}{\rho}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{dS}{dt} + \frac{dT_0}{dt}\right),$$
$$T_2 = \frac{\pi}{2^2 \rho}\frac{dT_1}{dt},$$
$$T_3 = \frac{\pi}{3^2 \rho}\frac{dT_2}{dt},$$
— — — — —
$$T_n = \frac{\pi}{n^2 \rho}\frac{dT_{n-1}}{dt}.$$

Nun sollten $T_1, T_2, \ldots T_n$ nur von t, nicht aber von r oder z abhängen, daher darf auch $\partial\Psi/\partial z$ nicht von r und z abhängen, und man kann S stets so wählen, dass

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{dS}{dt} = 0$$

wird. Tut man das, so geht jenes Gleichungssystem 5′), wenn man

$$T_0 = T$$

setzt, über in

5) $$T_0 = T,\ T_1 = \frac{\pi}{\rho}\frac{dT}{dt},\ T_2 = \frac{1}{(2!)^2}\frac{\pi^2}{\rho^2}\frac{d^2T}{dt^2}, \ldots T_n = \frac{1}{(n!)^2}\frac{\pi^n}{\rho^n}\frac{d^nT}{dt^n}.$$

Das Vector-Potential enthält also ausser S nur eine willkürliche Zeitfunction.

690. Die Grösse C, die Stromstärke an einem bestimmten Querschnitt des Leiters, ergiebt sich aus der Gleichung

6′) $$C = 2\pi \int_0^a wr\,dr,$$

wenn $2a$ die Dicke dieses Leiters bezeichnet. Zufolge der Gleichung 2) wird also

6a) $$-C = T_1 a^2 + 2T_2 a^4 + \ldots + nT_n a^{2n}.$$

Das Vector-Potential H ist für jeden ausserhalb der Substanz des Leiters gelegenen Punkt, wie wir wissen, nicht von der Stromverteilung im Innern des Leiters, sondern von dem Gesammtstrom, der einen Querschnitt desselben passirt, abhängig. H ist also eine Function von C. Setzt man für Punkte, die der Oberfläche des Leiters angehören,

$$H_{r=a} = AC,$$

so ist A eine zu bestimmende Constante, und man hat

$$AC = S + T_0 + T_1 a^2 + T_2 a^4 + \ldots + T_n a^{2n},$$

also nach 5) und 6)

$$\text{6b)} \quad C = -\left(\alpha \frac{dT}{dt} + \frac{2\alpha^2}{1^2.2^2}\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{3\alpha^3}{1^2.2^2.3^2}\frac{d^3T}{dt^3} + \ldots + \frac{n\alpha^n}{(n!)^2}\frac{d^nT}{dt^n}\right),$$

$$\text{7)} \quad AC - S = T + \alpha\frac{dT}{dt} + \frac{\alpha^2}{1^2.2^2}\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{\alpha^3}{1^2.2^2.3^2}\frac{d^3T}{dt^3} + \ldots + \frac{\alpha^n}{(n!)^2}\frac{d^nT}{dt^n},$$

wo

$$\alpha = \frac{\pi a^2}{\rho}$$

gesetzt ist und den Wert der Leitungsfähigkeit einer Längeneinheit des Cylinders angiebt.

Diese Gleichungen dienen zur Bestimmung von S und T.

Aus der ersten folgt durch Umkehrung

$$\text{8)} \quad \alpha\frac{dT}{dt} = -C + \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{6}\alpha^2\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \frac{7}{144}\alpha^3\frac{\partial^3 C}{\partial t^3} - \frac{109}{2880}\alpha^4\frac{\partial^4 C}{\partial t^4}.$$

Ferner ergiebt sich durch Addition der zweiten differenzirten und mit α multiplicirten Gleichung zu der ersten

$$\text{9)} \quad \alpha\left(A\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{dS}{dt}\right) + C = \frac{1}{2}\alpha^2\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{1}{6}\alpha^3\frac{d^3T}{dt^3} + \frac{1}{48}\alpha^4\frac{d^4T}{dt^4} + \frac{1}{720}\alpha^5\frac{d^5T}{dt^5} + \ldots$$

Somit erhalten wir

$$\text{10a)} \quad \alpha\left(A\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{dS}{dt}\right) + C + \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial C}{dt} - \frac{1}{12}\alpha^2\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \frac{1}{48}\alpha^3\frac{\partial^3 C}{\partial t^3} - \frac{1}{180}\alpha^4\frac{\partial^4 C}{\partial t^4} + \ldots = 0.$$

Es war aber

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \alpha = \frac{\pi a^2}{\rho}.$$

Bezeichnet also l die gesammte Länge, R den gesammten Widerstand des Stromkreises und E die äussere (d. h. nicht durch Selbstinduction hervorgebrachte) electromotorische Kraft, so hat man

$$\frac{dS}{dt} = \frac{E}{l}, \quad \alpha = \frac{l}{R},$$

also

$$\text{10b)} \quad E = RC + l\left(A + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{12}\frac{l^2}{R}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \frac{1}{48}\frac{l^3}{R^2}\frac{\partial^3 C}{\partial t^3} - \frac{1}{180}\frac{l^4}{R^3}\frac{\partial^4 C}{\partial t^4} + \ldots$$

Das erste Glied RC giebt den Teil der electromotorischen Kraft, der lediglich zur Ueberwindung des Widerstandes des Leiters verwendet wird.

Das zweite $l(A+\frac{1}{2})\,\partial C/\partial t$ repräsentirt den Teil derselben, der zur Erhöhung des electrokinetischen Moments des Stromes zu der betreffenden Zeit in der Zeiteinheit verbraucht werden würde, wenn der Strom in allen Punkten eines Querschnittes seines Leiters eine und dieselbe Stärke besässe.

Endlich geben die folgenden Glieder die Correction, die man an der letztgenannten electromotorischen Kraft aus dem Grunde anzubringen hat, weil der Strom in verschiedenen Entfernungen von der Axe auch verschiedene Stärken besitzt. Sie zeigen an, dass in Wahrheit der Strom den Leiter mit grösserer Freiheit durchfliesst, denn seine Dichte braucht nicht im ganzen Querschnitt des Leiters einen und denselben Wert aufzuweisen. Daraus folgt, dass man in der Wirklichkeit zur plötzlichen Aenderung eines Stromes eine geringere electromotorische Kraft aufzuwenden hat, als die Supposition, dass die Stromdichte im Leiter nicht von Ort zu Ort variiren soll, finden lässt.

Durch Integration der Gleichung 10b) ergiebt sich für den Fall, dass der Strom zur Zeit $t=0$ geschlossen wird,

$$11_1)\qquad \int_0^t E\,dt = R\int_0^t C\,dt + l\left(A+\frac{1}{2}\right)C - \frac{1}{12}\frac{l^2}{R}\frac{\partial C}{\partial t} + \dots$$

Hatte er zu dieser Zeit $t=0$ schon eine gewisse Stärke C_0, war er aber bis dahin ganz constant geflossen, so wird

$$11_2)\qquad \int_0^t E\,dt = R\int_0^t C\,dt + l\left(A+\frac{1}{2}\right)(C_t - C_0) - \frac{1}{12}\frac{l^2}{R}\frac{\partial C_t}{\partial t}\dots$$

C_t ist die Stärke, bis zu der er bis zur Zeit t angestiegen ist.

Endlich soll der Strom bis zur Zeit t_1 seine Stärke variiren, von da ab aber constant gleich C_{t_1} bleiben. Man hat dann

$$11_3)\qquad \int_0^{t_1} E\,dt = R\int_0^{t_1} C\,dt + l\left(A+\frac{1}{2}\right)(C_{t_1} - C_0),$$

da die Differentialquotienten sowohl für $t=0$ als für $t=t_1$ verschwinden.

Die letzte Gleichung lehrt aber, dass das Zeitintegral der electromotorischen Kraft, genommen für den ganzen Zeitabschnitt, während dessen die auf einen Querschnitt des Leiters bezogene Stromstärke variirt, bei der wirklichen Verteilung der Stromdichte innerhalb des Leiters ebenso gross ist, wie wenn der Strom in allen Punkten eines Querschnitts des Leiters eine und dieselbe Dichte besässe.

Digression über die mittlere geometrische Entfernung in einer Ebene befindlicher Figuren.

691. Allgemeine Gleichungen. Der Leser wird namentlich aus Art. 685 ersehen haben, dass wir bei der Berechnung der electromagnetischen Wirkung zweier Ströme, die beliebig dicke, gerade, parallele Leiter durchfliessen, das Integral

$$1') \qquad I = \iiiint \log r \, dx \, dy \, dx' \, dy'$$

zu berechnen haben, wo $dx \, dy$ sich auf ein Querschnittelement des einen, $dx' \, dy'$ auf ein solches des andern Leiters bezieht, r die Entfernung dieser Elemente angiebt, und die Integration erst über den ganzen Querschnitt des einen und dann über den des andern Leiters zu erstrecken ist.

Das beregte Integral ist das Product zweier Flächen und des Logarithmus aus einer Linie. Versteht man also unter A_1 und A_2 die Querschnitte der bezüglichen Leiter und setzt

$$1a) \qquad A_1 A_2 \log R = \iiiint \log r \, dx \, dy \, dx' \, dy',$$

so wird R eine Linie bedeuten, und ihre Länge wird weder von der Wahl der Längeneinheit, noch von der des Logarithmensystems abhängen.

Ich bezeichne mit r_1 den Abstand zweier entferntester, mit r_2 den zweier nächster Elemente der Querschnitte und erhalte

$$A_1 A_2 \log r_1 > \iiiint \log r \, dx \, dy \, dx' \, dy' > A_1 A_2 \log r_2.$$

Daher ist

$$\log r_1 > \log R > \log r_2$$

oder

$$r_1 > R > r_2.$$

Diese Ungleichung ist der Grund, weshalb ich R als den *Mittlern geometrischen Abstand* der beiden Figuren A_1 und A_2 von einander bezeichne. Seine Definitionsgleichung ist

$$1b) \qquad R = e^{\frac{1}{A_1 A_2} \iiiint \log r \, dx \, dy \, dx' \, dy'}.$$

Man kann auch von dem mittlern Abstande mehrerer Figuren von einer andern sprechen, die Definitionsgleichung ist leicht aus der einer abzuleiten.

Sind z. B. R_{AC}, R_{BC} die mittlern geometrischen Abstände der bezüglichen Figuren A und B von der Figur C, so hat man in leicht verständlicher Symbolik

$$A.C \log R_{AC} = \iint\limits_A \iint\limits_C \log r' \, dx' \, dy' \, dx \, dy$$

$$B.C \log R_{BC} = \iint\limits_B \iint\limits_C \log r'' \, dx'' \, dy'' \, dx \, dy$$

also

$$C(A \log R_{AC} + B \log R_{BC}) = \iint\limits_C \left\{ \iint\limits_A \log r' \, dx' \, dy' + \iint\limits_B \log r'' \, dx'' \, dy'' \right\} dx \, dy.$$

Versteht man aber unter $dx' \, dy'$ ein Element einer der beiden Figuren A, B, so ist auch

$$C(A \log R_{AC} + B \log R_{BC}) = \iint\limits_C \iint\limits_{A+B} \log r \, dx' \, dy' \, dx \, dy,$$

und da die rechter Hand stehende Grösse nichts anderes als das Product $C(A+B) \, R_{(A+B)C}$ ist, so hat man

$$(A+B) \log R_{(A+B)C} = A \log R_{AC} + B \log R_{BC}.$$

$R_{(A+B)C}$ ist der mittlere geometrische Abstand der Summe der beiden Figuren A, B von der Figur C. Allgemein ist der mittlere geometrische Abstand der Summe der Figuren $A_1, A_2, \ldots$ von der Figur C definirt durch

$$\log R_{\Sigma A_\varkappa C} = \frac{\Sigma (A_\varkappa \log R_{A_\varkappa C})}{\Sigma A_\varkappa}. \tag{2}$$

Natürlich ist es nicht nötig, unter den A und C flächenhafte Figuren zu verstehen, es können ebenso gut Linien oder Punkte sein, nur müssen sie in einer Ebene liegen.

692. Beispiele. Ich gebe zu den vorstehenden Entwickelungen eine Anzahl von Beispielen.

(1) *M. g. A. einer Linie von einem Punkt.* Sei $a = AB$ die Linie, O der Punkt. Man hat

$$a \log R = \int_0^a \log OP' \, dx.$$

Rechnet man x von P, dem Fusspunkte des von O auf AB gefällten

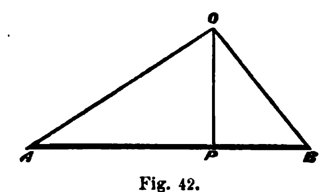


Fig. 42.

Lotes, aus nach beiden Seiten dieses Punktes, so ist

$$a \log R = AP . \log OA + PB . \log OB - \int_0^{AP} \frac{x}{OP'} \frac{dOP'}{dx} dx - \int_0^{PB} \frac{x}{OP'} \frac{dOP'}{dx} dx.$$

Darin ist

$$OP' = \sqrt{\overline{OP}^2 + x^2}, \frac{x}{OP'} \frac{dOP'}{dx} = \frac{x^2}{OP^2 + x^2} = \sin^2 P'OP, dx = \frac{OP}{\cos^2 P'OP} d(P'OP),$$

also, wenn (α) einen Winkel α bezeichnet,

$$a(\log R + 1) = AP . \log OA + PB . \log OB + OP(AOP).$$

(2) *M. g. A. zweier zu einer Linie c senkrechter Strecken.* Die Längen der bezüglichen Strecken seien a, b, ihr Abstand von einander habe den Wert c.

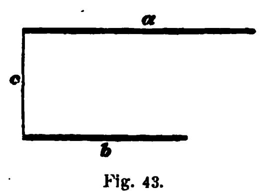


Fig. 43.

Zunächst ist

$$a . b \lg R = \iint \log OP' \, dx \, dx'.$$

P' ist ein bei x' gelegener Punkt der Strecke a, O ein bei x befindlicher Punkt der Strecke b.

Ist also OP das von O auf a gefällte Lot und bezeichnen A_1 und A_2 die Enden von a, so haben wir nach dem ersten Beispiel

$$ab \log R = \int_0^b \left\{ A_1P \log OA_1 + PA_2 \log OA_2 - a + OP(A_1OA_2) \right\} dx.$$

Darin ist

$$OP = c, \ OA_1 = \sqrt{x^2 + c^2}, \ OA_2 = \sqrt{(a-x)^2 + c^2}, \ A_1P = x$$

$$PA_2 = a - x, \ (A_1OA_2) = \operatorname{arctg} \frac{x}{c} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{c}.$$

Nach Ausführung der Integration erhält man

$$\int_0^b A_1P . \lg OA_1 dx = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) \lg \sqrt{b^2 + c^2} - \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{2} c^2 \lg c,$$

$$\int_0^b PA_2 . \lg OA_2 dx = \frac{1}{2}(a^2+c^2)\lg\sqrt{a^2+c^2} - \frac{1}{4}[(a-b)^2+c^2]$$
$$-\frac{1}{2}[a^2-(a-b)^2]\lg\sqrt{(a-b)^2+c^2},$$

$$\int_0^b OP(A_1OA_2)\,dx = c^2\left\{\int_0^{\frac{b}{c}}\operatorname{arctg} x dx + \int_{\frac{a-b}{c}}^{\frac{a}{c}}\operatorname{arctg} x dx\right\}$$

$$= cb\operatorname{arctg}\frac{b}{c} - c^2\lg\sqrt{1+\frac{b^2}{c^2}} + ac\operatorname{arctg}\frac{a}{c} - (a-b)c\operatorname{arctg}\frac{a-b}{c}$$
$$-c^2\lg\sqrt{1+\frac{a^2}{c^2}} + c^2\lg\sqrt{1+\left(\frac{a-b}{c}\right)^2},$$

also

$$ab(2\lg R+3) = (c^2-(a-b)^2)\lg\sqrt{c^2+(a-b)^2} + c^2\lg c$$
$$+(a^2-c^2)\lg\sqrt{a^2+c^2} + (b^2-c^2)\lg\sqrt{b^2+c^2}$$
$$-c(a-b)\operatorname{arctg}\frac{a-b}{c} + ac\operatorname{arctg}\frac{a}{c} + bc\operatorname{arctg}\frac{b}{c}\,.$$

(3) *M. g. A. einer Linie von sich selbst.* Wir haben in der Lösung der vorigen Aufgabe

$$c=0,\ a=b$$

zu setzen und bekommen

$$\lg R = \lg a - \frac{3}{2}$$

oder

$$R = ae^{\frac{3}{2}} = 0{,}22313a.$$

(4) *M. g. A. zweier Linien, deren Verlängerungen sich in einem Punkte O treffen.* Diese Aufgabe ist offenbar die Verallgemeinerung der zweiten, ihre Lösung wird auch genau so wie die dieser durchgeführt.

Man erhält unter Benutzung der Figur

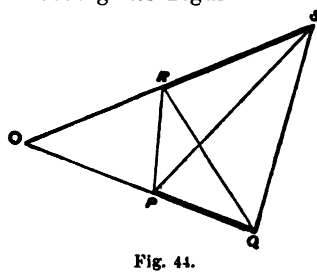


Fig. 44.

$$
\begin{aligned}
PQ\,.\,RS\,(2\log R+3) = {} & \log PR\,(2\,OP\,.\,OR\sin^2 O - PR^2\cos O) \\
& + \log QS\,(2\,OQ\,.\,OS\sin^2 O - QS^2\cos O) \\
& - \log PS\,(2\,OP\,.\,OS\sin^2 O - PS^2\cos O) \\
& - \log QR\,(2\,OQ\,.\,OR\sin^2 O - QR^2\cos O) \\
- \sin^2 O\,\big\{ & OP^2.\,(SPR) - OQ^2.\,(SQR) + OR^2.\,(PRQ) - OS^2.\,(PSQ)\big\}.
\end{aligned}
$$

Der Leser wird sich leicht davon überzeugen, dass er im Grenzfall, wo SR und QP zu PR senkrecht stehen, zu der unter (2) gegebenen Lösung gelangt.

(5) *M. g. A. eines Rechtecks von einem Punkte O.*

Es ist zunächst, wenn CD zur x Axe, CB zur y Axe gewählt wird, und ξ und η die Coordinaten des Punktes O bezeichnen,

$$
\frac{1}{2}AB\,.\,AD\log R = \int_0^a\!\!\int_0^b \log\left((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\right) dx\,dy.
$$

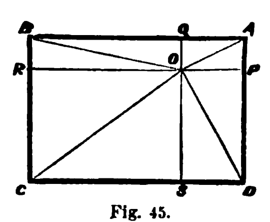


Fig. 45.

Nach Ausführung der leichten Integrationen, resultirt mit Rücksicht auf die Bezeichnungen der Figur 45

$$
\begin{aligned}
AB\,.\,AD\,(2\log R+3) = {} & 2\,OP\,.\,OQ\log OA + 2\,OQ\,.\,OR\log OB \\
& + 2\,OR\,.\,OS\log OC + 2\,OS\,.\,OP\log OD \\
& + OP^2\,(DOA) + OQ^2\,(AOB) \\
& + OR^2\,(BOC) + OS^2\,(COD)
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
ab\log R = {} & (a-\xi)(b-\eta)\log\sqrt{(a-\xi)^2+(b-\eta)^2} + \xi(b-\eta)\log\sqrt{\xi^2+(b-\eta)^2} \\
& + \xi\eta\log\sqrt{\xi^2+\eta^2} + (a-\xi)\eta\log\sqrt{(a-\xi)^2+\eta^2} - \frac{3}{2}ab. \\
& + \frac{1}{2}(a-\xi)^2\left(\operatorname{arctg}\frac{\eta}{a-\xi} + \operatorname{arctg}\frac{b-\eta}{a-\xi}\right) + \frac{1}{2}(b-\eta)^2\left(\operatorname{arctg}\frac{a-\xi}{b-\eta} + \operatorname{arctg}\frac{\xi}{b-\eta}\right) \\
& + \frac{1}{2}\xi^2\left(\operatorname{arctg}\frac{b-\eta}{\xi} + \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}\right) + \frac{1}{2}\eta^2\left(\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta} + \operatorname{arctg}\frac{a-\xi}{\eta}\right).
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man den rechts stehenden Ausdruck mit $d\xi\,d\eta$ und integrirt nach ξ von 0 bis a, nach η von 0 bis b, so erhält man für den

(6) ***M. g. A. eines Rechtecks von sich selbst*** die Gleichung

$$\log R = \log\sqrt{a^2+b^2} - \frac{1}{6}\frac{a^2}{b^2}\log\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\log\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$$
$$+\frac{2}{3}\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \frac{2}{3}\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{b} - \frac{25}{12}.$$

Wenn $a = b$ wird, geht das Rechteck in ein Quadrat über. Der

(7) *M. g. A. Abstand eines Quadrats von sich selbst* ist also bestimmt durch

$$\log R = \log a + \frac{1}{3}\log 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{25}{12}$$

oder durch

$$R = 0{,}44705\,a.$$

(8) *M. g. A. einer Kreislinie von einem Punkte O.*

Es ist

$$2r\pi \log R = \int_0^{2\pi} r \log \rho\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log(r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi)\, r\, d\varphi,$$

wo ρ den Abstand des Punktes O von einem Punkte der Kreislinie, d den vom Centrum dieser Linie angiebt, und φ den Winkel zwischen r und d bezeichnet.

Differenzirt man noch d, so resultirt

$$2r\pi \frac{\partial \log R}{\partial d} = \frac{r}{2d}\int_0^{2\pi} \frac{2d^2 - 2rd\cos\varphi}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi}\, d\varphi$$
$$= \frac{\pi r}{d} + \frac{r}{2d}(d^2 - r^2)\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi}.$$

Das letzte Integral ist aber bekanntlich gleich Null, daher

$$\log R = \frac{1}{2}\log d + \text{Const.}$$

Liegt der Punkt O innerhalb der Kreislinie, so muss die obige Gleichung auch richtig sein, wenn $d = 0$ wird, dann hat man aber nach der allgemeinen Formel

$$\log R = \log r,$$

also muss in diesem Falle

$$\text{Const} = \log r - \frac{1}{2}\log d$$

sein.

Liegt ferner der Punkt O ausserhalb der Kreislinie, so muss $\log R$ offenbar wie $\log d$ unendlich gross werden, also

$$\text{Const} = \frac{1}{2} \log d$$

sein.

Daher ist

$$R_i = r,$$

$$R_a = d.$$

Da R_i von der Lage des Punktes O ganz unabhängig ist, so folgt, dass der mittlere geometrische Abstand irgend einer innerhalb einer Kreislinie befindlichen Figur von dieser Kreislinie gleich dem Radius der Kreislinie ist.

Ferner ist der mittlere geometrische Abstand einer ausserhalb der Kreislinie liegenden Figur von dieser Kreislinie gleich ihrem mittlern geometrischen Abstand von dem Centrum der Kreislinie.

(9) *M. g. A. eines Kreisringes von einem Punkte.* Ist a_1 der äussere, a_2 der innere Radius des Ringes, so hat man

$$\pi(a_1{}^2 - a_2{}^2)\log R = \frac{1}{2}\int_{a_2}^{a_1}\int_0^{2\pi} \log(r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

oder nach partieller Integration

$$\begin{aligned}\pi(a_1{}^2 - a_2{}^2)\log R = &\ \frac{1}{4}a_1{}^2\int_0^{2\pi}\log(a_1{}^2 + d^2 - 2a_1 d\cos\varphi)\,d\varphi \\ &- \frac{1}{4}a_2{}^2\int_0^{2\pi}\log(a_2{}^2 + d^2 - 2a_2 d\cos\varphi)\,d\varphi \\ &- \frac{1}{4}\int_{a_2}^{a_1}\int_0^{2\pi} r^2\,\frac{2r - 2d\cos\varphi}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi}\,dr\,d\varphi.\end{aligned}$$

Daraus schliesst man nach den Resultaten des vorangehenden Problems:

Der mittlere geometrische Abstand einer ausserhalb eines Kreisringes liegenden Figur von diesem Kreisringe ist gleich ihrem mittlern geometrischen Abstand von dem Centrum des Kreisringes;

Der mittlere geometrische Abstand einer innerhalb eines Kreisringes befindlichen Figur folgt der Gleichung

$$\log R = \frac{a_1{}^2\log a_1 - a_2{}^2\log a_2}{a_1{}^2 - a_2{}^2} - \frac{1}{2}$$

und ist gänzlich unabhängig von der speciellen Form, die diese Figur besitzt.

Für einen Punkt, der in der Substanz des Kreisringes im Abstande ρ von seinem Centrum liegt, ist hiernach die mittlere geometrische Entfernung von diesem Kreisringe nach Art. 691, 2) durch die Gleichung

$$\pi(a_1^2-a_2^2)\log R=\pi(\rho^2-a_2^2)\log\rho+\pi(a_1^2-\rho^2)\left(\frac{a_1^2\log a_1-\rho^2\log\rho}{a_1^2-\rho^2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\pi\left(a_1^2\log a_1-a_2^2\log\rho-\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{2}\rho^2\right)$$

bestimmt.

(10) *M. g. A. eines Kreisringes von sich selbst.* Die allgemeine Gleichung ist nach der letzten Formel des vorangehenden Beispiels

$$\pi^2(a_1^2-a_2^2)^2\log R=\pi\int_0^{2\pi}\int_{a_2}^{a_1}\left(a_1^2\log a_1-a_2^2\log\rho-\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{2}\rho^2\right)\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Daraus folgt

$$\log R=\log a_1-\frac{a_2^4}{(a_1^2-a_2^2)^2}\log\frac{a_1}{a_2}+\frac{1}{4}\,\frac{3a_2^2-a_1^2}{a_1^2-a_2^2}.$$

Für $a_2=0$, $a_1=a$ geht der Ring in eine Kreisfläche vom Radius a über, man erhält also für den

(11) *M. g. A. einer Kreisfläche von sich selbst* die Gleichung

$$\log R=\log a-\frac{1}{4}$$

oder

$$R=ae^{-\frac{1}{4}}=0{,}7788\,a.$$

Wird ferner $a_1=a_2=a$, so transformirt sich der Kreisring in eine Kreislinie, also:

(12) *M. g. A. einer Kreislinie von sich selbst*

$$R=a,$$

wie auch daraus erhellt, dass der *m. g. A.* einer innerhalb einer Kreislinie gelegenen Figur von dieser Kreislinie ganz unabhängig von ihrer besondern Form gleich dem Radius der Kreislinie ist.

Selbstinduction einer kurzen weiten Rolle.

693. Ihre Anwendung findet die auseinandergesetzte Theorie vom mittlern geometrischen Abstand bei der Bestimmung der Selbstinduction einer kurzen, aber weiten Rolle.

Besteht zunächst die Rolle aus einer einzigen weiten Windung eines dicken Drahtes, der in seiner ganzen Substanz gleichmässig von einem Einheitsstrom durchzogen wird, so berechnet man erst den mittlern geometrischen Abstand des Querschnitts des Drahtes von sich selbst. Der

Coefficient der Selbstinduction dieses Drahtes ist dann (Art. 706) ebenso gross wie der Coefficient der gegenseitigen Induction zweier unendlich dünner Drähte, die ebenso gebogen sind wie die Axe des Windungsdrahtes und die von einander um jenen mittlern geometrischen Abstand entfernt sind.

Im allgemeinen wird man die Rolle nicht aus einer Windung eines dicken Drahtes, sondern aus vielen neben und über einander gelagerten Windungen eines dünnen Drahtes herstellen.

Ein Längsschnitt durch die Rolle durchschneidet alle Drähte und hat — wenn ebenso viele Windungen neben als über einander liegen — die Form eines Quadrats. Denkt man sich nun, dass dieser Schnitt gänzlich von der Substanz der Drahtwindungen ausgefüllt wird, so wird man immer noch

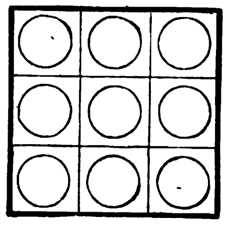
$$L = n^2 M$$

setzen können, wenn n die Anzahl der Windungen angiebt und M den Coefficienten der gegenseitigen Induction zweier Windungen aus sehr dünnem Draht, deren Form der der mittlern Windung der Rolle gleich ist, und deren Abstand von einander ebenso gross wie der mittlere geometrische Abstand des gedachten Schnittes von sich selbst ist, bedeutet.

Das gilt aber nur unter der Annahme, dass der ganze Schnitt vom Strome in gleichmässiger Stärke durchflossen wird. In der Praxis lässt sich das natürlich nicht realisiren, weil die Windungen von einander isolirt sein müssen, der Strom also nicht durch den ganzen Schnitt, sondern durch einzelne symmetrisch verteilte Stellen hindurchfliesst. Man muss deshalb die Grösse $n^2 M$ noch mit einer Correction versehen, die sich leicht mit Hilfe der in Art. 692 gegebenen Entwickelungen berechnen lässt.

Des leichtern Verständnisses wegen bitte ich den Leser sich die beistehende Figur 46 vor Augen zu halten.

Sei d der Durchmesser des Windungsdrahtes ohne Berücksichtigung seiner isolirenden Hülle und D der Abstand der Axe zweier nächster Drahtwindungen.


Fig. 46.

Offenbar beruht unsere frühere vereinfachende Annahme auf der Ersetzung eines Drahtes vom kreisförmigen Querschnitte $\pi d^2/4$ durch einen vom quadratischen Querschnitte D^2. Wir haben daher zunächst den Ueberschuss der Selbstinduction einer Längeneinheit eines cylindrischen Drahtes vom Durchmesser d über der einer Längeneinheit eines prismaschen Drahtes von der Querkante D zu bestimmen. Dieser ist aber dem obigen zufolge gleich

$$C' = 2 \log R_D - 2 \log R_d,$$

wenn R_d den mittlern geometrischen Abstand einer Kreisfläche vom Durchmesser d von sich selbst, und R_D den eines Quadrats von der Seite D von sich selbst angiebt.

Nach Art. 692, (7) und (11) ist nun

$$\log R_d = \log \frac{d}{2} - \frac{1}{4},$$

$$\log R_D = \log D + \frac{1}{3} \log 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{25}{12},$$

also

$$C' = 2\left(\log \frac{D}{d} + \frac{4}{3} \log 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{11}{6}\right)$$

oder

$$C' = 2\left(\log \frac{D}{d} + 0{,}1380605\right).$$

Das ist die Correction für die Selbstinduction einer Windung. Wir haben ferner auch noch die Induction der umliegenden Windungen auf diese Windung zu corrigiren.

Man braucht nur die die betrachtete Windungen umgebenden 8 nächsten Windungen zu berücksichtigen und erhält nach derselben Methode als Correction

$$C'' = -2 . 0{,}01971.$$

Die gesammte Correction wird hiernach

$$C = C' + C'' = 2\left(\log \frac{D}{d} + 0{,}11835\right).$$

Die Selbstinduction der Rolle ist also unter den obwaltenden Umständen

$$L = n^2 M + 2l\left(\log \frac{D}{d} + 0{,}11835\right),$$

wo l die Länge des Windungsdrahtes der Rolle angiebt.

Cap. XIV.

Kreisströme.

Magnetisches Potential eines Kreisstromes.

694. Nach Art. 411 und 484 ist das magnetische Potential einer Strombahn auf einen Einheitspol numerisch gleich dem körperlichen Winkel, den diese Bahn in dem betreffenden Pole bildet.

Im speciellen Falle, wo die Strombahn die Form eines Kreises hat, gehört dieser Winkel einem Kegel zweiten Grades an. Liegt der Punkt, auf den das Potential sich bezieht, auf der Axe der Bahn, so ist der Kegel ein Kreiskegel, das Potential wird durch den Flächeninhalt der sphärischen Kreisfläche gemessen, die sein Mantel von der um den betreffenden Punkt geschlagenen Einheitskugel ausschneidet; liegt der Punkt ausserhalb der Axe der Strombahn, so ist der Kegel elliptisch, das Potential wird dann durch den Inhalt der sphärischen Ellipsenfläche, die sein Mantel von der gedachten Einheitskugel ausschneidet, dargestellt.

Nach diesen Angaben würde sich das magnetische Potential eines Kreisstromes durch elliptische Integrale dritter Art direct berechnen lassen. Indessen halte ich es doch für besser, dieses Potential in eine unendliche nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe zu entwickeln. Bei einer solchen Entwickelung hat man es zwar nicht mehr mit einem geschlossenen Ausdruck zu tun, und muss sich in jedem Falle die genügende Anzahl von Gliedern ausrechnen, allein an Kugelfunctionen lassen sich alle mathematischen Operationen mit grosser Leichtigkeit ausführen, und das wiegt den angeführten geringen Nachteil voll auf.

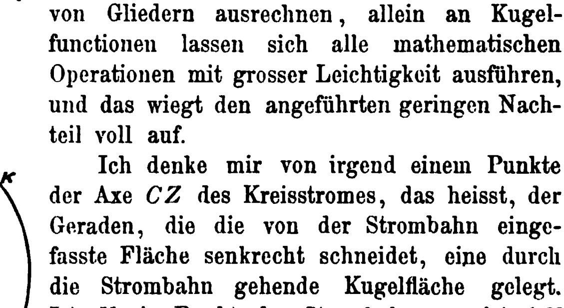


Fig. 47.

Ich denke mir von irgend einem Punkte der Axe CZ des Kreisstromes, das heisst, der Geraden, die die von der Strombahn eingefasste Fläche senkrecht schneidet, eine durch die Strombahn gehende Kugelfläche gelegt. Ist H ein Punkt der Strombahn, so ist CH der Radius dieser Kugelfläche.

Den Punkt A, wo die Axe CZ der Strombahn die Kugelfläche schneidet, nehme ich zum Pol dieser Kugelfläche, und nenne Z einen auf der Axe, R einen irgendwie im Raume gelegenen Punkt.

Ich setze

$$
\begin{aligned}
CH &= c, \quad HCO = \alpha; \\
OC &= b = c\cos\alpha, \\
OH &= a = c\sin\alpha; \\
CR &= r, \quad ACR = \vartheta \\
CZ &= z.
\end{aligned}
$$

Das magnetische Potential einer Strombahn ist ganz allgemein gleich dem magnetischen Potential einer von ihr begrenzten, zur Stärke Eins magnetisirten Schale. Auf die Form der Schale kommt es nicht an, nur muss ihre Kante mit der betreffenden Strombahn coincidiren. In unserem Falle dürfen wir also als solche Schale den von der Strombahn abgeschnittenen, nach der Richtung CZ zu liegenden Teil der Kugelfläche ansehen.

Nun wissen wir aus Artikel 670, dass das magnetische Potential einer solchen zur Stärke Eins magnetisirten Schale

$$
1') \qquad \omega = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial r}(rV)
$$

ist, wenn V das gewöhnliche Potential derselben Schale angiebt, falls man sie sich mit Materie zur Flächendichte Eins belegt denkt. Unsere Aufgabe reducirt sich daher auf die Bestimmung dieses Potentials V.

Ich nehme erst an, dass der Punkt Z, auf den das Potential V sich bezieht, der Axe CZ angehört. Ist dann dS ein in P gelegenes Element der Schale, so hat das gewöhnliche Potential dieses Elements in Z den Wert

$$
dV_1 = \frac{dS}{ZP}.
$$

Indem man das Reciproke der Strecke ZP nach Kugelfunctionen entwickelt, resultirt

$$
a_1') \qquad
\begin{aligned}
dV_1 &= \frac{dS}{c}\left\{P_0 + P_1\frac{z}{c} + P_2\frac{z^2}{c^2} + \ldots + P_i\frac{z^i}{c^i} + \ldots\right\}, \quad z < c \\
dV_1' &= \frac{dS}{z}\left\{P_0 + P_1\frac{c}{z} + P_2\frac{c^2}{z^2} + \ldots + P_i\frac{c^i}{z^i} + \ldots\right\}, \quad z > c.
\end{aligned}
$$

Von der ersten Darstellung hat man Gebrauch zu machen, wenn z kleiner als c ist, von der zweiten, wenn z einen numerisch grössern Wert als c besitzt.

Ist aber

$$
\cos OCP = \mu,
$$

so wird

$$
dS = -c^2\,d\mu\,d\varphi, \quad V = \int_0^{2\pi}\int_1^{\cos\alpha} dV,
$$

also

$$\text{a}_1)\quad \begin{aligned} V_1 &= 2\pi c\left\{\int_{\mu_1}^{1} P_0\, d\mu + \frac{z}{c}\int_{\mu_1}^{1} P_1\, d\mu + \ldots + \frac{z^i}{c^i}\int_{\mu_1}^{1} P_i\, d\mu + \ldots\right\},\ z < c \\ V_1' &= 2\pi\frac{c^2}{z}\left\{\int_{\mu_1}^{1} P_0\, d\mu + \frac{c}{z}\int_{\mu_1}^{1} P_1\, d\mu + \ldots + \frac{c^i}{z^i}\int_{\mu_1}^{1} P_i\, d\mu + \ldots\right\},\ z > c. \end{aligned}$$

Die Functionen P genügen bekanntlich der Differentialgleichung

$$i(i+1)P_i + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial P_i}{\partial\mu}\right] = 0,$$

woraus durch Integration nach μ von μ_1 bis 1 folgt

$$\text{b)}\qquad \int_{\mu}^{1} P_i\, d\mu = \frac{1-\mu^2}{i(i+1)}\frac{\partial P_i}{\partial\mu}.$$

Diese Gleichung gilt, wie man sieht, nur wenn $i > 0$ ist, für $i = 0$ hat man aber $P_0 = 1$, also

$$\int_{\mu}^{1} P_0\, d\mu = 1 - \mu.$$

Der Differentialquotient von P_i nach μ wird uns sehr oft in unsern Untersuchungen entgegentreten, ich bezeichne ihn daher durch das besondere Symbol P_i', setze also

$$\text{c)}\qquad \frac{\partial P_i}{\partial\mu} = P_i'.$$

Explicite Ausdrücke für die sieben ersten Functionen P_i' wird der Leser in Art. 697b finden.

Wir haben einstweilen

$$\text{a}_2)\quad \begin{aligned} V_1 &= 2\pi c\left\{1-\mu_1 + \frac{1-\mu_1^2}{1.2}\frac{z}{c}P_1'(\alpha) + \ldots + \frac{1-\mu_1^2}{i(i+1)}\frac{z^i}{c^i}P_i'(\alpha) + \ldots\right\}; z < c, \\ V_1' &= 2\pi\frac{c^2}{z}\left\{1-\mu_1 + \frac{1-\mu_1^2}{1.2}\frac{c}{z}P_1'(\alpha) + \ldots + \frac{1-\mu_1^2}{i(i+1)}\frac{c^i}{z^i}P_i'(\alpha) + \ldots\right\}; z > c. \end{aligned}$$

Zu denselben Ausdrücken gelangt man auch nach der directen Methode. Der körperliche Winkel eines Kreises in einem in seiner Axe gelegenen Punkt z ist nämlich, wie der Leser leicht aus den Anleitungen des Art. 413 ersehen wird,

$$\omega = 2\pi\left(1 - \frac{z - c\cos\alpha}{HZ}\right).$$

Entwickelt man $1/HZ$ nach Kugelfunctionen, so wird

$$\omega = 2\pi \left\{ (\cos\alpha + 1) + [P_1(\alpha)\cos\alpha - P_0(\alpha)]\frac{z}{c} + \dots \right.$$
$$\left. + [P_i(\alpha)\cos\alpha - P_{i-1}(\alpha)]\frac{z^i}{c^i} + \dots \right\}; \; z < c,$$

$$\omega' = 2\pi \left\{ [P_0(\alpha)\cos\alpha - P_1(\alpha)]\frac{c}{z} + \dots \right.$$
$$\left. + [P_i(\alpha)\cos\alpha - P_{i+1}(\alpha)]\frac{c^{i+1}}{z^{i+1}} + \dots \right\}; \; z > c,$$

und diese Formeln sagen nach der Theorie der zonalen Kugelfunctionen (Art. 138) dasselbe wie die auf der folgenden Seite unter 1) gegebenen aus.

Man weiss nun, dass V, wie auch der Punkt R, auf den es sich bezieht, gelegen sein mag, sich nach zonalen harmonischen Functionen $P(\vartheta)$ vom Argument ϑ muss entwickeln lassen, es ist also für jeden beliebigen Punkt R

$$\text{a}')\quad \begin{aligned} V &= \frac{1}{c}\left\{ A_0 P_0(\vartheta) + \frac{r}{c}A_1 P_1(\vartheta) + \dots + \frac{r^i}{c^i}A_i P_i(\vartheta) + \dots \right\}; \; r < c, \\ V' &= \frac{1}{r}\left\{ A_0 P(\vartheta) + \frac{c}{r}A_1 P_1(\vartheta) + \dots + \frac{c^i}{r^i}A_i P_i(\vartheta) + \dots \right\}; \; r > c. \end{aligned}$$

Fällt r mit z zusammen, so gehen alle $P_i(\vartheta)$ in Eins über, r wird gleich z und da dann $V = V_1$, $V' = V_1'$ wird, so hat man allgemein für jeden Punkt des Raumes

$$\text{a})\quad \begin{aligned} V &= 2\pi c \left\{ 1 - \mu_1 + \frac{1-\mu_1^2}{1.2}\frac{r}{c}P_1'(\alpha)P_1(\vartheta) + \dots \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1-\mu_1^2}{i(i+1)}\frac{r^i}{c^i}P_i'(\alpha)P_i(\vartheta) + \dots \right\}; \; r < c, \\ V' &= 2\pi\frac{c^2}{r}\left\{ 1 - \mu_1 + \frac{1-\mu_1^2}{1.2}\frac{c}{r}P_1'(\alpha)P_1(\vartheta) + \dots \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1-\mu_1^2}{i(i+1)}\frac{c^i}{r^i}P_i'(\alpha)P_i(\vartheta) + \dots \right\}; \; r > c. \end{aligned}$$

Darin ist, um es nochmals zu recapituliren,

$$\text{d})\quad \mu_1 = \cos\alpha, \; r = CR, \; \vartheta = ACR.$$

695. Diese Entwickelungen lehren uns unmittelbar das gesuchte magnetische Potential unserer kreisförmigen Strombahn kennen. Es war nämlich

$$\text{f}')\quad \omega = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial r}(rV).$$

Wir haben also

$$\omega = -2\pi\left\{1 - \cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{1}\frac{r}{c}P_1'(\alpha)P_1(\vartheta) + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2\alpha}{i}\frac{r^i}{c^i}P_i'(\alpha)P_i(\vartheta) + \dots\right\};\ r < c,$$

1)

$$\omega' = 2\pi\sin^2\alpha\left\{\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}P_1'(\alpha)P_1(\vartheta) + \frac{1}{3}\frac{c^3}{r^3}P_2'(\alpha)P_2(\vartheta) + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{i+1}\frac{c^{i+1}}{r^{i+1}}P_i'(\alpha)P_i(\vartheta) + \dots\right\};\ r > c.$$

Die Reihenentwickelung ω convergirt für alle r, die kleiner als c sind, sie gilt also für alle innerhalb der Kugelfläche (c) gelegenen Punkte; die Reihenentwickelung ω' convergirt für alle r, die c übersteigen, sie gilt also für alle von der Kugelfläche ausgeschlossenen Punkte des Raumes. Auf der Kugelfläche ist $r = c$, doch giebt in diesem Falle ω nur dann denselben Wert wie ω', wenn $\vartheta > \alpha$, das heisst der betrachtete Punkt nicht auf der Schale selbst, sondern auf dem Rest der Kugelfläche liegt, dagegen wird für $\vartheta < \alpha$, also für einen auf der Schale selbst befindlichen Punkt

$$\omega' = \omega + 4\pi.$$

Die Wahl des Kugelmittelpunktes C ist völlig willkürlich, lässt man C mit O zusammenfallen, so bildet die kreisförmige Strombahn den Aequator der Grundkugel, man hat also $\alpha = \pi/2$.

Nun ist nach Art. 138, 1b)

$$P_i' = \sum_p\left[(-1)^p\frac{(2i-2p)!\,(i-2p)}{2^i p!\,(i-p)!\,(i-2p)!}(\cos\alpha)^{i-2p-1}\right].$$

Da die Summation sich auf alle ganzen zwischen 0 und $n/2$ liegenden Zahlen p erstreckt, so wird

$$P_{2s}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$P_{2s+1}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^s\frac{(2s+2)!}{2^{2s+1}(s+1)!\,s!} = (-1)^s\frac{1.3.5\dots(2s-1)}{2.4.6\dots2s}.$$

Wir haben also

$$\omega = -2\pi\left\{1 + \frac{r}{c}P_1(\vartheta) - \frac{1}{2}\frac{r^3}{c^3}P_3(\vartheta) + \dots \right.$$

2)

$$\left. + (-1)^s\frac{1.3.5\dots(2s-1)}{2.4.6\dots2s}\frac{r^{2s+1}}{c^{2s+1}}P_{2s+1}(\vartheta) + \dots\right\};\ r < c,$$

$$\omega' = 2\pi\left\{\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}P_1(\vartheta) - \frac{1.3}{2.4}\frac{c^4}{r^4}P_3(\vartheta) + \dots \right.$$

$$\left. + (-1)^s\frac{1.3.5\dots(2s+1)}{2.4.6\dots(2s+2)}\frac{c^{2s+2}}{r^{2s+2}}P_{2s+1}(\vartheta) + \dots\right\};\ r > c,$$

Ausdrücke, in denen nur die harmonischen Functionen ungerader Ordnung vertreten sind.

Potentielle Energie zweier Kreisströme auf einander.

696. Die potentielle Energie zweier Ströme aufeinander ist ebenso gross, aber von entgegengesetztem Zeichen, wie die zweier magnetischer Schalen, wir werden sie daher nach den in Art. 419b gegebenen Regeln zu berechnen haben.

Strombahnen coaxial. Ich beginne mit dem einfachern Fall, wo die beiden Strombahnen eine und dieselbe Axe besitzen. Die beiden Grundkugeln sind dann concentrisch, und als die die Bahnen ersetzenden Schalen können wir die zwei coaxialen von den Strombahnen abgeschnittenen Teile der bezüglichen Kugelflächen ansehen.

Darstellung durch harmonische Reihen. Es seien die Radien der beiden Kugelflächen c_1 und c_2, wo $c_1 > c_2$. Der im vorigen Artikel mit α bezeichnete Winkel habe hier die bezüglichen Grössen α_1 und α_2. Giebt dann ω_1 den Wert des Potentials der erstern, äussern, Schale auf einen innerhalb ihrer Grundkugel befindlichen Punkt, so wird die Arbeit, die man beim Entfernen der zweiten, innern, Schale aus ihrer betreffenden Lage bis in die Unendlichkeit zu leisten hat, gleich dem Flächenintegral

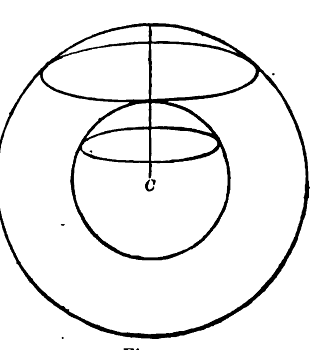


Fig. 48.

$$M = -\iint \frac{\partial \omega_1}{\partial r}\, dS, \tag{1'}$$

erstreckt über die Fläche S der zweiten Schale. Diese Arbeit ist aber nichts anderes als die potentielle Energie der äussern Schale auf die innere.

Man erhält also für die potentielle Energie der beiden Strombahnen auf einander

$$M = \iint \frac{\partial \omega_1}{\partial r}\, dS = -2\pi c_2^2 \int_{\mu_2}^{1} \frac{\partial \omega_1}{\partial r}\, d\mu_2.$$

Nun ist, weil r in unserm Falle gleich c_2 ist,

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial r}\right)_{r=c_2} = -2\pi \sin^2\alpha_1 \left\{\frac{1}{c_1} P_1'(\alpha_1) P_1(\vartheta) + \ldots + \frac{c_2^{i-1}}{c_1^i} P_i'(\alpha_1) P_i(\vartheta) + \ldots\right\},$$

also wird

$$M = 4\pi^2 \sin^2\alpha_1 c_2^2 \left\{\frac{1}{c_1} P_1'(\alpha_1) \int_{\mu_2}^{1} P_1(\vartheta)\, d\mu + \ldots + \frac{c_2^{i-1}}{c_1^i} P_i'(\alpha_1) \int_{\mu_2}^{1} P_i(\vartheta)\, d\mu + \ldots\right\}$$

oder zufolge des unter b), c) in Art. 694 angeführten Satzes über zonale Functionen

$$1_1 a) \qquad M = 4\pi^2 \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 c_2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{c_2}{c_1} P_1'(\alpha_1) P_1'(\alpha_2) + \dots + \frac{1}{i(i+1)} \frac{c_2^i}{c_1^i} P_i'(\alpha_1) P_i'(\alpha_2) + \dots \right\}.$$

Darstellung durch elliptische Integrale. Eine zweite Darstellung für M erhalten wir durch directe Auswertung des Ausdrucks

$$M = \iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds'.$$

Es ist nämlich, wenn die beiden Kreise eine und dieselbe Axe besitzen, ihre Ebenen also parallel sind, und zu der ihre Mittelpunkte verbindenden Linie b senkrecht stehen, und A, a ihre bezüglichen Radien bezeichnen,

$$r^2 = A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa\cos(\varphi - \varphi'),$$

$$\varepsilon = \varphi - \varphi', \quad ds = a\,d\varphi, \quad ds' = A\,d\varphi',$$

mithin

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Aa\cos(\varphi - \varphi')\, d\varphi\, d\varphi'}{\sqrt{A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa\cos(\varphi - \varphi')}}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_\varphi^{\varphi + 2\pi} \frac{Aa\cos\psi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa\cos\psi}}$$

oder

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Aa\cos\psi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa\cos\psi}}.$$

Die Integration nach φ ist unmittelbar auszuführen und ergiebt

$$M = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{Aa\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa\cos\psi}} = 4\pi \int_0^{\pi} \frac{Aa\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa\cos\psi}},$$

woraus in bekannter Transformation

$$1_1 b) \qquad M = -4\pi\sqrt{Aa}\left\{\left(c - \frac{2}{c}\right) F(c) + \frac{2}{c} E(c)\right\}$$

folgt. Darin ist F das vollständige elliptische Integral erster, E das zweiter Gattung, c der Modul und bestimmt durch

$$c = \frac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2 + b^2}}.$$

Setzt man

$$(A+a)^2+b^2=r_1^2,\quad (A-a)^2+b^2=r_2^2,$$

so wird

$$c=\frac{\sqrt{r_1^2-r_2^2}}{r_1}.$$

Für manche Anwendungen tut man besser, statt des so definirten Modul den

$$c'=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$$

zu wählen, da dann

$$\sqrt{1-c^2}=\frac{1-c'}{1+c'},\quad c=\frac{2\sqrt{c'}}{1+c'},$$

$$F(c)=(1+c')\,F(c'),\; E(c)=\frac{2}{1+c'}E(c')-(1-c')\,F(c')$$

wird, so hat man auch

$$1_1c)\qquad M=8\pi\sqrt{Aa}\,\frac{1}{\sqrt{c'}}\,[F(c')-E(c')].$$

697a. Ströme gegen einander verdreht. Bei der Deduction der potentiellen Energie zweier gegen einander verdrehter Kreisströme aus der entsprechenden Energie coaxialer Ströme verfährt man genau so wie bei der Ableitung des Potentials eines Kreisstromes auf einen beliebig gelegenen Punkt aus dem auf einen seiner Axe angehörenden Bezeichnet also ϑ den Winkel, unter dem die Axen der Kreisströme sich schneiden (Fig. 49), so hat man

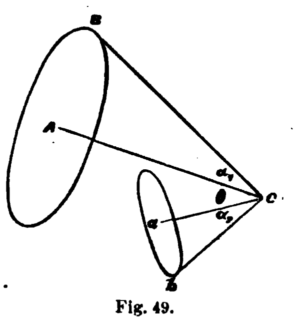


Fig. 49.

$$1_2a)\qquad M=4\pi^2\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\,c\left\{\frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1}P_1'(\alpha_1)P_1'(\alpha_2)P_1(\vartheta)+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{i(i+1)}\frac{c_2^{\,i}}{c_1^{\,i}}P_i'(\alpha_1)P_i'(\alpha_2)P_i(\vartheta)+\dots\right\}$$

und das ist die potentielle Energie, die von der gegenseitigen Einwirkung zweier von Einheitsströmen durchflossener Kreisbahnen herrührt, wenn ihre Axen, d. h. die in ihren bezüglichen Mittelpunkten zu den von ihnen umspannten Kreisflächen errichteten Normalen sich in einem Punkte c und unter einem Winkel ϑ schneiden. c_1, c_2 sind die Entfernungen der bezüglichen Bahnpunkte vom Schnittpunkte C der Axen, α_1, α_2 die Winkel,

welche die bezüglichen Axen mit den von C nach den bezüglichen Bahnen gezogenen Vectoren einschliessen. Es muss noch bemerkt werden, dass in der Entwickelung von M von den beiden Strecken c_1, c_2 die grössere mit c_1 zu bezeichnen ist.

697b. Ich habe schon angedeutet, dass die Functionen P_i' uns noch oft in unsern Rechnungen entgegentreten werden, ich lasse daher eine Zusammenstellung der Werte der 7 ersten dieser Functionen ausgedrückt durch $\mu = \cos\lambda$ und $\nu = \sin\lambda$ folgen.

$$P_0' = 0,$$

$$P_1' = 1,$$

$$P_2' = 3\mu,$$

$$P_3' = \frac{3}{2}(5\mu^2 - 1) = 6\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\nu^2\right),$$

$$P_4' = \frac{5}{2}\mu(7\mu^2 - 3) = 10\mu\left(\mu^2 - \frac{3}{4}\nu^2\right),$$

$$P_5' = \frac{15}{8}(21\mu^4 - 14\mu^2 + 1) = 15\left(\mu^4 - \frac{3}{2}\mu^2\nu^2 + \frac{1}{8}\nu^4\right),$$

$$P_6' = \frac{21}{8}\mu(33\mu^4 - 30\mu^2 + 5) = 21\mu\left(\mu^4 - \frac{5}{2}\mu^2\nu^2 + \frac{5}{8}\nu^4\right).$$

Der Leser wird sie leicht durch die Formel

$$P_i' = \frac{\partial P_i}{\partial \mu}$$

aus der Theorie der zonalen Kugelfunctionen (Art. 138) verificiren können.

698. Für gewisse Probleme ist es vorteilhafter die $P'(\alpha_1)$ und $P'(\alpha_2)$ durch Verhältnisse linearer Grössen auszudrücken.

Sei a der Radius des kleinern Stromkreises, b der Abstand seiner Ebene von dem Punkte C, wo seine Axe die des zweiten Stromkreises trifft. Die entsprechenden Grössen mögen beim grössern Stromkreis durch A und B bezeichnet werden.

Ich setze noch

$$C^2 = A^2 + B^2, \; c^2 = a^2 + b^2$$

und erhalte

$$\cos\alpha_1 = \frac{B}{C}, \; \cos\alpha_2 = \frac{b}{c},$$

somit unter Benutzung der in Art. 697b für die P' gegebenen Ausdrücke und der in Art. 138 unter 1c) für die $P(\vartheta)$ fixirten Darstellung

$$1_2b) \quad M = 1.2\pi^2 \frac{A^2}{C^3} a^2 \cos\vartheta$$
$$+ 2.3\pi^2 \frac{A^2}{C^5} Ba^2 b\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right)$$
$$+ 3.4\pi^2 \frac{A^2}{C^7}\left(B^2 - \frac{A^2}{4}\right)a^2\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)\left(\cos^3\vartheta - \frac{3}{2}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right)$$
$$+ - - - - - - - - - - - - -$$

Für $\vartheta = 0$ werden die Kreisströme parallel und

$$1_1d) \quad M = \pi^2 \frac{A^2 a^2}{C^3}\left(1.2 + 2.3\frac{B.b}{C^2} + 3.4\frac{\left(B^2 - \frac{A^2}{4}\right)\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)}{C^4} + \ldots\right).$$

Magnetisches Potential einer Rolle auf einen Einheitspol.

699. Die Rolle möge einen rechteckigen Axialschnitt haben und sei in der Tiefe ξ und Breite η mit Drahtwindungen belegt, die alle von einem und demselben Einheitsstrom durchflossen werden. Die halbe innere Weite der Rolle sei gleich $A - \xi/2$, die halbe äussere $A + \xi/2$, ferner sei der Abstand eines festen auf ihrer Axe liegenden Punktes C, den ich zum Mittelpunkte einer mit dem Radius C geschlagenen Grundkugel wähle (Art. 694), von ihrer Vorderfläche $B - \eta/2$, von ihrer Hinterfläche $B + \eta/2$.

Das magnetische Potential dieser Rolle ist dann auf einen Punkt, der innerhalb der Grundkugel liegt,

$$\Omega = \int_{A-\xi/2}^{A+\xi/2} \int_{B-\eta/2}^{B+\eta/2} \omega \, dy \, dx,$$

wo nach Art. 695, 1)

$$\omega = -2\pi\left\{1 - \cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{1} \cdot \frac{r}{C} P_1'(\alpha) P_1(\vartheta) + \ldots + \frac{\sin^2\alpha}{i} \frac{r^i}{C^i} P_i'(\alpha) P_i(\vartheta) + \ldots\right\}$$

ist.

x steht für den Radius einer Windung, y für den Abstand der Ebene einer solchen von dem Punkte C, man hat daher

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad C = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die Werte für die P' sind in Art. 697 b gegeben.

Als Function von x und y ist daher

$$\omega = -2\pi \left\{ 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2 r}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[P_1(\vartheta) + \frac{3}{2}\frac{yr}{x^2+y^2} P_2(\vartheta) + 2\frac{\left(y^2 - \frac{x^2}{4}\right) r^2}{(x^2+y^2)^2} P_3(\vartheta) + \ldots \right] \right\}.$$

Bezeichnet man den Wert, den ω erhält, wenn x durch $A + x$, y durch $B + y$ ersetzt wird, mit ω_1, so wird hiernach

$$\Omega = \int\limits_{-\eta/2}^{+\eta/2} \int\limits_{-\xi/2}^{+\xi/2} \omega_1 \, dx \, dy.$$

Man könnte nun den expliciten Ausdruck für Ω durch directe Integration erhalten, bequemer ist aber meistenteils das folgende Verfahren, das dem Leser auch bei vielen andern Gelegenheiten Dienste leisten wird.

Sei P eine Function der Variabeln x und y und $\overline{P}$ der gesuchte Mittelwert dieser Function, also

$$\overline{P} = \frac{1}{\xi\eta} \int\limits_{-\eta/2}^{+\eta/2} \int\limits_{-\xi/2}^{+\xi/2} P \, dx \, dy.$$

Offenbar ist der Calcul, durch den man $\overline{P}\xi\eta$ erhält, genau derselbe, wie der, durch den Ω zu eruiren ist.

Bezeichnet aber $f(P_0)$ den Wert, den eine Function von P für die speciellen Werte $x = 0$, $y = 0$ annimmt, so hat man nach dem Maclaurinschen Satz

$$P = P_0 + x\frac{\partial P_0}{\partial x} + y\frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + \ldots..$$

Daher

$$\overline{P} = P_0 + \frac{1}{24}\left(\xi^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{1920}\left(\xi^4 \frac{\partial^4 P_0}{\partial x^4} + \eta^4 \frac{\partial^4 P_0}{\partial y^4}\right) + \frac{1}{576}\xi^2\eta^2 \frac{\partial^4 P_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \ldots$$

In unserem Falle ist*), wenn

$$\Pi = -\frac{1}{2\pi}\omega_1, \quad \Pi''_x = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2}, \quad \Pi''_y = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2};$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad r^i P_i(\vartheta) = \frac{1}{\Pi_i}$$

gesetzt wird,

---

*) Ich gebe hier und im folgenden die allgemeinen Werte für die betreffenden Grös-en, um dem Leser, der zur weiteren Annäherung auch noch die folgenden Differentialquotienten berechnen will, ein wenig Mühe zu sparen.
Anm. d. Uebers.

$$\Pi = 1 - \frac{y}{\rho} + \frac{x^2}{\rho^3}\left(\frac{1}{\Pi_1} + \frac{3}{2}\frac{y}{\rho^2 \Pi_2} + \frac{2y^2 - \frac{x^2}{2}}{\rho^4 \Pi_3} + \frac{5}{2}\frac{y(y^2 - \frac{3}{4}x^2)}{\rho^6 \Pi_4} + 3\frac{y^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{x^4}{8}}{\rho^8 \Pi_5}\right),$$

$$\Pi_x'' = \frac{y^3 - 2x^2y}{\rho^5} + \frac{2\rho^4 - 15x^2y^2}{\rho^7}\left(\frac{1}{\Pi_1} + \frac{3}{2}\frac{y}{\rho^2\Pi_2} + \frac{2y^2 - \frac{x^2}{2}}{\rho^4\Pi_3} + \frac{5}{2}\frac{y(y^2 - \frac{3}{4}x^2)}{\rho^6\Pi_4} + 3\frac{y^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{x^4}{8}}{\rho^8\Pi_5}\right)$$

$$+ \frac{2x^3 - 4xy^2}{\rho^7}\left(3\frac{yx}{\rho^2\Pi_2} + \frac{9xy^2 - x^3}{\rho^4\Pi_3} + \frac{15}{4}\frac{xy(5y^2 - 2x^2)}{\rho^6\Pi_4} + \frac{3}{2}\frac{x(x^4 + 22y^4 - 19x^2y^2)}{\rho^8\Pi_5}\right)$$

$$- \frac{3x^2}{\rho^7}\left(\frac{y^3 - 3x^2y}{\rho^2\Pi_2} + \frac{3y^4 - 16x^2y^2 + x^4}{\rho^4\Pi_3} + \frac{5}{4}\frac{y(10x^4 + 5y^4 - 41x^2y^2)}{\rho^6\Pi_4} + \frac{1}{2}\frac{22y^6 - 255x^2y^4 + 138x^4y^2 - 5x^6}{\rho^8\Pi_5}\right),$$

$$\Pi_y'' = \frac{3x^2y}{\rho^5} - \frac{3x^4 - 12y^2x^2}{\rho^7}\left(\frac{1}{\Pi_1} + \frac{3}{2}\frac{y}{\rho^2\Pi_2} + \frac{2y^2 - \frac{x^2}{2}}{\rho^4\Pi_3} + \frac{5}{2}\frac{y(y^2 - \frac{3}{4}x^2)}{\rho^6\Pi_4} + 3\frac{y^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{x^4}{8}}{\rho^8\Pi_5}\right)$$

$$- \frac{6x^2y}{\rho^7}\left(\frac{3}{2}\frac{x^2 - y^2}{\rho^2\Pi_2} + \frac{6x^2y - 4y^3}{\rho^4\Pi_3} + \frac{15}{8}\frac{9x^2y^2 - 4y^4 - x^4}{\rho^6\Pi_4} + 3\frac{y(13x^2y^2 - 4y^4 - 4x^4)}{\rho^8\Pi_5}\right)$$

$$- \frac{3x^2}{\rho^7}\left(\frac{3yx^2 - y^3}{\rho^2\Pi_2} + 2\frac{7x^2y^2 - x^4 - 2y^4}{\rho^4\Pi_3} + \frac{5}{4}\frac{y(35x^2y^2 - 13x^4 - 8y^4)}{\rho^6\Pi_4} + \frac{4x^6 + 111x^2y^4 - 20y^6 - 75x^4y^2}{\rho^8\Pi_5}\right).$$

Um P_0 und $\partial^2\omega_0/\partial x^2$, $\partial^2\omega_0/\partial y^2$ zu erhalten, hat man in diesen Gleichungen x durch A, y durch B, $\sqrt{x^2 + y^2}$ durch C zu ersetzen. In dieser Weise bekommt man in der Entwickelung des Potentials der Rolle auf einen Punkt, in

$$\Omega = -2\pi + 2G_0 - G_1 r P_1(\vartheta) - G_2 r^2 P_2(\vartheta) - G_3 r^3 P_3(\vartheta)$$
$$- G_4 r^4 P_4(\vartheta) - G_5 r^5 P_5(\vartheta) - \ldots,$$

$$G_0 = \pi\frac{B}{C}\left(1 + \frac{1}{24}\frac{2A^2 - B^2}{C^4}\xi^2 - \frac{1}{8}\frac{A^2}{C^4}\eta^2\right),$$

$$G_1 = 2\pi\frac{A^2}{C^3}\left(1 + \frac{1}{24}\left(\frac{2}{A^2} - 15\frac{B^2}{C^4}\right)\xi^2 + \frac{1}{8}\frac{4B^2 - A^2}{C^4}\eta^2\right),$$

$$G_2 = 3\pi\frac{A^2B}{C^5}\left(1 + \frac{1}{24}\left(\frac{2}{A^2} - \frac{25}{C^2} + \frac{35A^2}{C^4}\right)\xi^2 + \frac{5}{24}\frac{4B^2 - 3A^2}{C^4}\eta^2\right),$$

$$G_3 = 4\pi\frac{A^2(B^2 - \frac{1}{4}A^2)}{C^7} + \frac{\pi}{24}\frac{C^4(8B^2 - 12A^2) + 35A^2B^2(5A^2 - 4B^2)}{C^{11}}\xi^2$$
$$+ \frac{\pi}{24}\frac{3A^2C^2(5A^2 - 44B^2) + 63A^2B^2(4B^2 - A^2)}{C^{11}}\eta^2,$$

$$G_4 = 5\pi\frac{A^2B(B^2 - \frac{3}{4}A^2)}{C^9} + \frac{5\pi}{48}B\frac{4B^6 + 197{,}5A^4B^2 - 100A^2B^4 - 45A^6}{C^{13}}\xi^2$$
$$+ \frac{5\pi}{16}A^2B\frac{28B^4 + 17{,}5A^4 - 70A^2B^2}{C^{13}}\eta^2,$$

$$G_5 = 6\pi A^2\frac{B^4 - \frac{3}{2}A^2B^2 + \frac{A^4}{8}}{C^{11}} + \frac{\pi}{8}\frac{4B^8 - 138A^2B^6 + 412{,}5A^4B^4 - 188{,}75A^6B^4 + 7{,}5A^8}{C^{15}}\xi^2$$
$$+ \frac{\pi}{4}A^2\frac{56B^6 - 198A^2B^4 + 105A^4B^2 - 4{,}375A^6}{C^{15}}\eta^2$$

u. s. f.

Darin ist also A der Radius der mittleren Windung der Rolle, B der Abstand der Ebene, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ der der Circumferenz dieser mittlern Windung von dem (sonst willkürlichen) Punkte C ihrer Axe, $r < C$ der Abstand eines innerhalb der mit dem Radius C geschlagenen Kugel gelegenen Punktes vom Mittelpunkt C dieser Kugel, ϑ der Winkel, den r mit der Axe der Rolle einschliesst, ξ ist die radiale Tiefe, η die axiale Breite, bis zu der die Rolle mit Drahtwindungen belegt ist.

Hat man das Potential der Rolle auf einem ausserhalb jener Kugel gelegenen Punkt zu berechnen, so muss in dem Integralausdruck für Ω das ω durch ω' ersetzt werden. Nach Art. 695, 1) ist dann, falls $P_i(\vartheta)/r^{i+1}$ durch P_i ersetzt wird,

$$\omega' = 2\pi \frac{x^2}{2} \left\{ P_1 + 2y P_2 + 3\left(y^2 - \frac{x^2}{4}\right) P_3 + 4y\left(y^2 - \frac{3}{4}x^2\right) P_4 + 5\left(y^4 - \frac{3}{2}x^2 y^2 + \frac{x^4}{8}\right) P_5 \right\},$$

$$\frac{\partial^2 \omega'}{\partial x^2} = 2\pi \left\{ P_1 + 2y P_2 + \frac{3}{2}\left(2y^2 - 3x^2\right) P_3 + 2y\left(2y^2 - 9x^2\right) P_4 + 5\left(y^4 - 9x^2 y^2 + \frac{15}{8}x^4\right) P_5 \right\},$$

$$\frac{\partial^2 \omega'}{\partial y^2} = 2\pi \left\{ 3x^2 P_3 + 12x^2 y P_4 + \left(30x^2 y^2 - \frac{15}{2}x^4\right) P_5 \right\}.$$

Ich bezeichne die Grössen, die im ersten Fall durch A, B, C symbolisirt worden sind. in diesem zweiten durch a, b, c und erhalte

$$\Omega' = g_1 \frac{1}{r^2} P_1(\vartheta) + g_2 \frac{1}{r^3} P_2(\vartheta) + g_3 \frac{1}{r^4} P_3(\vartheta) + \cdots$$

worin

$$g_1 = \pi a^2 + \frac{\pi}{12}\xi^2,$$

$$g_2 = 2\pi a^2 b + \frac{\pi}{6} b \xi^2,$$

$$g_3 = 3\pi a^2\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) + \frac{\pi}{8}(2b^2 - 3a^2)\xi^2 + \frac{\pi}{4}a^2\eta^2$$

$$g_4 = 4\pi a^2 b\left(b^2 - \frac{3}{4}a^2\right) + \frac{\pi b}{6}(2b^2 - 9a^2)\xi^2 + \pi a^2 b \eta^2,$$

$$g_5 = 5\pi a^2\left(b^4 - \frac{3}{2}a^2 b^2 + \frac{a^4}{8}\right) + \frac{5\pi}{12}\left(b^4 - 9a^2 b^2 + \frac{15}{8}a^4\right)\xi^2 + \frac{5\pi}{4}\left(2a^2 b^2 - \frac{a^4}{2}\right)\eta^2$$

u. s. f.

c hat man so zu wählen, dass $r > c$ ausfällt.

Offenbar wird man den Ausdruck Ω bei der Berechnung des Potentials einer sehr weiten, den Ω' bei der einer sehr engen Rolle anzuwenden haben.

Wo es sich um die Eruirung der Einwirkung von Rollen auf einzelne Pole handelt, wird man übrigens durch geeignete Wahl des Mittelpunktes C der Grundkugel die Ausdrücke für das Potential erheblich vereinfachen können.

Zu bemerken ist noch, dass Ω und Ω' sich auf Rollen beziehen, bei denen die Stärke des durch einen Axialschnitt*) gehenden Stromes gleich Eins ist.

Magnetisches Potential einer weiten Rolle auf eine enge.

700. Für die potentielle Energie zweier Rollen auf einander, deren eine weit, deren andere eng ist, deren bezügliche Axialschnitte von Einheitsströmen durchzogen werden, erhält man, wie leicht zu übersehen (Art. 696),

$$M = G_1 g_1 P_1(\vartheta) + G_2 g_2 P_2(\vartheta) + \ldots,$$

wo die G, g die im vorigen Artikel angegebenen Werte besitzen, und ϑ den Winkel bezeichnet, den die Axen der Rollen mit einander einschliessen.

Magnetische Kraftlinien eines Kreisstromes.

701. Nach Art. 696, 1') ist das magnetische Potential eines Kreisstromes auf einen andern Strom

$$M = \iint \frac{\partial \omega_1}{\partial r} dS.$$

$\partial \omega_1 / \partial r$ ist aber die Kraft, mit der der erste Strom einen Punkt der vom zweiten umkreisten Fläche angreift. Denkt man sich den zweiten Stromkreis sehr klein und lässt ihn sich so bewegen, dass sein Mittelpunkt immer auf einer und derselben magnetischen Kraftlinie des ersten Stromes bleibt, so wird jene Kraft sich während der Bewegung nicht ändern. Da dann auch M constant bleibt, so sind umgekehrt die Kraftlinien eines Kreisstromes durch die Gleichung

$$M = \text{Const}$$

definirt.

Wir haben aber nach dem unter 1_1c) des Art. 696 gegebenen Ausdruck

$$M = 8\pi \sqrt{Aa}\, \frac{F(\sin\varphi) - E(\sin\varphi)}{\sqrt{\sin\varphi}},$$

oder wenn man

$$K_\varphi = \frac{\sin\varphi}{[F(\sin\varphi) - (E\sin\varphi)]^2}$$

macht,

$$M = 8\pi \sqrt{Aa}\, \frac{1}{\sqrt{K_\varphi}}.$$

*) Die Stärke ist also nicht auf Flächeneinheit, sondern auf die Fläche des ganzen Axialschnittes zu beziehen.

Die Gleichung der Kraftlinien eines Kreisstromes ist hiernach

$$\mathrm{Const} = M = 8\pi\sqrt{Aa}\frac{1}{\sqrt{K_\varphi}}.$$

Als Variabeln haben wir die Länge A anzusehen, da nun

$$A = \frac{1}{64\pi^2}\frac{M^2 K_\varphi}{a}$$

ist, und die Kraftlinien eines Kreisstromes in Ebenen, die durch seine Axe gehen, gelegen sein müssen, so hat man für die Construction dieser die folgende Regel.

Man berechnet mit Hilfe der Legendreschen Tafeln*) für eine hinreichende Anzahl von Werten von φ die Grösse

$$K_\varphi = \frac{\sin\varphi}{[F(\sin\varphi) - E(\sin\varphi)]^2}.$$

Schlägt man dann auf einem Blatt Papier, dessen Punkte auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem x, z bezogen sind, vom Punkte mit den Coordinaten $x = \frac{1}{2}a(\sin\varphi + \operatorname{cosec}\varphi)$, $z = 0$ mit dem Halbmesser $\rho = \frac{1}{2}a(\operatorname{cosec}\varphi - \sin\varphi)$ einen Kreis, (er schneidet die xAxe in den Punkten $x = a\operatorname{cosec}\varphi$, $z = 0$ und $x = a\sin\varphi$, $z = 0$), so hat c' in allen Punkten dieses Kreises den Wert $\sin\varphi$, mithin wird M in den Punkten dieses Kreises den Wert

$$M = 8\pi\sqrt{Aa}\frac{1}{\sqrt{K_\varphi}}$$

und A den

$$A = \frac{1}{64\pi^2}\frac{M^2 K_\varphi}{a}$$

besitzen. Da man M beliebige Werte geben kann, so wird A bei constantem φ, d. h. wenn man auf demselben Kreise bleibt, von Punkt zu Punkt variiren, durch jeden Punkt des Kreises geht also eine Kraftlinie hindurch. Weil aber A den Wert von x bedeutet, für welchen M der Definitionsgleichung entspricht, so wird eine durch den Punkt $x = A$, $z = 0$ zur zAxe parallel gelegte Gerade den Kreis in zwei Punkten schneiden, denen der vorgeschriebene Wert von M entspricht. Giebt man also dem M eine Reihe von Werten und zieht durch die Punkte $z = 0$, $x = M^2 K_\varphi / 64\pi^2 a$ Parallelen zur zAxe, so treffen diese Parallelen den Kreis in den Punkten, wo die den bezüglichen M entsprechenden Kraftlinien des Kreisstromes ihn schneiden. Andere ebenfalls auf Kreisen angeordnete Reihen von Punkten

*) Der Herausgeber der zweiten englischen Auflage dieses Buches Herr Niven, hat nach diesen Tafeln unter Zugrundelegung der Formel 1_1c) des Art. 696 eine Zusammenstellung der Logarithmen der Werthe von $M/4\pi\sqrt{Aa}$ mit dem Argument arcsinc' gegeben, die der Leser am Ende dieses Bandes finden wird.
Anm. des Uebers.

der Kraftlinien bekommt man, wenn man φ variiren lässt und immer nach der obigen Regel verfährt.

Setzt man

$$m = 8\pi a, \quad M = nm,$$

so wird

$$A = x = n^2 K_\varphi a.$$

Da die Kraftlinien an den Stellen, wo φ für alle denselben Wert hat, sich durch die Beträge von n von einander unterscheiden, so kann man n als den Index einer zugehörenden Kraftlinie bezeichnen.

Ich habe auf der Tafel XIX. für den Leser die von W. Thomson in seiner Arbeit*) ‚*On Vortex Motion*' gegebene auf unsern Fall bezügliche Zeichnung copirt.

Ponderomotorische Wirkung zweier Kreisströme auf einander.

702. Jede Verschiebung dx ruft eine in Richtung dieser Verschiebung wirkende Kraft

$$dX = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

wach.

Attraction zweier coaxialer gleichgerichteter Kreisströme. Die einer Aenderung des Abstandes b zweier paralleler coaxialer, in Kreisbahnen nach derselben Richtung fliessender Einheitsströme entgegen wirkende Kraft, das heisst, ihre gegenseitige Anziehungskraft, ist also nach Art. 698, 1_1d)

$$1_1\text{a)} \qquad \frac{\partial M}{\partial b} = \pi^2 \frac{A^2 a^2}{C^4}\left(2.3\frac{B}{C} + 2.3.4\frac{B^2 - \frac{1}{4}A^2}{C^3} b + \ldots\right),$$

oder auch nach Art. 696, 1_1b)

$$1_1\text{b)} \qquad \frac{\partial M}{\partial b} = -4\pi\sqrt{Aa}\frac{\partial}{\partial b}\left\{\left(c - \frac{2}{c}\right)F(c) + \frac{2}{c}E(c)\right\}.$$

Zur Ausführung der Differentiation bemerke man, dass

$$\frac{\partial c}{\partial b} = -\frac{2b\sqrt{Aa}}{[(A+a)^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{bc^3}{4Aa},$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial F}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial b} = \frac{1}{c(1-c^2)}\left\{E - (1-c^2)F\right\}\frac{\partial c}{\partial b},$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \frac{\partial E}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial b} = \frac{1}{c}(E - F)\frac{\partial c}{\partial b}$$

*) *Tr. R. S. Edin.* vol. XXV. p. 217 (1869).

ist, man erhält dann

$$1_1c)\qquad \frac{\partial M}{\partial b} = -\frac{\pi}{\sqrt{Aa}}\frac{bc}{1-c^2}\left\{(2-c^2)E-(2-2c^2)F\right\}$$

oder auch

$$1_1d)\qquad \frac{\partial M}{\partial b} = \pi\frac{b\sin\gamma}{\sqrt{Aa}}\left\{2F(\gamma)-(1+\sec^2\gamma)E(\gamma)\right\}\cdot$$

wenn

$$\cos\gamma = \sqrt{\frac{(A-a)^2+b^2}{(A+a)^2+b^2}},\quad c=\sin\gamma$$

gesetzt wird, und $F(\gamma)$, $E(\gamma)$ die vollständigen elliptischen Integrale erster, bezüglich zweiter Gattung vom Modul $\sin\gamma$ sind.

Für $A = a$ wird

$$\cot\gamma = \frac{b}{2a}$$

und

$$1_1)\qquad \frac{\partial M}{\partial b} = 2\pi\cos\gamma\left\{2F(\gamma)-(1+\sec^2\gamma)E(\gamma)\right\}.$$

Drehung zweier Kreisströme um den Schnittpunkt ihrer Axen. Drehen sich zwei von Einheitsströmen durchflossene Kreise um den Schnittpunkt ihrer Axen, so ist das Moment der Kraft, welche die Neigung ϑ ihrer Axen gegen einander zu vergrössern strebt,

$$\Theta = \frac{\partial M}{\partial \vartheta}\cdot$$

Für M gilt aber der in Art. 697a unter $1_2a)$ aufgestellte Ausdruck, beachtet man also, dass

$$\frac{\partial P_i(\vartheta)}{\partial \vartheta} = -\sin\vartheta\, P_i'(\vartheta)$$

ist, so erhält man

$$2_1)\quad \Theta = -4\pi^2\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\sin\vartheta\, c_2\left\{\frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1}P_1'(\alpha_1)P_1'(\alpha_2)P_1'(\vartheta)+\dots \right.$$
$$\left. +\frac{1}{i(i+1)}\frac{c_2^i}{c_1^i}P_i'(\alpha_1)P_i'(\alpha_2)P_i'(\vartheta)+\dots\right\}.$$

Induction einer Kreisbahn durch ein electromagnetisches System.

703. Eine Kreisbahn, deren Ebene von einem auf ihrer Axe befindlichen, im Raume festen Punkte um die Strecke b absteht und deren Umfang den

Radius a hat, sei in einem electromagnetischen Felde, welches durch das magnetische Potential V charakterisirt ist, gelegen.

Erweitert sich dieser Kreis, ohne die Lage seiner Ebene zu ändern so, dass sein Radius von a in $a + \delta a$ übergeht, so schiebt sich sein Umfang über einen Ring vom Flächeninhalt $2\pi a \delta a$ und da, wenn man die y Axe seiner Axe parallel legt, die zur Ebene des Kreises senkrecht wirkende Kraft des electromagnetischen Feldes gleich $\partial V / \partial y$ ist, so hat man für die magnetische Induction durch die Fläche des Ringes

$$\mathfrak{B}_1 = \int_0^{2\pi} a \delta a \frac{\partial V}{\partial y} d\vartheta,$$

wo ϑ den Winkel, den ein Radius des Kreises mit einem festen Radius desselben einschliesst, bezeichnet.

$\mathfrak{B}_1$ ist nun einerseits die Veränderung, die die magnetische Induction des Feldes durch die Ebene des Kreises infolge der Erweiterung dieses erleidet, und andererseits gleich der Veränderung, die der Inductions-Coefficient M des Kreises, wenn er sich im betreffenden Felde befindet, durch die bezeichnete Erweiterung erfährt. Wir haben daher auch

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\partial M}{\partial a} \delta a,$$

mithin

$$\text{1)} \qquad \frac{\partial M}{\partial a} = \int_0^{2\pi} a \frac{\partial V}{\partial y} d\vartheta.$$

In ganz derselben Weise schliesst man, dass wenn die Ebene des Kreises in Richtung ihrer Axe sich um die Strecke δb verschiebt,

$$\text{2)} \qquad \frac{\partial M}{\partial b} = -\int_0^{2\pi} a \frac{\partial V}{\partial r} d\vartheta$$

ist, wo r eine zur Axe des Kreises senkrechte Richtung angiebt.

Aus der Gleichung unter 1) folgt nun

$$\frac{\partial^2 M}{\partial a^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial y} d\vartheta + \int_0^{2\pi} a \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial y} d\vartheta,$$

oder, weil die Richtung von a mit der von r zusammenfällt,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial a^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial y} d\vartheta + \int_0^{2\pi} a \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial y} d\vartheta = \frac{1}{a} \frac{\partial M}{\partial a} + \int_0^{2\pi} a \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial y} d\vartheta.$$

Ferner ist nach Gleichung 2), und weil die Richtung von b mit der von y coincidirt,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial b^2} = -\int_0^{2\pi} a \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial y} d\vartheta,$$

also wird

$$3) \qquad \frac{\partial^2 M}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial b^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial M}{\partial a} = 0.$$

Dieser Differentialgleichung hat der Coefficient der Induction electromagnetischer Agentien auf eine Kreisbahn zu genügen.

Der Sinn ist aber der, dass man, um diesen Inductions-Coefficienten M zu bestimmen, die Differentialgleichung 3) unter Einhaltung einer der beiden unter 1) und 2) gegebenen Bedingungen aufzulösen hat. Fügt man noch hinzu, dass der betreffende Coefficient, wenn die Bahn sich von den Agentien unendlich weit entfernt hält, sich auf Null reducirt, so ist das Problem eindeutig bestimmt und nach bekannten Methoden in jedem Falle zu erledigen.

Gegenseitige Induction zweier nahe gelegener, paralleler, weiter Kreise.

704. Man könnte die in der Ueberschrift genannte Induction entweder nach der im vorigen Artikel gegebenen Methode, indem man das electromagnetische Feld als durch einen Kreisstrom hervorgebracht betrachtet, eruiren, oder aus der von uns in Art. 696 unter 1_1b) und 1_1c) durch elliptische Integrale ausgedrückten potentiellen Energie der beiden Kreisströme unter Berücksichtigung, dass der Modul, weil die Kreisströme einander im Verhältnis zu ihren Weiten sehr nahe gelegen sein sollen, nahezu gleich Eins ist, ausrechnen. Die folgende Methode, die auf der Bestimmung der magnetischen Induction des einen Kreisstromes durch die Ebene des andern beruht, ist aber vom Standpunkt der Electricitätslehre, weil sie die Principien derselben zur directeren Anwendung bringt, gerechtfertigter.

Es seien a und $a+c$ die bezüglichen Radien der Kreise, b gebe den im Verhältnis zu a und $a+c$ kleinen Abstand ihrer Ebenen und $r = \sqrt{c^2+b^2}$ die kürzeste Entfernung ihrer Circumferenzen von einander.

Erste Näherung, Kreise in einer Ebene. Da b gegen a und $a+c$ sehr klein sein sollte, so wird man in erster Näherung annehmen dürfen, dass die Ebenen der beiden Kreise zusammenfallen. Die magnetische Kraft des einen Stromes auf den andern ist dann senkrecht gegen ihre gemeinschaftliche Ebene gerichtet.

Bezeichnet ∂s ein Element des Kreises $(a+c)$, P einen Punkt seiner Ebene, der von der Mitte von ∂s um die Strecke ρ entfernt ist, und ϑ den

Winkel, den die Richtung von ρ mit der von δs einschliesst, so ist die magnetische Kraft, mit der δs den Punkt P angreift*)

$$dR = \frac{1}{\rho^2} \sin\vartheta\,\delta s$$

und sie wirkt senkrecht zur Ebene der beiden Kreise.

Hiernach haben wir für die magnetische Induction des Kreiselements δs vom Kreise $(a+c)$ durch die Ebene des Kreises (a)

$$d\mathfrak{B} = 2\,\delta s \int_{\vartheta_1}^{\pi/2} \int_{r_2}^{r_1} \frac{\sin\vartheta}{\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\vartheta\,.$$

Die Integrationsgrenzen sind durch die specielle Lage des Elements δs bestimmt.

Die Integration nach ρ ist unmittelbar auszuführen und ergiebt

$$d\mathfrak{B} = 2\,\delta s \int_{\vartheta_1}^{\pi/2} \sin\vartheta \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) d\vartheta\,,$$

wo r_1, r_2 die Abstände der Mitte des Elements δs von den bezüglichen Schnittpunkten der gegen dieses Element unter dem Winkel ϑ geneigten Linie ρ mit der Peripherie des Kreises (a) angeben. Man hat nun, weil $r_1\, r_2$ gleich der Potenz des Kreises (a) ist, und $r_1 + r_2$ die von δs unter dem Winkel ϑ gegen δs gezogene Sehne des Kreises $(a+c)$ zusammensetzen,

$$r_1 r_2 = (a+c)^2 - a^2 = c^2 + 2ac,$$

$$r_1 + r_2 = 2(a+c)\cos(\vartheta - \pi/2) = 2(a+c)\sin\vartheta.$$

r_1 und r_2 sind daher die Wurzeln der Gleichung

$$r^2 - 2(a+c) r \sin\vartheta + c^2 + 2ac = 0,$$

d. h. es ist

a) $$r_1 = (a+c)\sin\vartheta + \sqrt{(a+c)^2 \sin^2\vartheta - c^2 - 2ac},$$

b) $$r_2 = (a+c)\sin\vartheta - \sqrt{(a+c)^2 \sin^2\vartheta - c^2 - 2ac}.$$

---

*) Der so wichtige Ausdruck für die Kraftwirkung eines Stromelements auf einen magnetischen Einheitspol ist an keiner Stelle des Maxwellschen Werkes explicit entwickelt. Er folgt aber, unmittelbar aus der in Art. 490b auseinandergesetzten Theorie. Dort fand sich die Wirkung eines magnetischen Feldes auf ein Strombahnelement δs

$$X = \delta s\, \mathfrak{B} \sin\vartheta,$$

$\mathfrak{B}$ sollte die magnetische Induction des Feldes an der Stelle δs sein, ist also hier, wo das magnetische Feld durch einen magnetischen Pol hervorgebracht wird, gleich $1/r^2$, ϑ gab den Winkel, den die Richtung von $\mathfrak{B}$ mit der Richtung von δs einschliesst, und ist hier, da die Kraftlinien eines Poles von ihm ausgehende Strahlen bilden, gleich dem im Text mit demselben Buchstaben bezeichneten Winkel. D. Uebers.

Ferner findet man, da ϑ_1 den Winkel angiebt, den δs mit der von der Mitte dieses Elements an den Kreis (a) gezogenen Tangente einschliesst,

$$\sin\left(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{a+c},$$

c) $$\vartheta_1 = \arcsin\frac{\sqrt{c^2+2ac}}{a+c}.$$

Unter Benutzung der durch die Gleichungen a), b), c) bestimmten Werte der Grössen r_1, r_2, ϑ_1 ist dann noch die Integration nach ϑ auszuführen.

Für die Induction der beiden Kreise auf einander resultirt also, wenn sie beide von Einheitsströmen durchzogen werden,

1) $$M_{ac} = 4\pi(a+c)\int_{\vartheta_1}^{\pi/2} \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

In der Praxis nimmt man meist weite Kreise, deren Circumferenzen nur wenig von einander abstehen, c ist dann klein gegen a, und man hat

a$_1$) $$r_1 = 2a\sin\vartheta,$$

b$_1$) $$r_2 = \frac{c}{\sin\vartheta},$$

c$_1$) $$\vartheta_1 = \arcsin\sqrt{\frac{2c}{a}},$$

somit

1$'_1$) $$M_{ac} = 4\pi(a+c)\int_{\vartheta_1}^{\pi/2} \sin\vartheta \log\left(\frac{2a}{c}\sin^2\vartheta\right) d\vartheta,$$

oder nach Ausführung der Integration

$$M_{ac} = 4\pi(a+c)\left[\log 4 - 2 - 2\log\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta_1}{2}\right)\right].$$

Da $\operatorname{tg}(\vartheta_1/2)$ mit $\sin(\vartheta_1/2)$ confundirt werden darf, so wird schliesslich

1$_1$) $$M_{ac} = 4\pi(a+c)\left(\log\frac{8a}{c} - 2\right)$$

oder noch einfacher

1$_2$) $$M_{ac} = 4\pi a\left(\log\frac{8a}{c} - 2\right),$$

und darin können wir unter a den Radius des äussern, unter $a-c$ den des innern Kreises verstehen.

Wenn der zweite Kreis $(a - c)$ zwar nicht in die Ebene des ersten fällt, aber doch nur um die sehr geringe Grösse b aus derselben heraustritt, so darf man die letzte Formel immer noch anwenden, wenn man c durch $r = \sqrt{c^2 + b^2}$ ersetzt, man hat dann

$$2_1) \qquad M_{Aa} = 4\pi a(\log 8a - \log r - 2),$$

wo a den einen, A den andern Kreis bezeichnen. Uebrigens lässt sich die Differenz der Induction des Kreises (a) auf den Kreis (A) gegen die auf den Kreis $(a - c)$ auch direct berechnen, wenn man von der Bemerkung, das ein irgendwie gekrümmter Strom auf einen seiner Bahn sehr nahe gelegenen Punkt wie ein unendlich langer gerader Strom wirkt, Gebrauch macht. Man bekommt dann nach Art. 480

$$M_{aA} - M_{ac} = 4\pi a(\log c - \log r),$$

woraus dann in Verbindung mit $1_2)$ die unter $2_1)$ gegebene Formel resultirt.

705. Weitere Annäherung. Bei der hohen Bedeutung, die die Induction von Drahtkreisen auf einander für die Berechnung electrischer Experimente besitzt, will ich noch eine Methode auseinandersetzen, die in jedem Falle den Wert dieser Grösse mit beliebiger Annäherung zu berechnen gestattet.

Aus der ersten Annäherung hatten wir für die Induction zweier sehr nahe gleich weiter und nahezu in dieselbe Ebene fallender paralleler Kreise den Ausdruck

$$M = 4\pi a\left(\log\frac{8a}{r} - 2\right)$$

abgeleitet. Ich setze jetzt allgemeiner

$$M = 4\pi\left(A\log\frac{8a}{r} + B\right),$$

A und B werden Functionen der Differenz x der Radien der beiden Kreisbahnen und des Abstandes y ihrer Ebenen von einander sein. Da x und y beide kleiner als a sein sollten, wird man annehmen dürfen

$$A = \sum_0^\infty{}_\mu \frac{y^\mu}{a^{\mu-1}}\left(\sum_0^\infty{}_\varkappa A_{\mu\varkappa}\frac{x^\varkappa}{a^\varkappa}\right),$$

$$B = \sum_0^\infty{}_\mu \frac{y^\mu}{a^{\mu-1}}\left(\sum_0^\infty{}_\varkappa B_{\mu\varkappa}\frac{x^\varkappa}{a^\varkappa}\right).$$

Die Zahlenwerte der Coefficienten müssen aus den Bedingungen des Problems abgeleitet werden.

Da in erster Annäherung $A = a$, $B = -2a$ sein sollte, so haben wir zunächst

$$\text{a)} \qquad A_{00} = 1, \quad B_{00} = -2.$$

Ferner darf weder A noch B in seinem Werte durch das Zeichen, das man y verleiht, afficirt werden, demnach wird

b) $$A_{2\mu+1\varkappa} = B_{2\mu+1\varkappa} = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots,$$

und es bleibt

$$A = \sum_0^\infty{}_\varkappa \frac{y^{2\mu}}{a^{2\mu-1}} \left(\sum_0^\infty{}_\varkappa A_{2\mu\varkappa} \frac{x^\varkappa}{a^\varkappa} \right),$$

$$B = \sum_0^\infty{}_\varkappa \frac{y^{2\mu}}{a^{2\mu-1}} \left(\sum_0^\infty{}_\varkappa B_{2\mu\varkappa} \frac{x^\varkappa}{a^\varkappa} \right).$$

Weiter ist es gleichgiltig, welchen von den Kreisen man als ersten und welchen man als zweiten ansieht, M darf sich also nicht ändern, wenn man a durch $a + x$ und x durch $-x$ ersetzt, d. h. es ist

$$M = 4\pi \left\{ \log \frac{8a}{r} \sum_0^\infty{}_\mu \frac{y^{2\mu}}{a^{2\mu-1}} \left(\sum_0^\infty{}_\varkappa A_{2\mu\varkappa} \frac{x^\varkappa}{a^\varkappa} \right) + \sum_0^\infty{}_\mu \frac{y^{2\mu}}{a^{2\mu-1}} \left(\sum_0^\infty{}_\varkappa B_{2\mu\varkappa} \frac{x^\varkappa}{a^\varkappa} \right) \right\},$$

und auch

$$M = 4\pi \left\{ \log \frac{8(a+x)}{r} \sum_0^\infty{}_\mu \frac{y^{2\mu}}{(a+x)^{2\mu-1}} \left(\sum_0^\infty{}_\varkappa (-1)^\varkappa A_{2\mu\varkappa} \frac{x^\varkappa}{(a+x)^\varkappa} \right) \right.$$
$$\left. + \sum_0^\infty{}_\mu \frac{y^{2\mu}}{(a+x)^{2\mu-1}} \left(\sum_0^\infty{}_\varkappa (-1)^\varkappa B_{2\mu\varkappa} \frac{x^\varkappa}{(a+x)^\varkappa} \right) \right\}.$$

Der zweite Ausdruck für M lässt sich auch schreiben

$$M = 4\pi \left\{ \bar{A} \log \frac{8a}{r} + \bar{B} + \bar{A} \log \left(1 + \frac{x}{a} \right) \right\},$$

wir haben also

$$A = \bar{A}, \quad B = \bar{B} + \bar{A} \log \left(1 + \frac{x}{a} \right),$$

oder

$$A = \bar{A}, \quad B = \bar{B} + A \log \left(1 + \frac{x}{a} \right).$$

Da nun

$$\sum_0^\infty{}_\varkappa (-1)^\varkappa C_\varkappa \frac{x^\varkappa}{(a+x)^{2\mu+\varkappa-1}}$$

$$= \sum_0^\infty{}_\varkappa (-1)^\varkappa C_\varkappa \frac{x^\varkappa}{a^{2\mu+\varkappa-1}} \left(\sum_0^\infty{}_\lambda (-1)^\lambda \frac{x^\lambda}{a^\lambda} \frac{(2\mu+\varkappa+\lambda-2)!}{\lambda!(2\mu+\varkappa-2)!} \right)$$

$$= \sum_0^\infty{}_\varkappa (-1)^\varkappa \frac{x^\varkappa}{a^{2\mu+\varkappa-1}} (2\mu+\varkappa-2)! \left(\sum_0^\varkappa{}_\lambda \frac{1}{\lambda!(2\mu+\varkappa-\lambda-2)!} C_{\varkappa-\lambda} \right)$$

und

$$\sum_0^\infty {}_\varkappa \frac{x^\varkappa}{a^{2\mu+\varkappa-1}} C_\varkappa \log\left(1+\frac{x}{a}\right) = -\sum_0^\infty {}_\varkappa \frac{x^\varkappa}{a^{2\mu+\varkappa-1}} C_\varkappa \left(\sum_1^\infty {}_\lambda (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda}\frac{x^\lambda}{a^\lambda}\right)$$

$$= -\sum_1^\infty {}_\varkappa \frac{x^\varkappa}{a^{2\mu+\varkappa-1}} \left(\sum_1^\varkappa {}_\lambda (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda} C_{\varkappa-\lambda}\right)$$

ist, so hat man

c)
$$A_{2\mu\varkappa} = (-1)^\varkappa (2\mu+\varkappa-2)! \sum_0^\varkappa {}_\lambda \frac{A_{2\mu\,\varkappa-\lambda}}{\lambda!\,(2\mu+\varkappa-\lambda-2)!},$$

$$B_{2\mu\varkappa} = (-1)^\varkappa (2\mu+\varkappa-2)! \sum_0^\varkappa {}_\lambda \frac{B_{2\mu\,\varkappa-\lambda}}{\lambda!\,(2\mu+\varkappa-\lambda-2)!} - \sum_1^\varkappa {}_\lambda (-1)^\lambda \frac{A_{2\mu\,\varkappa-\lambda}}{\lambda}.$$

Selbstverständlich sind von den rechter Hand stehenden Termen die, deren Facultäten negative Argumente haben, fortzulassen.

Für $\varkappa = 1$, $\mu = 0$ gelten diese Gleichungen daher nicht, man findet aber ohne weitere Rechnung

d)
$$A_{01} = 1 - A_{01}, \quad B_{01} = 1 - 2 - B_{01}.$$

Die bisher abgeleiteten Gleichungen genügen noch nicht zur Bestimmung aller Coefficienten von A, B. Wir haben aber mit unserm Ausdruck für M noch die in Art. 703 abgeleitete Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} - \frac{1}{a+x}\frac{\partial M}{\partial x} = 0$$

zu erfüllen.

Setzt man für den Augenblick $\log(8a/r) = \lambda$, so wird hiernach

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{1}{a+x}\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \frac{1}{a+x}\frac{\partial B}{\partial x} + A\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2}\right)$$
$$+ 2\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{1}{a+x}A\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0.$$

Man hat aber

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = -\frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = -\frac{y}{r^2}.$$

und

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 0,$$

also zerfällt unsere Gleichung in die beiden Formeln

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{1}{a+x}\frac{\partial A}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \frac{1}{a+x}\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{2x}{r^2}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{2y}{r^2}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{x}{r^2(a+x)}A = 0.$$

Aus der ersten folgt

$$\text{e)}\quad (\varkappa+1)(\varkappa-1)A_{2\mu\,\varkappa+1}+(\varkappa+1)(\varkappa+2)A_{2\mu\,\varkappa+2}+(2\mu+1)(2\mu+2)A_{2\mu+2\,\varkappa-1}$$
$$+(2\mu+1)(2\mu+2)A_{2\mu+2\,\varkappa}=0.$$

Die zweite ergiebt nach einer etwas längern, aber leicht ausführbaren Summenrechnung

$$(\varkappa-1)(\varkappa-3)B_{2\mu\,\varkappa-1}+(\varkappa-1)\varkappa B_{2\mu\,\varkappa}+(\varkappa+1)(\varkappa-1)B_{2\mu-2\,\varkappa+1}$$
$$\text{f)}\quad +(2\mu+1)(2\mu+2)(B_{2\mu+2\,\varkappa-3}+B_{2\mu+2\,\varkappa-2})+(\varkappa+1)(\varkappa+2)B_{2\mu-2\,\varkappa+2}$$
$$+(2\mu-1)2\mu(B_{2\mu\,\varkappa-1}+B_{2\mu\,\varkappa})-2(\varkappa A_{2\mu\,\varkappa}+(\varkappa-1)A_{2\mu\,\varkappa-1})$$
$$-4\mu(A_{2\mu\,\varkappa}+A_{2\mu\,\varkappa-1})+A_{2\mu\,\varkappa-1}=0.$$

Beide Recursionsformeln gelten für alle μ und $\varkappa$ von 0 (incl.) bis ∞, wenn man Coefficienten mit negativen Indices der Null gleich setzt.

Unter Zugrundelegung der unter a) bis f) aufgestellten Gleichungen lassen sich die Zahlenwerte aller Coefficienten der Reihe nach berechnen. Man erhält so

$$A_{00}=1,\quad A_{01}=\frac{1}{2},\quad A_{02}=\frac{1}{16},\quad A_{03}=-\frac{1}{32}\cdots$$
$$A_{20}=\frac{3}{16},\quad A_{21}=-\frac{3}{32}\cdots$$
$$B_{00}=-2,\quad B_{01}=-\frac{1}{2},\quad B_{02}=\frac{3}{16},\quad B_{03}=-\frac{1}{48}\cdots$$
$$B_{20}=-\frac{1}{16},\quad B_{21}=\frac{1}{8}\cdots$$

also

$$M=4\pi a\left\{1+\frac{x}{2a}+\frac{x^2+3y^2}{16a^2}-\frac{x^3+3xy^2}{32a^3}+\cdots\right\}\log\frac{8a}{r}$$
$$+4\pi a\left\{-2-\frac{x}{2a}+\frac{3x^2-y^2}{16a^2}-\frac{x^3-6xy^2}{48a^3}+\cdots\right\}.$$

Maximum der Selbstinduction einer Rolle.

706. Sieht man bei der Berechnung der Selbstinduction einer Rolle*) von den am Schluss des vorangehenden Artikels für die Induction zweier Kreise auf einander abgeleiteten Correctionsgliedern ab, so hat man für eine solche Rolle

$$\text{1a)}\qquad L=4\pi n^2 a\left(\log\frac{8a}{R}-2\right).$$

*) Wegen der strengern Formeln sei der Leser auf die folgenden Abhandlungen verwiesen: Rayleigh, *On the Determination of the Ohm in Absolute Measure*, Proc. R. S. 1882; Maxwell, *Electromagnetic Field*, Phil. Tr. 1865; H. Weber, *Der Rotationsinductor, seine Theorie und Anwendung*, 1882 Leipzig, Teubner.

n ist die Anzahl der Windungen dieser Rolle, a der Radius ihrer Mittelwindung, R, wie aus dem vorangehenden Artikel und dem Art. 691 erhellt, der mittlere geometrische Abstand eines Axialschnitts der Rolle von sich selbst. Bezeichnet l die Länge des ganzen Windungsdrahtes, so ist

$$l = 2\pi n a,$$

also auch

1b) $$L = 2nl\left(\log\frac{8a}{R} - 2\right).$$

Bei zwei Rollen, deren Axialschnitte einander geometrisch ähnlich sind, stehen nun die bezüglichen Grössen R zu einander im Verhältnis ihrer linearen Dimensionen, daher auch im Verhältnis der Quadratwurzeln aus den bezüglichen Windungszahlen. Wir haben also

$$\frac{dn}{n} = 2\frac{dR}{R},$$

oder, weil n umgekehrt wie a abändert,

$$\frac{da}{a} = -2\frac{dR}{R}.$$

Wenn die Länge und die Dicke des Windungsdrahtes vorgeschriebene Werte haben, so kann man noch die Weite der Rolle so variiren, dass letztere den grösstmöglichen Betrag von Selbstinduction aufweist.

L wird aber ein Maximum, wenn

$$\frac{dL}{da} = 2l\frac{dn}{da}\left(\log\frac{8a}{R} - 2\right) + 2ln\frac{\frac{8}{R} - \frac{8a}{R^2}\frac{dR}{da}}{\frac{8a}{R}} = 0$$

wird. Da, wie eben gezeigt,

$$\frac{dn}{da} = -\frac{n}{a}, \quad \frac{dR}{da} = -\frac{R}{2a}$$

ist, so erreicht hiernach die Selbstinduction der Rolle bei vorgeschriebener Länge und Dicke des Windungsdrahtes den grösstmöglichen Betrag, wenn ihre mittlere Weite $2a$ so gewählt wird, dass

2) $$\log\frac{8a}{R} = \frac{7}{2}$$

wird.

Hat die Rolle einen kreisförmigen Axialschnitt vom Radius c, so wird nach Art. 692, (12)

$$\log\frac{R}{c} = -\frac{1}{4},$$

also

$$\log \frac{8a}{c} = \frac{13}{4},$$

oder

$$a = 3{,}14c,$$

man muss hiernach zur Erzielung der grössten Selbstinduction, wie Gauss*) schon gefunden hat, den mittlern Radius a der Rolle 3,14mal so gross, wie den Radius ihres Axialschnitts wählen.

Wenn der Axialschnitt der Rolle, wie das meist in der Praxis der Fall ist, da wo er die Drahtwindungen durchsetzt, eine quadratische Form von der Seite q besitzt, so haben wir nach Art. 692. (7)

$$R = 0{,}447q,$$

also

$$a = 1{,}85q.$$

Die mittlere Weite der Windungen ist dann 3,7mal so gross wie die Höhe des ausgefüllten Canals der Rolle zu wählen.

*) Ausgabe von 1867 vol. V. p. 622.

Cap. XV.

Electromagnetische Instrumente.

Galvanoskope und Galvanometer.

707. Unter *Galvanometer* im allgemeinen versteht man ein Instrument, mit dessen Hilfe man die Existenz eines electrischen Stromes nachweisen oder die Stärke eines solchen durch seine magnetischen Wirkungen zu messen vermag.

Soll das Galvanometer nur dem ersten Zwecke dienen, soll es schwache Ströme zur Anzeige bringen, so kann man es als *Galvanoskop* (*Sensitive Galvanometer*) bezeichnen; wenn es dagegen die Stärke von Strömen in den üblichen Einheiten mit grösstmöglicher Genauigkeit zu bestimmen gestatten soll, so heisst es *Standard-Galvanometer* oder einfach *Galvanometer*.

Bei allen Galvanometern ist das Hauptstück nach dem Princip des Schweiggerschen Multiplicators construirt. Man lässt also den Strom, den man zur Anzeige bringen oder dessen Stärke man messen will, durch einen Draht hindurchgehen, der in vielfachen über und neben einander gelagerten Windungen einen freien Raum, innerhalb dessen sich eine aufgehängte Magnetnadel befindet, umgiebt.

Der Strom verwandelt den besagten Raum in ein electromagnetisches Feld, und seine Stärke wird durch die Ablenkung, die er der Magnetnadel eventuell erteilt, gemessen.

Wenn das Galvanometer als Galvanoskop Verwendung findet, so arrangirt man die Windungen des Drahtes so, dass der Strom in jedem Falle auf die Nadel eine möglichst grosse Wirkung ausübt. Man rückt sie daher eng an einander und lässt sie zugleich dem Magnete so nahe, als es die Einrichtung des Apparates gestattet, kommen. Alles weitere ist abgesehen noch von der Aufhängung des Magnets und dem Schutz gegen Luftströme von geringerer Bedeutung.

Dagegen muss man Galvanometer, die zu Messungen dienen sollen, mit aller Sorgfalt so aufbauen, dass einerseits die Dimensionen und Lagen all ihrer Constructionsteile genau bekannt sind oder genau bestimmt werden

können, und dass andererseits eine etwaige Unsicherheit, die hinsichtlich der Lage der beweglichen Teile herrscht, die Berechnung der Messung möglichst wenig verfälscht.

Beim Galvanoskop sucht man das electromagnetische Feld, da wo der Magnet sich befindet, tunlichst stark zu machen; beim Galvanometer sorgt man, dass dasselbe in der Umgebung des Magnets möglichst gleichmässig hinsichtlich der Grösse und Richtung der daselbst herrschenden magnetischen Kraft ausfällt, und dass man diese magnetische Kraft durch die Stärke des den Draht durchziehenden und zu messenden Stromes auszudrücken vermag.

Standard-Galvanometer.

708. Constructionsprincipien. In einem Standard-Galvanometer wird, wie bemerkt, die Stärke des seine Rolle durchfliessenden Stromes durch die Kraftwirkung, die dieser auf eine im Hohlraum der Rolle hängende Magnetnadel ausübt, gemessen. Nun lässt sich aber weder die Verteilung des Magnetismus in der Magnetnadel noch auch die Lage des Mittelpunktes dieser mit einiger Genauigkeit bestimmen. Man muss daher die Rolle so einrichten, dass der sie durchfliessende Strom in der Umgebung der Magnetnadel, welche Lage diese auch während der Beobachtung einnehmen mag, ein möglichst gleichmässiges electromagnetisches Feld hervorruft. Daraus folgt, dass man die Rolle eines solchen zu exacten Messungen dienenden Galvanometers gross im Verhältnis zu der zugehörigen Magnetnadel zu wählen hat.

Man könnte freilich durch eine geeignete Anordnung mehrerer Rollen das electromagnetische Feld weit gleichmässiger als durch eine einzige Rolle gestalten, und würde dazu noch den Vorteil haben, dass das Instrument sich in kleinern Dimensionen und trotzdem in grösserer Empfindlichkeit herstellen liesse. Indessen bringen Irrthümer in den linearen Messungen bei kleinen Instrumenten in die Bestimmung der Werte ihrer electrischen Constanten eine grössere Unsicherheit als bei grossen hervor. Will man sich dennoch eines kleinen Apparates bedienen, so wird man seine electrischen Constanten besser durch Vergleichung mit einem grossen, völlig untersuchten Standard-Instrument als durch directe Ausmessung der linearen Dimensionen seiner einzelnen Teile eruiren. Wie man dabei zu verfahren hat, soll der Leser aus Cap. XVII. ersehen.

Herstellung der Rolle. In allen Standard-Galvanometern giebt man den Windungen der Rollen die Kreisform. Der Canal (die Nute), in dem diese Windungen liegen, muss daher sorgfältig ausgedreht sein. Seine axiale Breite macht man gleich einem ganzen Vielfachen, n, des Durchmessers des Windungsdrahtes, wenn er mit isolirender Substanz schon bedeckt ist. Eine in einer seiner Wände befindliche Durchbohrung gestattet dem einen Ende des Windungsdrahtes den Eintritt, dem andern den Austritt.

Um den Canal mit Drahtwindungen auszufüllen, befestigt man ihn auf einer Drehbank und versieht ihn mit einer langen hölzernen Axe. Dann führt man (s. Fig. 50) durch die Durchbohrung ein Ende des Drahtes in das Innere des Canals ein und schlägt gerade gegenüber dieser Durchbohrung auf der Axe das Ende eines Fadens mit einem Nagel fest. Wenn jetzt die Drehbank und mit ihr der Canal sammt der Axe in Bewegung versetzt wird, rollt sich der Draht auf den Boden des Canals und zugleich der Faden auf die Axe auf. Ist der Boden des Canals völlig mit den n Drahtwindungen bedeckt, so hält man die Drehbank an und schlägt durch den Faden, der sich offenbar um die Axe ebenso oft wie der Draht um den Boden des Canals gewunden hat, da, wo er gerade die Axe tangirt, einen Nagel ein. Man hat so den Canal mit einer Lage von Drahtwindungen, deren Anzahl durch die der leicht zählbaren Fadenwindungen gegeben ist,

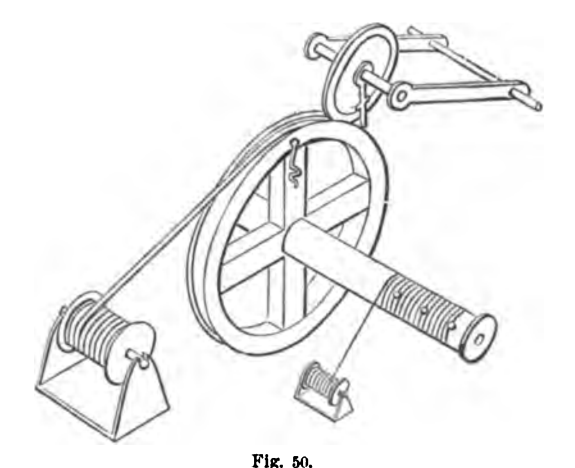


Fig. 50.

bedeckt. Nachdem man in irgend einer Weise den äussern Umfang dieser ersten Lage bestimmt hat, lässt man die Drehbank wieder laufen und eine neue Lage sich aufwinden. Nach Aufwindung jeder Lage verfährt man genau so, wie nach der der ersten. Die schliessliche Anzahl der Nägel, abgesehen vom ersten Nagel, durch die der Faden an der Holzaxe befestigt ist, giebt dann die Anzahl der Lagen und die zwischen zwei Nägeln vorhandenen Windungen des Fadens zählen die Windungen, mit denen der Draht in der betreffenden Lage den Canal ausfüllt.

Die bei jeder Lage auszuführende Messung ihres äussern Umfanges dient einerseits als Prüfstein für die Regelmässigkeit der Aufwindung des Drahtes und bietet andererseits die Mittel zur Berechnung der electrischen Constanten der Rolle.

Bezeichnet nämlich a den Umfang des Bodens des Canals, b den der obersten Drahtlage, S die Summe der Umfänge aller zwischen dem Boden

und dieser obersten Drahtlage befindlichen Lagen und m die Anzahl aller Lagen, so ist

$$U = \frac{1}{m}\left(\frac{a+b}{2} + S\right) \tag{1}$$

der mittlere Umfang der Rolle, also

$$\rho = \frac{U}{2\pi} \tag{2}$$

der mittlere Radius derselben.

Die Umfänge der einzelnen Drahtlagen bestimmt man entweder durch Umlegen eines Bandmaasses oder besser dadurch, dass man, während der Draht sich aufwindet, auf ihm in der in der Figur 50 ersichtlichen Weise ein geteiltes Rad rollen lässt. Selbstredend muss das benutzte Bandmaass und ebenso das graduirte Rad auf ein genaues Längenmaass reducirt sein.*)

709. Theorie. Wird die Rolle von einem Einheitsstrom durchflossen, so übt sie auf den in ihrem Hohlraum hängenden oder balancirten Apparat ein Drehungsmoment aus, das man, weil die Wirkungen eines Magnets durch die einer Rolle ersetzt gedacht werden können, nach Art. 700 durch

$$D = G_1 g_1 \sin\vartheta\, P_1'(\vartheta) + G_2 g_2 \sin\vartheta\, P_2'(\vartheta) + G_3 g_3 \sin\vartheta\, P_3'(\vartheta) + \dots \tag{3}$$

auszudrücken vermag.

Die Coefficienten G beziehen sich auf die Rolle, die g auf den in ihrem Innern hängenden Apparat, ϑ bezeichnet den Winkel, den die Axe der Rolle mit der des aufgehängten Apparates einschliesst.

Besteht der aufgehängte Apparat nur aus einem dünnen gleichmässig und longitudinal zur Stärke Eins magnetisirten Eisenstabe von der Länge $2l$, so hat man

$$g_1 = 2l,\ g_2 = 0,\ g_3 = 2l^3, \dots$$

Wenn der Magnet nicht gleichmässig magnetisirt ist, besitzen die g natürlich andere Werte, sie sind dann aber immer kleiner, als wenn er gleichmässig magnetisirt ist.

710a. Tangentenboussole. In der einfachsten Weise wird das Standard-Galvanometer als *Tangentenboussole* verwendet. Man befestigt dann die Rolle auf einem Stativ, richtet ihre Ebene vertical und bringt sie in den magnetischen Meridian des Ortes.

Die Magnetnadel befindet sich im Gleichgewicht, wenn

$$m g_1 H \cos\vartheta = m\gamma \sin\vartheta\,(G_1 g_1 + G_2 g_2 P_2'(\vartheta) + \dots) \tag{3_1}$$

*) Weitere praktische Winke findet der Leser in den vielen neuerdings erschienenen diesbezüglichen Abhandlungen, so in der citirten Schrift von H. Weber, in einem in *Wiedemanns Annalen* 1883 erschienenen Aufsatz von Kohlrausch u. v. A.

ist, wo mg_1 das magnetische Moment des Magnets, H die erdmagnetische Horizontalintensität, γ die Stärke des die Rolle durchfliessenden Stromes und ϑ den Winkel zwischen der Axe des Magnets und der der Rolle angiebt.

Hat der Magnet eine im Verhältnis zum Radius der Rolle geringe Länge, so darf man in der Reihenentwickelung rechter Hand schon beim ersten Gliede stehen bleiben, es wird dann

$$4_1a) \qquad \gamma = \frac{H}{G_1} \cot \vartheta .$$

Gewöhnlich misst man nicht den Winkel ϑ, sondern die Ablenkung δ, die der Magnet gegen die Ebene der Rolle (die mit der des magnetischen Meridians zusammenfallen sollte) erfährt, also sein Complement. Man hat aber $\cot\vartheta = \operatorname{tg}\delta$ und

$$4_1b) \qquad \gamma = \frac{H}{G_1} \operatorname{tg}\delta .$$

Daraus erklärt sich der Name Tangentenboussole, den das Instrument erhalten hat.

G_1 heisst die *Hauptconstante* der Boussole.

710 b. Sinusboussole. Nach einer andern Methode macht man die Rolle um eine verticale Axe drehbar und dreht sie dem durch ihren Strom abgelenkten Magnete so lange nach, bis die Axe dieses wieder in ihre Ebene fällt. Bezeichnet nunmehr δ den Winkel, um welchen man die Rolle aus dem magnetischen Meridian hat herausdrehen müssen, bis der Magnet sich in ihrer Ebene im Gleichgewicht befand, so wird, weil ϑ jetzt gleich $\pi/2$ ist,

$$3_2) \qquad m g_1 H \sin\delta = m\gamma \left\{ G_1 g_1 - \frac{3}{2} G_3 g_3 + \dots \right\},$$

also

$$4_2) \qquad \gamma = \frac{H}{G_1 - \frac{3}{2}\frac{G_3 g_3}{g_1} + \dots} \sin\delta .$$

In dieser Einrichtung wird also die Stromstärke durch den Sinus des Winkels, den die Rolle gegen den magnetischen Meridian bildet, gemessen, man bezeichnet sie daher als *Sinusboussole*.

Die Sinusboussole kann nur da Anwendung finden, wo man Ströme zu messen hat, die während des Zeitintervalls, das die Nachdrehung der Rolle und das Einspielen des Magnets in Anspruch nimmt, ihre Stärke nicht ändern.

Classification der Galvanometer nach Lage und Anzahl ihrer Rollen.

711. Galvanometer mit einer centrischen Rolle. Am einfachsten construirt man ein Galvanometer, wenn man sich eine einzige Rolle herstellt und in deren Mitte eine Magnetnadel schweben lässt.

Sei A der nach Anleitung des Art. 708 zu bestimmende mittlere Radius der Rolle, ξ bezeichne die (radiale) Tiefe des Canals der Rolle, so weit er von Drahtwindungen ausgefüllt ist, η die (axiale) Breite desselben. Verlegt man, was hier offenbar gestattet ist, den Mittelpunkt der Grundkugel in den der Rolle, so ist in der Bezeichnungsweise des Art. 699

$$B = 0, \; C = A,$$

also

$$1_1) \qquad \begin{aligned} G_1 &= \frac{2\pi n}{A}\left\{1 + \frac{1}{12}\frac{\xi^2}{A^2} - \frac{1}{8}\frac{\eta^2}{A^2}\right\}, \\ G_2 &= 0, \\ G_3 &= -\frac{\pi n}{A^3}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{A^2} - \frac{5}{8}\frac{\eta^2}{A^2}\right\}, \\ G_4 &= 0, \end{aligned}$$

u. s. f.

Hiernach wird, wenn man noch von den in Art. 697b gegebenen Entwickelungen für die $P'(\vartheta)$ Gebrauch macht und Glieder von der Ordnung $1/A^4$ fortlässt, die Reihe

$$2_1) \qquad \frac{1}{\sin\vartheta} D = G_1 g_1 + G_3 g_3 P_3'(\vartheta) = G_1 g_1 \left(1 - 3\frac{1}{A^2}\frac{g_3}{g_1}(\cos^2\vartheta - \frac{1}{4}\sin^2\vartheta)\right).$$

Der rechter Hand stehende Klammerausdruck entfernt sich am meisten von 1, wenn der Magnet gleichmässig magnetisirt ist, und ϑ den Wert Null hat. Da dann

$$g_1 = 2l, \; g_3 = 2l^3$$

ist, so wird

$$2_2) \qquad D = G_1 g_1 \left(1 - 3\frac{l^2}{A^2}\right)\sin\vartheta.$$

Wenn ferner

$$\operatorname{tg}\vartheta = 2, \text{ also } \vartheta = 63^0\,26'$$

beträgt, wird

$$2_3) \qquad D = G_1 g_1 \sin\vartheta.$$

Daher suchen sich manche Beobachter so einzurichten, dass die Ablenkung δ, die der Magnet durch den betreffenden Strom aus der Ebene der Rolle erfährt, dem Winkel

$$\delta_1 = 26^0\,34'$$

so nahe als möglich kommt.

Doch fährt man am besten, wenn man die Länge des Magnets so gering gegen die Weite der Rolle nimmt, dass der mit $P_3'(\vartheta)$ multiplicirte Factor überhaupt verschwindend klein wird.

In jedem Falle hat man den Magnet sorgfältig so aufzuhängen, dass seine Mitte mit dem Centrum der Rolle möglichst zusammenfällt. Lässt sich diese Justirung nicht erreichen, sondern liegt das Centrum des Magnets auf der Axe der Rolle in der geringen Entfernung z vom Mittelpunkte derselben, so wird

$$C = (A^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = A\left(1 + \frac{z^2}{2A^2}\right),$$

mithin ist der Coefficient G_1, also auch der ganze für $D/\sin\vartheta$ gegebene Ausdruck mit $1 - 3z^2/2A^2$ zu multipliciren. Im allgemeinen Fall, wo der Mittelpunkt des Magnets gegen den der Rolle die Coordinaten x, y, z besitzt, hat man, falls z in Richtung der Axe der Rolle gezählt wird, $D/\sin\vartheta$ mit

$$\left(1 + \frac{3}{2}\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{A^2}\right)$$

zu multipliciren.

Doch lassen sich diese Correcturen durch geeignete Justirung und Einrichtung des Apparates leicht vermeiden, oder doch auf einen geringen Betrag reduciren.

712. Das Gaugainsche Galvanometer mit excentrischer Rolle. Die mit $G_{2\mu}, g_{2\mu}$ multiplicirten Glieder kann man immer dadurch, dass man den Magnet aus einem dünnen, gleichmässig magnetisirten Stabe herstellt, aus dem Ausdrucke für D verschwinden machen. Es kommt also nur noch darauf an, auch die mit $G_{2\mu+1}, g_{2\mu+1}$ multiplicirten auf den geringsten Betrag herabzudrücken. Speciell handelt es sich namentlich um das Glied $G_3\, g_3\, P_3'(\vartheta)$. Ich habe schon gezeigt, dass man seinen Einfluss dadurch, dass man die Rolle sehr weit und den Magnet kurz wählt und letztern so aufhängt, dass seine Mitte mit der der Rolle zusammenfällt, herabmindern kann. Auf anderm Wege hat Gaugain dasselbe zu erreichen gesucht. Das Hauptglied von G_3 ist nämlich (Art. 699)

$$G'_3 = 4\pi\frac{A^2(B^2 - \frac{1}{4}A^2)}{(A^2 + B^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

Hängt man den Magnet so auf, dass seine Mitte auf die Axe der Rolle und in der Entfernung $A/2$ von dem Mittelpunkt derselben fällt, so hat man

$$B = \frac{A}{2},$$

also

$$G_1 = \frac{16\pi n}{5\sqrt{5}A}\left(1 - \frac{1}{60}\frac{\xi^2}{A^2}\right),$$

1.)

$$G'_3 = 0, \quad G_3 = 0{,}0512\frac{\pi n}{3\sqrt{5}A^5}(31\,\xi^2 - 36\,\eta^2).$$

Das Hauptglied von G_3, das einzige, dem man überhaupt noch im allgemeinen wird Rechnung zu tragen haben, verschwindet also in diesem Falle vollständig.

Insofern als durch dieses besondere Arrangement der Einfluss des dritten Gliedes in der Entwickelung von D gänzlich ausser Frage gebracht wird, begründet dasselbe einen entschiedenen Fortschritt gegen die ältere oben geschilderte Einrichtung. Allein man darf nicht ausser Acht lassen, dass im Gaugainschen Galvanometer jeder Fehler in der Justirung von B die Resultate stärker als bei dem ältern gewöhnlichen verfälscht. Bei diesem war nämlich

$$C = A\left(1 + \frac{z^2}{2A^2}\right),$$

bei jenem wird dagegen

$$C=(A^2+B^2+2Bz)^{\frac{1}{2}}=(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{Bz}{A^2+B^2}\right)=(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{5}\frac{z}{A}\right).$$

Beim Gaugainschen Galvanometer haben wir also G_1 eventuell noch mit

$$\left(1-\frac{6}{5}\frac{z}{A}\right),$$

beim gewöhnlichen mit

$$\left(1-\frac{3}{2}\frac{z^2}{A^2}\right)$$

zu multipliciren.

Da nun die Lage des Mittelpunktes des Magnets sich immer nur schwer bestimmen lässt, so hat man wegen etwaiger ungenügender Justirung dieser Lage beim Gaugainschen Galvanometer, wo der Magnet excentrisch aufgehängt ist, immer eine stärkere Beeinträchtigung der Resultate als beim gewöhnlichen, wo der Magnet tunlichst centrirt wird, zu erwarten. Beide Galvanometer haben aber den Uebelstand, dass man einen Stab nie ganz gleichmässig zu magnetisiren, infolge dessen die mit $G_{2\mu}, g_{2\mu}$ multiplicirten Glieder nicht völlig zu eliminiren vermag.

713. Das Helmholtzsche Galvanometer mit zwei excentrischen Rollen. Erst in der Helmholtzschen Einrichtung ist das Gaugainsche Galvanometer durch Hinzufügung einer zweiten, der erstern gleichen Rolle, die auf der andern Seite des Magnets relativ gegen denselben genau so wie die erste Rolle gelegen ist, zu einem wahren Präcisionsinstrument erhoben.

Da die beiden Rollen symmetrisch zum Magnete situirt sind, so fallen von vorn herein, wie der Magnet auch beschaffen ist, alle Glieder mit geraden Indices aus dem Ausdrucke für D heraus.

Ferner liegen die Rollen so, dass ihre bezüglichen Mittelwindungen von einander um ihre radiale Weite, um A, abstehen und der Magnet schwebt so zwischen ihnen, dass sein Mittelpunkt den Abstand A der

Mittelwindungen gerade halbirt. Die Formeln für die G sind genau so wie beim **Gaugainschen** Galvanometer beschaffen, wir haben also

$$G_1 = \frac{16\pi n}{5\sqrt{5}A}\left(1 - \frac{1}{60}\frac{\xi^2}{A^2}\right),$$

$$G_2 = 0,$$

$$G_3 = 0{,}0512\frac{\pi n}{3\sqrt{5}A^5}(31\xi^2 - 36\eta^2), \tag{1$_3$}$$

$$G_4 = 0,$$

$$G_5 = -\ 0{,}73728\frac{\pi n}{\sqrt{5}A^5}\ .$$

Doch bedeutet hier n die Anzahl aller Windungen, die beide Rollen zusammengenommen besitzen.

Construirt man also ein Helmholtzsches Galvanometer, bei dem die Rollen rechteckige axiale Querschnitte von der Tiefe ξ und der Breite η aufweisen, so wird der Wert von G_3, wie er aus der Berücksichtigung der Dimensionen der axialen Querschnitte gegen die der Weite der Rollen resultirt, relativ klein sein und völlig verschwinden, wenn man das Quadrat der Tiefe zum Quadrat der Breite des Canals bei jeder Rolle im Verhältnis von 36 zu 31 herstellt. Eine solche specielle Einrichtung der Dimensionen des Canals ist aber bei einer Rolle von rechteckigem Axialschnitt ohne Schwierigkeit durchführbar, man hat es daher gar nicht nötig, wie es manche Mechaniker immer noch versuchen, zur Elimination von G_3 der Rolle des Galvanometers die nicht leicht herzustellende Form eines geraden abgestumpften Kegels zu verleihen.

Die in Art. 725 gegebene Figur 54 stellt das Arrangement der Rollen im Helmholtzschen Galvanometer vor.

Ferner habe ich das electromagnetische Feld, welches die Helmholtzsche Doppelrolle hervorbringt, auf der Tafel XX. in der üblichen Weise zur Anschauung gebracht.

714. Galvanometer mit vier Rollen. Man kann auch Galvanometer so construiren, dass man vier Rollen aufstellt und zwischen ihnen den Magnet schweben lässt. Durch geeignete Einrichtung dieser Rollen vermag man dann alle Coefficienten G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 zum Verschwinden zu bringen. G_2, G_4, G_6 fallen von vorn herein fort, wenn alle Rollen eine und dieselbe Axe haben und zum Magnete symmetrisch angeordnet sind. Wie man G_3 und G_5 gleichzeitig durch die Dimensionen der bezüglichen Rollenpaare eliminirt, zeigt die folgende Rechnung.

Die erste und vierte Rolle mögen je n, die zweite und dritte je np Windungen besitzen. Die bezüglichen Mittelwindungen der vier Rollen sollen einander parallel verlaufen und alle auf einer und derselben Kugeloberfläche liegen. Wird dann die erste durch den Winkel 2ϑ, die zweite

durch den 2φ, unter dem ihr Durchmesser im Mittelpunkt der gedachten Kugelfläche erscheint, bestimmt, so haben die entsprechenden Winkel für die dritte und vierte Mittelwindung die bezüglichen Werte $2(\pi - \varphi)$ und $2(\pi - \vartheta)$. Daher ist nach Art. 694, a_2) das Glied, welches zur Entstehung von G_3 Veranlassung giebt,

$$n \sin^2\vartheta\, P_3'(\vartheta) + np \sin^2\varphi\, P_3'(\varphi),$$

und das, welches G_5 verursacht,

$$n \sin^2\vartheta\, P_5'(\vartheta) + np \sin^2\varphi\, P_5'(\varphi).$$

Sollen in D beide Glieder fehlen, so hat man zwei der drei Grössen $p, \sin^2\vartheta, \sin^2\varphi$ so zu wählen, dass

a) $$\sin^2\vartheta\, P_3'(\vartheta) + p \sin^2\varphi\, P_3'(\varphi) = 0,$$

b) $$\sin^2\vartheta\, P_5'(\vartheta) + p \sin^2\varphi\, P_5'(\varphi) = 0$$

wird.

Zunächst muss die Determinante dieser Gleichungen verschwinden, also

$$P_3'(\vartheta)\, P_5'(\varphi) - P_3'(\varphi)\, P_5'(\vartheta) = 0$$

sein.

Ich setze

$$\sin^2\vartheta = x, \quad \sin^2\varphi = y.$$

Nach den in Art. 697b für die Functionen P' gegebenen Ausdrücken erhält man dann

$$(4 - 5x)(8 - 28y + 21y^2) - (4 - 5y)(8 - 28x + 21x^2) = 0,$$

oder nach geeigneter Zusammenziehung

$$(x - y)\,[72 - 84(x + y) + 105xy] = 0.$$

Da x und y von einander im allgemeinen verschieden sein werden, so folgt zunächst

1) $$y = \frac{4}{7}\,\frac{7x - 6}{5x - 4}$$

und dann aus einer der beiden Gleichungen a) oder b)

2) $$p = \frac{49}{32}\,\frac{x(5x - 4)^3}{7x - 6}.$$

x und y sind beide Quadrate von Sinussen, ihre Werte liegen also zwischen 0 um 1.

Nach den Gleichungen 1) und 2) ist daher entweder

$$0 < x \leqq \frac{4}{7}; \quad \frac{6}{7} \leqq y \leqq 1; \quad 0 < p \leqq \frac{32}{49}$$

oder

$$\frac{6}{7} \leqq x \leqq 1; \quad 0 \leqq y \leqq \frac{4}{7}; \quad \infty \leqq p \leqq \frac{49}{32}.$$

715. Galvanometer mit drei Rollen. Am besten wählt man $x = 1$. Zwei der Rollen fallen dann zusammen und ihre Mittelwindungen bilden einen grössten Kreis der Kugel vom Radius C. Sie enthalten zusammen $2n$ Windungen. Die beiden andern Rollen liegen zu entgegengesetzten Seiten dieser Doppelrolle, ihre Mittelwindungen sind kleine gleiche Kreise der Kugelfläche von den Radien $C\sqrt{4/7}$, und stehen von der Mittelwindung der Doppelrolle um die Strecke $C\sqrt{3/7}$ ab. Sie enthalten zusammen $2.n\ 49/32$ Windungen.

Hat jede der kleinen Rollen 49 Windungen, so besitzt die grosse Doppelrolle deren 64. Daher ist

$$G_1 = \frac{2\pi}{C}\left(64 + 2.49\,\frac{4}{7}\right) = 120\,\frac{2\pi}{C}.$$

Die Figur 51 repräsentirt schematisch die Anordnung der drei Rollen.

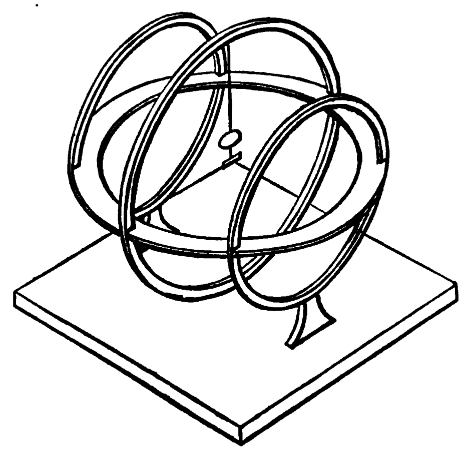


Fig. 51.

In diesem Drei-Rollen-Galvanometer ist das erste G, welches nach G_1 einen von Null verschiedenen Wert besitzt, G_7, daher wird ein grosser Teil der Kugel, auf deren Fläche die Windungen der Rollen liegen, ein sehr nahe gleichmässiges electromagnetisches Feld sein.

Könnte man einen Draht um die ganze Kugelfläche nach den in Art. 672 gemachten Festsetzungen herumwinden, so würde man nach den dort erlangten Resultaten den ganzen Kugelraum zu einem gleichmässigen electromagnetischen Felde umwandeln. Indessen ist es praktisch unmöglich, eine Kugel mit genügender Genauigkeit zu umwickeln, selbst wenn man nicht in ihrer Fläche eine Oeffnung zur Beobachtung des in ihrem Hohlraum befindlichen Magnets aussparen müsste.

Schaltet man die Mittelrolle aus dem Stromkreis aus und lässt die Electricität nur durch die Vorder- und Hinterrolle fliessen, so kann man, indem man den Strom durch die eine Rolle entgegengesetzt wie durch die andere leitet, ein electromagnetisches Feld hervorbringen, das wiederum sehr nahe gleichmässig gestaltet ist und einen Magnet, der zwischen ihnen so schwebt, dass seine Axe mit der der Rollen zusammenfällt, in Richtung dieser seiner Axe angreift. Es fallen alle Coefficienten mit ungeraden Indices heraus, und da ferner

$$\mu = \cos\vartheta = \sqrt{\frac{3}{7}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{4}{7}}$$

ist, wird auch noch

$$P_4'(\vartheta) = \frac{5}{2}\mu(7\mu^2 - 3) = 0.$$

Man hat hiernach [Art. 695, 1) und 697b] bei einem solchen Arrangement zweier Rollen für das magnetische Potential derselben in der Nähe des Kugelmittelpunktes C, der mit dem Mittelpunkt des Magnets coincidirt,

$$\omega = \frac{8}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\pi n\gamma \left\{3\frac{r^2}{C^2}P_2(\vartheta) + \frac{11}{7}\frac{r^6}{C^6}P_6(\vartheta) + \dots\right\}.$$

Vorteilhafteste Dicke für den Windungsdraht eines Galvanometers, wenn der äussere Widerstand eine vorgeschriebene Grösse besitzt.

716. Ich nehme an, dass der Canal der Rolle, in welchem die Windungen zu liegen kommen, schon gegeben sei, es handelt sich dann noch darum, ob man bei vorgeschriebenem äussern Widerstande den Draht dick oder dünn zu wählen hat.

Sei l die Länge des Windungsdrahtes, y sein Radius, wenn er noch keine isolirende Umhüllung bekommen hat, $y + b$ der, wenn er von einer solchen schon bedeckt ist, ρ gebe den specifischen, auf Volumeinheit bezogenen Widerstand seiner Substanz, g den Wert, den G für eine Längeneinheit des Drahtes besitzt, r den äussern Widerstand des Schliessungskreises, in dem das Galvanometer eingeschaltet ist, R der Widerstand des

Galvanometers. Das Volumen aller Drahtlagen der Rolle — wie wir kurz sagen, das Volumen der Rolle — ist

1) $$V = 4l(y+b)^2.$$

Die electromagnetische Kraft, die ein die Rolle mit der Stärke γ durchfliessender Strom im Centrum derselben ausübt,

a') $$X = G\gamma = gl\gamma,$$

die in dem ganzen Stromkreise wirkende electromotorische Kraft

b) $$E = \gamma(R+r).$$

Wir haben daher

a) $$X = E\frac{G}{R+r} = E\frac{gl}{r+\frac{l\rho}{\pi y^2}}.$$

Da man nun darnach zu streben hat, das Galvanometer so einzurichten, dass die von seiner Rolle ausgeübte electromotorische Kraft so gross als möglich ausfällt, so wird man den rechts stehenden Ausdruck zu einem Maximum, seinen reciproken Wert

$$\frac{\rho}{\pi g}\frac{1}{y^2} + \frac{r}{gl}$$

zu einem Minimum zu gestalten haben. Daher ist

c) $$2\frac{\rho}{\pi}\frac{dy}{y^3} + \frac{r\,dl}{l^2} = 0$$

zu machen. Offenbar lässt die Gleichung noch eine Bedingung frei, als solche haben wir die genommen, dass der Canal der Rolle, also das Volumen V derselben, gegeben sein soll.

Nach der Gleichung unter 1) folgt mithin noch

d) $$\frac{dl}{l} + \frac{2\,dy}{y+b} = 0.$$

Die Determinante der beiden Gleichungen c) und d) muss, wenn sie zusammen sollen bestehen können, verschwinden, es wird also

$$2\frac{\rho}{\pi}\frac{1}{y^3} - 2\frac{r}{l}\frac{1}{y+b} = 0,$$

oder

2) $$\frac{\rho}{\pi}\frac{y+b}{y^3} = \frac{r}{l},$$

also

3) $$\frac{r}{R} = \frac{y+b}{y}.$$

Die Dicke des Drahtes ist also so zu wählen, dass das Verhältnis des äussern Widerstandes zum Widerstande des Galvanometers gleich dem Verhältnis der Dicke des Drahtes, wenn er mit Isolirmaterial bekleidet ist, zu seiner Dicke, wenn er eine Isolirhülle noch nicht besitzt, wird. Zu berechnen ist dieselbe aus den beiden Gleichungen 1) und 2), also aus

$$4)\qquad \frac{\rho}{\pi}\frac{1}{y^3} = \frac{4(y+b)}{V} r.$$

Galvanoskope.

717. Constructionsprincipien. Bei einem Galvanoskop sucht man alle Constructionsteile so einzurichten, dass ein durch dasselbe von einer geringen electromotorischen Kraft getriebener Strom seine Nadel so stark als möglich aus ihrer Ruhelage ablenkt.

Da ein Strom eine Magnetnadel um so stärker angreift, je näher seine Bahn derselben liegt, so wird man die Rolle des Galvanoskops tunlichst eng zu wählen haben. Es ist aber klar, dass die innere Weite der Rolle nicht beliebig klein gemacht werden darf, weil sonst der Nadel jeder Raum zur freien Bewegung genommen wäre.

Jede neu hinzugefügte Windung übt einen doppelten Einfluss auf die Wirksamkeit der Rolle aus. Einmal vermehrt sie den Widerstand derselben, schwächt also den die Rolle durchfliessenden Strom und damit die Wirkung dieses auf die Magnetnadel. Dann aber führt sie einen neuen Strom und damit eine neue, die Magnetnadel ablenkende Kraft ein.

Die grösste Kraft üben auf die Nadel die ihr nächsten Windungen aus, je weiter eine Windung von derselben entfernt ist, um so geringer fällt ihr Einfluss aus, die untersten Windungen occupiren also den vorteilhaftesten Raum.

Daher kann es kommen, dass die Hinzufügung einer neuen Windung durch die dadurch bedingte Vermehrung des Widerstandes der Rolle die Wirkung der schon vorhandenen Windungen mehr abschwächt, als der so neu hinzukommende Strom sie verstärkt. Man wird also gut tun, die obern Windungen der Rolle aus dickerem Draht als die untern herzustellen.

718. Form der Drahtlagen der Rolle. Ich setze voraus, dass die Windungen der Rolle kreisförmig sind, und dass ihre Ebenen alle eine und dieselbe, durch ihre Mittelpunkte gehende, zu ihnen senkrecht stehende Axe α haben.

Die Nadel hängt in ihrem Innern und so, dass ihre Mitte mit dem Mittelpunkt derselben zusammenfällt. Bezeichnet r den Abstand der Circumferenz einer Windung von dem Mittelpunkt der Rolle (also des Galvanoskops), ϑ den Winkel, den r mit der Axe α der Rolle einschliesst, so wird $r\sin\vartheta$ der Radius der Windung und $r\cos\vartheta$ die Entfernung ihrer Ebene von diesem Mittelpunkt. Daher die in Richtung der Axe wirkende

magnetische Kraft eines einen Teil l dieser Windung mit der Stärke γ durch fliessenden Stromes

$$X = \gamma l \frac{\sin \vartheta}{r^2}$$

oder wenn man

$$\frac{r^2}{\sin \vartheta} = x^2$$

setzt,

$$X = \gamma \frac{l}{x^2}.$$

Die Polargleichung

$$r^2 = x^2 \sin \vartheta$$

repräsentirt eine Reihe von Flächen, deren Durchschnitte mit einer durch die Mitte der Rolle gehenden Ebene ähnlich wie die in der beistehenden Figur 52 gezeichneten Curven verlaufen, und die sich von einander durch den Wert des Parameters x^2 unterscheiden.

Ein von einem Strom mit der Stärke γ durchzogenes Kreisbogenstück l wirkt, wenn es innerhalb der Fläche

$$r^2 = x_1^2 \sin \vartheta$$

liegt, stärker, und wenn es ausserhalb derselben sich befindet, schwächer als die Kraft

$$X_1 = \gamma \frac{l}{x_1^2}.$$

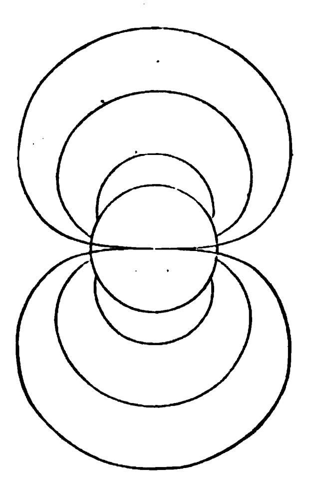


Fig. 52.

Man wird also den Draht so zu winden haben, dass die Oberflächen der einzelnen Lagen sich von einander durch den Parameter x^2 unterscheiden, und dass für die Oberfläche einer und derselben Lage die Grösse

1) $$x^2 = \frac{r^2}{\sin \vartheta}$$

in allen Punkten einen und denselben Wert besitzt. Denn wenn an einer Stelle dieser Lage x grösser als an einer andern sein sollte, so würde das daselbst befindliche Drahtstück im Mittelpunkt des Galvanoskops mit einer geringeren Kraft wirken, als wenn es der bezeichneten andern Stelle der Lage angehörte.

719. Theorie. Die gesammte von der Rolle in der Mitte des Galvanoskops ausgeübte Kraft ist

2a) $$F = \gamma G = \gamma \int \frac{dl}{x^2}.$$

x ist als Function von l zu betrachten, und die Integration erstreckt sich über die ganze Länge des Windungsdrahtes.

Sei y der Radius des Drahtes, πy^2 also der Querschnitt desselben, sei ferner ρ der specifische, auf Volumeinheit bezogene Widerstand seiner Substanz. Der Widerstand einer Länge l des Drahtes ist dann $l\rho/\pi y^2$ und der der ganzen Rolle

3) $$R = \frac{\rho}{\pi}\int\frac{dl}{y^2}.$$

Hat der Draht an verschiedenen Stellen verschiedene Dicken, so wird y als Function von l anzusehen sein.

Weiter sei Y^2 der Flächeninhalt eines Vierseits, das durch den Schnitt einer axialen Ebene der Rolle mit den Axen von vier benachbarten Drähten (zwei derselben gehören einer, zwei der darunter befindlichen Lage an) gebildet wird, $Y^2 l$ ist dann das Volumen, welches eine Länge l des Drahtes zusammen mit seiner isolirenden Hülle und mit dem zwischen den Windungen dieses Drahtstückes befindlichen freien Raume in der Rolle einnimmt. Für das ganze Volumen der Rolle haben wir also

4a) $$V = \int Y^2 dl,$$

wo Y^2 als Function von l zu betrachten ist.

Dasselbe Volumen lässt sich aber auch noch in anderer Weise ausdrücken; da nämlich die Oberfläche der Rolle eine Rotationsfigur ist, so hat man

$$V = 2\pi\int\int r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta,$$

oder wenn r unserer in Gleichung 1) fixirten Bedingung gemäss gewählt wird,

$$V = 2\pi\int\int x^2 \sin^{\frac{5}{2}}\vartheta\, dx\, d\vartheta.$$

Darin ist

$$N = \int_0^\pi \sin^{\frac{5}{2}}\vartheta\, d\vartheta$$

eine für die betreffende Rolle charakteristische Zahl. Bezeichnet also V_0 den von der Rolle eingeschlossenen, für die Magnetnadel freigelassenen Raum, so wird

4b) $$V = \frac{1}{3}Nx^3 - V_0.$$

Daraus folgt für das Volumen einer zwischen den Flächen x und $x + dx$ (man beachte, dass die Flächen sich auf die Axen der Drähte beziehen) befindlichen Lage

$$dV = Nx^2 dx.$$

Versteht man nun unter dl die Länge aller Drahtwindungen, die dieser Lage angehören, so ist auch

$$dV = Y^2 dl,$$

also

$$Nx^2 dx = Y^2 dl,$$

und

$$dG = N\frac{dx}{Y^2},$$

$$dR = N\frac{\rho}{\pi}\frac{x^2}{Y^2}\frac{dx}{y^2}.$$

dR ist der Widerstand der betreffenden Lage, dG die von dieser, wenn sie von einem Einheitsstrom durchflossen wird, im Centrum der Rolle ausgeübte Kraft. Ferner wird

$$F = \gamma N\int\frac{dy}{Y^2}, \tag{2b}$$

$$R = \frac{\rho}{\pi}N\int\frac{x^2}{Y^2}\frac{dx}{y^2}. \tag{3b}$$

Geeignetste Form des Drahtes. Man kann auch hier fragen, wie man die Dicke des Drahtes bei gegebenem Volumen der Rolle zu wählen und eventuell von Lage zu Lage zu variiren hat, wenn der äussere Widerstand des Kreises, in dem das Galvanoskop eingeschaltet ist, einen vorgeschriebenen Wert besitzt, um die grösstmögliche Kraftwirkung des die Rolle durchfliessenden Stromes γ auf die Mitte derselben zu erzielen. Zunächst ist die electromotorische Kraft, die im ganzen Kreise den Strom unterhält,

$$E = \gamma(R + r),$$

also

$$F = \gamma G = E\frac{G}{R + r}.$$

Der Ausdruck $EG/(R + r)$ ist also dadurch, dass man den Draht in jeder Lage in geeigneter, durch die Rechnung zu eruirender Weise wählt, zu einem Maximum zu gestalten.

Fassen wir eine bestimmte Drahtlage der Rolle ins Auge und bezeichnen mit G_0 und R_0 die Werte, die G und R aufweisen, wenn diese Lage ausgeschaltet ist, so wird

$$\frac{G}{R + r} = \frac{G_0 + dG}{R_0 + dR + r} = \frac{\gamma}{E}G.$$

Als Variabele ist y, der Radius des Drahtes, anzusehen, wir haben also, damit G ein Maximum werden soll,

$$\frac{d(dG)}{dy} - \frac{G_0 + dG}{R + r}\frac{d(dR)}{dy} = 0,$$

oder

$$5') \qquad \frac{\frac{d(dG)}{dy}}{\frac{d(dR)}{dy}} = \frac{G}{R + r}.$$

Nun haben wir zwar eine ganz bestimmte Lage der Untersuchung zu Grunde gelegt, da aber dG und dR proportional dx sind, und dx beliebig klein gemacht werden kann, so wird G_0/R_0 von der besondern Lage nahezu unabhängig und als constant zu betrachten sein. Die obige Gleichung gilt also allgemein. Es folgt aus ihr bei Beachtung der für dG und dR gegebenen Werte

$$5) \qquad \frac{\rho}{\pi}\frac{x^2}{y^2}\left(1 + \frac{Y}{y}\frac{dy}{dY}\right) = \frac{R + r}{G} = \text{Const.}$$

720. Die weitere Rechnung hängt von der Art, wie Y von y abhängt, also von der Art, wie der Draht mit isolirendem Material bedeckt und wie er aufgewunden ist, ab.

(1) Ist der Draht so mit isolirendem Material bedeckt und so aufgewunden, dass der Raum, den die Metallsubstanz des Drahtes einnimmt, in stets demselben Verhältnis zu dem Raume zwischen den Drahtwindungen steht, mag der Draht dick oder dünn sein, so hat man

$$\frac{Y}{y} = \frac{dY}{dy}, \quad \frac{Y}{y}\frac{dy}{dY} = 1,$$

also

$$5_1) \qquad y = \text{Const.}\, x = \alpha x,$$
$$Y = \text{Const.}\, x = \beta y.$$

α und β sind Zahlengrössen. Der Fall tritt ein, wenn die Metallsubstanz des Drahtes für sich schon sehr nahe den ganzen Canal der Rolle ausfüllt. Es variirt dann der Durchmesser des Drahtes von Lage zu Lage proportional der Dicke der Lagen:

Setzt man den Wert von y und Y in die Gleichungen 2b), 3b) für G und R ein, so resultirt

$$2_1b) \qquad G = N\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right),$$

$$3_1b) \qquad R = N\frac{1}{\alpha^4\beta^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right)\frac{\rho}{\pi},$$

wo a eine von dem Inhalt und der Form des von der Rolle eingeschlossenen freien Raumes abhängige Grösse angiebt.

Lässt man also die Dicke des Drahtes sowie die Grösse x variiren, so erzielt man. nachdem der äussere Umfang der Rolle ihren Innenraum schon um ein Bedeutendes überragt, nur noch sehr wenig Vorteil, wenn man diesen äussern Umfang noch weiter vergrössert.

(2) Sei zweitens die Dicke der isolirenden Hülle in der ganzen Ausdehnung des Drahtes eine und dieselbe und gleich b, ausserdem seien die Windungen quadratisch angeordnet. Man hat dann

$$Y^2 = 4(y+b)^2,$$

also

$$5_2)\qquad \frac{x^2}{y^3}(2y+b) = \text{Const.}$$

Die Form des Drahtes ist eine konische, sein Durchmesser wächst mit den Weiten der Lagen, die er bildet, er nimmt aber nicht so schnell wie diese Weiten zu.

(3) Wenn das Vermehren des Widerstandes der Rolle der Empfindlichkeit des Galvanoskops keinen Eintrag tut — das ist z. B. der Fall, wenn der äussere Widerstand des Schliessungskreises den des Galvanometers beträchtlich überragt —, so darf man y und Y constant machen. Man hat dann

$$G = \frac{N}{Y^2}(x-a),$$

$$R = \frac{1}{3}\frac{N}{Y^2 y^2}\frac{\rho}{\pi}(x^3-a^3),$$

wo a wiederum eine von der Form und dem Inhalt des von der Rolle eingeschlossenen freien Raumes abhängige Constante bezeichnet.

Hier würde G mit wachsender Grösse der Rolle gleichmässig ansteigen. Eine Grenze würde der Vergrösserung von G nur durch die Mühe und die Kosten, die die Herstellung der Rolle mehr verursachen würde, gesetzt sein.

Bewegliche Rollen in einem magnetischen Felde.

721. Constructionsprincipien. Beim gewöhnlichen Galvanometer wird ein schwebender Magnet von einer festgelegten Rolle angegriffen. Offenbar wird man auch umgekehrt verfahren, nämlich die Rolle beweglich, den Magnet fest machen können. Erstere wird dann von letzterm, oder von einer an seiner Stelle befindlichen fixirten Rolle beeinflusst und aus ihrer Ruhelage heraus getrieben.

Da man durch die bewegliche Rolle nicht anders einen Strom hindurchschicken kann, als wenn man die Enden ihres Drahtes mit den Polen einer Batterie metallisch verbindet, so wird man entweder die Rolle bifilar an zwei Drähten aufhängen, oder man wird sie von einem Draht herabhängen lassen und an sie einen zweiten nach unten gehenden Draht anknüpfen.

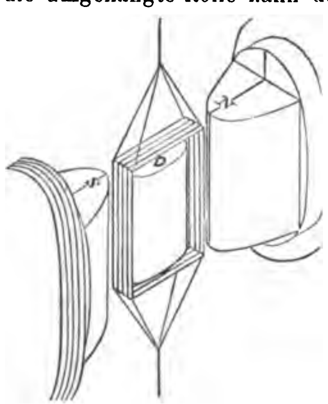
Die bifilare Suspension habe ich schon in Art. 459, wo sie bei der Construction des Magnetometers Verwendung fand, beschrieben. Ausserdem zeigt auch die Figur 55 den maassgebenden obern Teil dieser Aufhängungsvorrichtung.

Es versteht sich von selbst, und ich habe es auch schon hervorgehoben, dass hier, wo es sich um Aufhängung von Rollen handelt, die Aufhängefäden

nicht aus Seide, sondern aus Metall bestehen müssen, und da der Torsionscoefficient eines Metalldrahtes, der eine Rolle zu tragen und einen Strom fortzuleiten vermag, weit grösser als der eines Seidenfadens ist, so darf er in keiner Weise ausser Acht gelassen werden. Weber hat bei den von ihm construirten Instrumenten die bifilare Suspension zu hoher Vollkommenheit ausgebildet.

In der zweiten unifilaren Suspension wird die Rolle an einen Draht aufgehängt. Das eine Ende ihres Windungsdrahtes verbindet man mit diesem Draht, vom zweiten lässt man einen andern Draht herabhängen, richtet sich so ein, dass dieser in derselben Verticallinie wie der erste zu liegen kommt, und führt ihn in eine Quecksilberkuppe. Die Figur 57 zeigt dem Leser auch dieses Arrangement. In manchen Fällen — namentlich dann, wenn der ganze Apparat bei seinem Gebrauch nicht horizontal steht (Fig. 53) — ist es gut, die Enden der beiden Drähte an Stücke zu befestigen, durch die man die Drähte leicht zu strecken vermag, man hat dann dafür zu sorgen, dass die Gerade, in der die beiden Drähte liegen, tunlichst durch den Schwerpunkt der Rolle hindurch geht.

722. Eine aufgehängte Rolle kann als ein ganz ausserordentlich empfindliches Galvanoskop verwendet werden, denn wenn man die vom Magnete oder der diesen ersetzenden Rolle herrührende magnetische Kraft, die in dem Felde, in welchem die Rolle schwebt, herrscht, ansteigen lässt, vermag man die Kraft, die ein schwacher, die Rolle durchziehender Strom ausübt, beträchtlich zu verstärken, ohne dass man nötig hat, die Masse der Rolle zu vermehren. Das magnetische Feld bringt man entweder durch permanente Magnete oder durch Electromagnete, zu deren Erregung ein zweiter Strom verwendet wird, hervor. Die Stärke seiner Kraftwirkung auf die aufgehängte Rolle kann durch geeignete Armatur derselben mit weichen Eisenstücken auf bedeutende Höhe erhoben werden. So hängt in Thomsons Signal-Apparat, Fig. 53, die Rolle zwischen dem Nord- und Südpol zweier Electromagnete, und um alle Kraftlinien des Feldes, das diese hervorbringen, möglichst gegen die verticalen Seiten der Rolle zu concentriren, befindet sich zwischen diesen Polen noch ein Stück weiches Eisen D festgemacht. Durch Induction wird dieses Eisen magnetisch und bringt seinerseits namentlich in den Räumen, die es von den Polen N, S der Electromagnete trennen, ein mächtiges Kraftfeld hervor. Da die Rolle so hängt, dass ihre verticalen Seiten zwischen den Polen und dem Eisenstück hindurchgehen, so wird sie, selbst wenn ein nur schwacher Strom sie durchzieht, doch von einer bedeutenden magnetischen Kraft angegriffen, die sie um ihre Verticalaxe zu drehen sucht.


Fig. 53.

723. Anwendung zur Bestimmung der Stärke eines Stromes und zu der der erdmagnetischen Horizontalintensität. Ausser zur Bestimmung der Intensität eines durch sie hindurchgeschickten Stromes kann die Rolle, wenn man sie zugleich mit einer Tangentenboussole verwendet, auch zur Eruirung der erdmagnetischen Horizontalintensität dienen.*)

Methode von Kohlrausch. Man hängt die Rolle so auf, dass die Ebene ihrer Mittelwindung, wenn sie stromlos ist und sich in stabilem Gleichgewicht befindet, mit der des magnetischen Meridians des betreffenden Ortes zusammenfällt. Lässt man sie dann von einem Strome mit der Stärke γ durchfliessen, so wird sie aus dem magnetischen Meridian um einen bestimmten Winkel ϑ in eine neue, ebenfalls stabile, Gleichgewichtslage gedreht.

Wenn die Rolle bifilar aufgehängt ist, so wird das Moment des Kräftepaares, welches sie um den Winkel ϑ gedreht hat,

$$D = F \sin\vartheta.$$

Da aber dieses Moment auch

$$D = H\gamma g \cos\vartheta$$

ist, so hat man

$$H\gamma = \frac{F}{g}\,\mathrm{tg}\,\vartheta. \tag{a$_1$}$$

Die Grösse F bestimmt sich aus der Dauer einer Schwingung der Rolle um ihre Axe, denn wenn $2T$ die Zeit eines Hin- und Herganges derselben und A ihr Trägheitsmoment bezeichnet, so hat man

$$FT^2 = \pi^2 A. \tag{c$_1$}$$

Damit wird

$$H\gamma = \frac{\pi^2 A}{T^2 g}\,\mathrm{tg}\,\vartheta.$$

Geht nun derselbe Strom ausser durch die Rolle durch eine Tangentenboussole, deren Windungen dem magnetischen Meridian parallel stehen, und lenkt er daselbst die Nadel um den Winkel φ aus dem magnetischen Meridian ab, so hat man nach Art. 710

$$\frac{\gamma}{H} = \frac{1}{G}\,\mathrm{tg}\,\varphi, \tag{b$_1$}$$

wo G die Hauptconstante der Boussole angiebt.

Also wird

$$H = \frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{AG\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{g\,\mathrm{tg}\,\varphi}}, \tag{1$_1$}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{A\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,\mathrm{tg}\,\varphi}{Gg}}. \tag{2$_1$}$$

*) Die Methode rührt von F. Kohlrausch her: *Pogg. Ann.* Bd. 138 (Febr. 1869). S. auch den auf Seite 137 citirten Aufsatz desselben Physikers.

724. *Methode von Thomson.* Da einerseits sowol die Ablenkung der Rolle als die des Magnets einer Tangentenboussole gleichzeitig beobachtet werden muss, und andererseits die Tangentenboussole, wenn man störende Inductionserscheinungen vermeiden will, der Rolle nicht zu nahe gebracht werden darf, so wird jede vollständige Messung im allgemeinen zwei Beobachter beschäftigen. W. Thomson hat aber dem Apparat eine solche Einrichtung gegeben, dass ein Observator allein alle Operationen auszuführen im Stande ist.

Die Rolle wird gleichzeitig als hängende Rolle und als Windung einer Boussole verwendet. Sie hängt wie früher so, dass der magnetische Meridian, wenn sie keinen Strom führt, der stabilen Gleichgewichtslage ihrer Ebene parallel verläuft. In der Mitte der Rolle lässt Thomson aber noch einen kurzen Magnet vom Moment m schweben. Wird sie von einem Strom durchflossen, so neigt sich ihre Ebene gegen den magnetischen Meridian, und da sie ihrerseits wieder den kleinen in ihrer Mitte schwebenden Magnet angreift, so dreht sich dieser nach entgegengesetzter Richtung wie sie selbst. Sei die Drehung der Rolle aus dem magnetischen Meridian, wenn der sie durchziehende Strom die Stärke γ besitzt, gleich ϑ, und die des kleinen Magnets gleich φ. Der variabele Teil der Energie des ganzen Systems ist dann

$$H\gamma g \sin\vartheta + m\gamma G \sin(\vartheta - \varphi) - Hm \cos\varphi - F\cos\vartheta.$$

Wenn alle Bewegungen sich beruhigt haben und Gleichgewicht eingetreten ist, müssen die Derivirten dieser Energie nach ϑ und φ verschwinden, man hat also

$$a_2) \qquad H\gamma g \cos\vartheta + m\gamma G \cos(\vartheta - \varphi) + F\sin\vartheta = 0,$$

$$b_2) \qquad - m\gamma G \cos(\vartheta - \varphi) + Hm \sin\varphi = 0.$$

Dazu kommt noch die Gleichung

$$c_2) \qquad FT^2 = \pi^2 A,$$

woraus sich ergiebt

$$1_2) \quad H = -\frac{mG}{g}\frac{\cos(\vartheta-\varphi)}{2\cos\vartheta} + \frac{\pi}{T}\sqrt{-\frac{AG\sin\vartheta\cos(\vartheta-\varphi)}{g\cos\vartheta\sin\varphi} + \frac{m^2G^2}{g^2}\frac{\cos^2(\vartheta-\varphi)}{4\cos^2\vartheta}},$$

$$2_2) \qquad \gamma = -\frac{1}{2}\frac{m}{g}\frac{\sin\varphi}{\cos\vartheta} + \frac{\pi}{T}\sqrt{-\frac{A\sin\vartheta\sin\varphi}{Gg\cos\vartheta\cos(\vartheta-\varphi)} + \frac{1}{4}\frac{m^2}{g^2}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\vartheta}}.$$

Darin bedeuten

G, g die früher schon definirten electrischen Hauptconstanten der Rolle, nämlich g das magnetische Moment der Rolle, G ihre magnetische Kraft in ihrem Mittelpunkte, wenn ihre Windungen von einem Einheitsstrom durchzogen werden,

A das Trägheitsmoment der Rolle,
$2T$ die Zeit, die eine volle Schwingung derselben in Anspruch nimmt,
m das Moment des in der Mitte der Rolle schwebenden Magnets,
H die erdmagnetische Horizontalintensität,
γ die Stärke des die Rolle durchziehenden Stromes,
ϑ die Ablenkung der Rolle,
φ die des kleinen Magnets m.

Da die Rolle nach entgegengesetzter Richtung wie der kleine Magnet ausschlägt, so wird entweder ϑ oder φ negativ zu rechnen sein, die Ausdrücke für H und γ werden also stets reelle Werte liefern.

Wenn der innerhalb der Rolle schwebende Magnet klein genug ist, darf man unter den Wurzelzeichen das von m abhängige Glied fortlassen.

Webers Electrodynamometer.

725. Einrichtung. Im Weberschen Electrodynamometer wird das electromagnetische Feld durch eine grosse festgelegte Rolle hervorgebracht. Die bewegliche Rolle wird gegen diese verhältnismässig klein genommen und hängt im Innern derselben.

Fliesst ein Strom gleichzeitig durch beide Rollen, so sucht sich die aufgehängte kleine Rolle der fixirten grossen parallel zu legen. Da sie aber einerseits durch das Moment, welches von ihrer bifilaren Aufhängung herrührt, und andererseits durch die magnetische Kraft der Erde zurückgehalten wird, so nimmt sie eine mittlere Lage ein, in der alle auf sie wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

Beim gewöhnlichen Gebrauch des Instruments, von dem die Fig. 54 eine vollständige Darstellung bringt, hängt man die kleine Rolle so in die grosse hinein, dass ihre beiden Begrenzungsebenen, wenn beide Rollen stromlos sind, die der grossen Rolle senkrecht schneiden. Die Windungen der Rollen stehen dann ebenfalls senkrecht zu einander und ein beide Rollen eventuell durchziehender Strom bringt zwischen ihnen die grösstmögliche Kraftwirkung hervor. Um ferner die kleine Rolle tunlichst der erdmagnetischen Kraftwirkung zu entziehen, justirt man den Apparat so, dass ihre Windungen zu dem magnetischen Meridian des Orts nahezu senkrecht stehen.

Theorie. Die Theorie des Instruments ergiebt sich aus dem, was ich oben über die die kleine Rolle angreifenden Kräfte gesagt habe.

Sei α das magnetische Azimut der Ebene der festen Rolle, β der Winkel, den die Axe der beweglichen mit der Ebene der festen einschliesst, wenn die Rollen von keinem Strome durchflossen werden. Ist dann ϑ die Ablenkung, die die kleine Rolle durch die Wechselwirkung der die Rollen mit den bezüglichen Stärken γ_1, γ_2 durchziehenden Ströme erfährt, so wird $\vartheta + \beta$ das magnetische Azimut der beweglichen Rolle in ihrer neuen durch den Strom verliehenen Gleichgewichtslage sein.

Man hat daher, wenn Gleichgewicht stattfindet,

$$1)\qquad Gg\gamma_1\gamma_2\cos(\vartheta+\beta)-Hg\gamma_2\sin(\vartheta+\beta+\alpha)-F\sin\vartheta=0,$$

woraus folgt

$$2)\qquad \operatorname{tg}\vartheta=\frac{Gg\gamma_1\gamma_2\cos\beta-Hg\gamma_2\sin(\beta+\alpha)}{Gg\gamma_1\gamma_2\sin\beta+Hg\gamma_2\cos(\alpha+\beta)+F}.$$

Ich setze voraus, dass das Instrument so gut justirt ist, dass α und β beide nur geringe Beträge besitzen, also sowol die Ebene der festen als auch die Axe der beweglichen Rolle dem magnetischen Meridian nahezu parallel verläuft. Ferner nehme ich an, dass die Grösse $Hg\gamma_2$ gegen F sehr klein ist. Es wird dann näherungsweise

$$2_1)\quad \operatorname{tg}\vartheta=\frac{Gg\gamma_1\gamma_2\cos\beta}{F}-\frac{Hg\gamma_2\sin(\alpha+\beta)}{F}-\frac{HGg^2\gamma_1\gamma_2^2}{F^2}-\frac{G^2g^2\gamma_1^2\gamma_2^2\sin\beta}{F^2}.$$

Die Constanten G, g werden nach den Anleitungen des Art. 699 bestimmt.

Als unbekannt kann man in dieser Gleichung die Grössen H, γ_1 und γ_2 ansehen, man muss daher mehrere Beobachtungsreihen unter verschiedenen Umständen anstellen. Die Verschiedenheit der Umstände erreicht man aber dadurch, dass man die Ströme durch die beiden Rollen bald nach derselben, bald nach entgegengesetzten Richtungen schickt, oder dadurch, dass man den Ablenkungswinkel bestimmte Grössen erreichen macht.

Tangentenmethode für nicht sehr constante Ströme. Man lässt erst beide Ströme nach einer und derselben, als positiv zu bezeichnenden Richtung laufen, dann kehrt man beide Ströme zugleich um, so dass ihre Richtung jetzt negativ wird, hierauf lässt man den in der festen Rolle nach der positiven, den in der beweglichen nach der negativen, endlich umgekehrt den in der festen nach der negativen, den in der beweglichen nach der positiven Richtung fliessen.

Ich bezeichne die Ablenkung der Rolle mit

ϑ_1, wenn die Richtung des Stromes γ_1 positiv, die des Stromes γ_2 positiv,
ϑ_2, " " " " " " negativ, " " " " negativ,
ϑ_3, " " " " " " positiv, " " " " negativ,
ϑ_4, " " " " " " negativ, " " " " positiv
ist.

Die beiden ersten Beobachtungen ergeben

$$a_1)\qquad \operatorname{tg}\vartheta_1+\operatorname{tg}\vartheta_2=2\left(\frac{Gg\gamma_1\gamma_2\cos\beta}{F}-\frac{G^2g^2\gamma_1^2\gamma_2^2\sin\beta}{F^2}\right),$$

die beiden letzten

$$b_1)\qquad -(\operatorname{tg}\vartheta_2+\operatorname{tg}\vartheta_3)=2\left(\frac{Gg\gamma_1\gamma_2\cos\beta}{F}+\frac{G^2g^2\gamma_1^2\gamma_2^2\sin\beta}{F^2}\right).$$

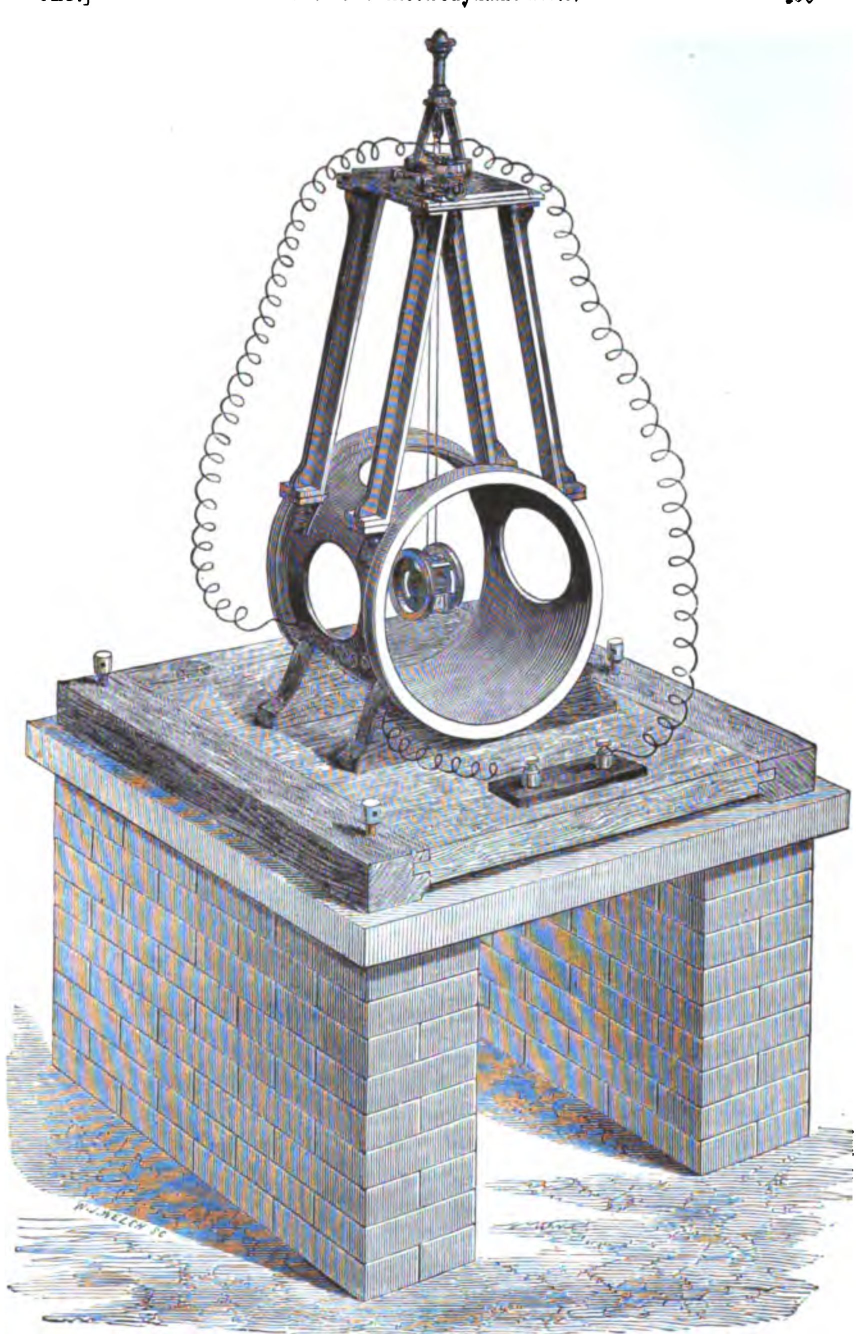


Fig. 54.

Zur Eruirung von $\gamma_1\gamma_2$ genügen also eigentlich schon zwei solcher Beobachtungen. Durch Combination aller vier erhält man aber einfacher und genauer

$$3_1)\qquad \gamma_1\gamma_2 = \frac{1}{4}\frac{F}{Gg\cos\beta}(\operatorname{tg}\vartheta_1 + \operatorname{tg}\vartheta_2 - \operatorname{tg}\vartheta_3 - \operatorname{tg}\vartheta_4).$$

Werden beide Rollen von einem und demselben Strome durchzogen, so kann man $\gamma_1\gamma_2 = \gamma^2$ setzen und erhält aus obiger Gleichung den Wert dieser Grösse γ^2.

Die angeführte *Tangentenmethode* ist namentlich dann zu empfehlen, wenn man es mit nicht sehr constanten Strömen zu tun hat.

Methode der Sinusse für sehr constante Ströme. Wenn die Ströme so constant sind, dass man hinreichende Zeit hat, am Torsionskreis des Apparates gewisse Operationen vorzunehmen, so bedient man sich mit Vorteil der nachstehend beschriebenen *Sinusmethode.*

Man macht wieder vier Beobachtungsreihen der oben angegebenen Art, liest aber nicht die Ablenkungswinkel ϑ ab, sondern dreht die Aufhängungsvorrichtung der beweglichen Rolle so lange, bis in jeder Beobachtungsreihe die Ablenkung wieder verschwindet. Offenbar hat man dann

$$\vartheta_1 = -\beta_1,\quad \vartheta_2 = -\beta_2,\quad \vartheta_3 = -\beta_3,\quad \vartheta_4 = -\beta_4,$$

mithin nach der allgemeinen Gleichung 1)

$$a_2)\qquad F\sin\beta_1 = -F\sin\beta_3 = -Gg\gamma_1\gamma_2 + Hg\gamma_2\sin\alpha,$$

$$b_2)\qquad F\sin\beta_2 = -F\sin\beta_4 = -Gg\gamma_1\gamma_2 - Hg\gamma_2\sin\alpha,$$

also

$$3_2)\qquad \gamma_1\gamma_2 = -\frac{1}{4}\frac{F}{Gg}(\sin\beta_1 + \sin\beta_2 - \sin\beta_3 - \sin\beta_4).$$

Das ist die Methode, deren sich Latimer Clark bediente, als er mit dem für die Electrical Committee der British Association construirten Electrodynamometer Beobachtungen anstellte.

Torsionsvorrichtung. Von dem eben genannten Physiker rührt auch die Zeichnung, die auf der vorangehenden Seite das Electrodynamometer in voller Montirung darstellt, her. Beide Rollen sind nach der schon beschriebenen Helmholtzschen Methode arrangirt. In besonderer Darstellung führe ich dann in der Figur 55 die Aufhängungs- und Torsionsvorrichtung des Apparates vor, zu der ich noch folgendes bemerke.

Damit die beiden Aufhängungsdrähte gleichviel von der Last der Rolle zu tragen haben, sind sie mit den bezüglichen Enden eines Seidenfadens verbunden, welcher über ein um eine horizontale Axe drehbares Rädchen gelegt ist. Zwei zu beiden Seiten der Drähte befindliche, ebenfalls drehbare Leiträdchen dienen einerseits zu sicherer Führung und andererseits, weil

sie durch die in der Figur sichtbaren Schiebervorrichtungen den Drähten beliebig genähert werden können, zur Regulirung des Abstandes dieser.

Da der die beiden Drähte durchfliessende Strom in dem einen Draht electromagnetisch entgegengesetzt wie in dem andern wirkt, so wird man diese Drähte einander möglichst nahe zu halten haben, weil sonst ihre bezüglichen Wirkungen nach aussen sich nicht gegenseitig zerstören würden.

Damit die Rolle beliebig gehoben und gesenkt werden kann, ist das Rad, über welchem die Seidenschnur läuft, an eine gabelförmig auslaufende Schraube angebracht, die in einer Mutter vertical auf- und abgedreht zu werden vermag. Um ihr auch eine horizontale Verschiebung erteilen zu können, ist die ganze Aufhängungsvorrichtung — wie der untere Teil der



Fig. 55.

Figur 55 zeigt — auf einem Schieber befestigt, der zwischen zwei Schienen hin und her bewegt werden kann.

Die Schraube, die der Leser im untern Teile der citirten Figur noch sieht, dient zur Drehung der zur Rechten von ihr gezeichneten Torsions-Vorrichtung, mittelst deren man das Azimut der Rolle beliebig justiren kann.

Zur Beobachtung ihrer Ablenkung trägt die Rolle einen kleinen Spiegel, die Beobachtungen selbst werden wie an einem Magnetometer ausgeführt.

Die Beschreibung der ursprünglichen Construction seines Electrodynamometers hat Weber im ersten Teil seiner *Electrodynamischen Maassbestimmungen* veröffentlicht. Da mit dem Instrument namentlich schwache Ströme

gemessen werden sollten, so wurden die Rollen, die feste sowohl als die bewegliche, mit sehr viel Windungen versehen, auch nahm die bewegliche Rolle innerhalb der festen einen grösseren Raum ein als bei dem später für die British Association angefertigten Apparat. Freilich hatte letzteres den Zweck, als Standard zur Herstellung kleinerer empfindlicherer Instrumente zu dienen.

Die Versuche, die Weber mit seinem Electrodynamometer angestellt hat, bieten noch heute den weitaus vollständigsten experimentellen Beweis für die Richtigkeit des Ampèreschen electrodynamischen Grundgesetzes in seiner Anwendung auf geschlossene Ströme dar. Sie bilden auch einen wichtigen Teil der Untersuchungen, durch welche dieser Physiker die numerische Bestimmung electrischer Grössen zu einem so hohen Grade von Präcision gebracht hat.

Electrodynamische Wagen.

726. Wahrscheinlich ist das Webersche Electrodynamometer, also die Combination zweier Rollen, deren eine in der andern schwebt und von einem Kräftepaar um eine verticale Axe zu drehen gesucht wird, am geeignetsten zur Ausführung absoluter Maassbestimmungen. Wo es sich jedoch darum handelt, die electromagnetischen Wirkungen eines schwachen Stromes so zu verstärken, dass man sie genügend genau zu messen vermag, da wird man, wenn man die Beobachtungen nur mit electrodynamischen Hilfsmitteln ausführen will, die beiden Rollen über oder neben und parallel zu einander legen. Auf diesem Gesichtspunkt beruht die Construction der electrodynamischen Wagen.

Wage von Joule. Die Einrichtung der Jouleschen Wage ist aus der beistehenden Figur 56 ersichtlich. Die bewegliche Rolle hängt an einem Wagebalken, der ein Laufgewicht trägt, die feste liegt gerade unter ihr. Werden beide Rollen von Strömen durchflossen, so ziehen sie sich an oder stossen sich ab, und man muss das Laufgewicht von der beweglichen Rolle weiter fort oder zu ihr näher hin schieben, wenn die Rollen zu einander wieder so liegen sollen, wie im stromlosen Zustande. Aus dem Verhältnis der beiden Hebelarme des Wagebalkens erhält man dann in bekannter Weise die der Verschiebung entsprechende Gewichtsvermehrung und damit die Schätzung der Kraft, die die Rollen auf einander, während Ströme sie durchzogen, ausübten.

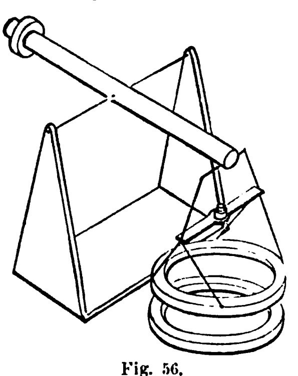


Fig. 56.

Electrodynamische Torsionswage. In einem andern Arrangement befestigt man die bewegliche Rolle vertical an einem Arm des Balkens einer

Torsionswaage (Fig. 57) und stellt ihr parallel zu beiden Seiten zwei feste Rollen auf. Lässt man die Ströme durch die festen Rollen nach entgegengesetzten Richtungen fliessen, so wird die bewegliche von der einen angezogen, von der andern abgestossen, ihr Ausschlag hiernach bedeutend verstärkt. Durch die Torsionsvorrichtung bringt man sie in ihre frühere Lage zurück.

An dem andern Arm des Balkens der Wage befestigt man entweder ein die bewegliche Rolle äquilibrirendes Gewicht, oder eine zweite Rolle, die man wiederum von zwei festen Rollen angreifen lässt. Doch lässt man an diesem Arm die Ströme nach entgegengesetzter Richtung wie an dem andern, fliessen, wodurch die Wirkung der erdmagnetischen Kraft auf die Rollen, da sie dann die Lage der einen beweglichen Rolle entgegengesetzt wie die der andern zu ändern sucht, gänzlich eliminirt wird.*)

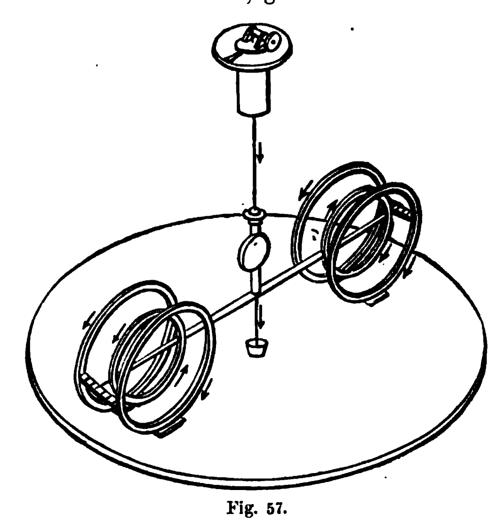


Fig. 57.

727. Nach Art. 715 wird das electromagnetische Feld, innerhalb dessen die Gleichgewichtslage der beweglichen Rolle sich befindet, möglichst gleichmässig ausfallen, wenn man erstens diese bewegliche Rolle im Verhältnis zu den festen Rollen ziemlich klein wählt, zweitens die festen Rollen gleich gross und drittens den Durchmesser dieser auf das $\sqrt{4/3}$fache des Abstandes ihrer Ebenen bringt. Die kleine Rolle wird dann in Richtung ihrer Axe in allen ihrer Gleichgewichtslage nahen Stellungen von nahezu einer und derselben Kraft angegriffen.

Eine strengere Theorie lehrt die Untersuchung des Art. 715 kennen. Lässt man nämlich, wie das für die Empfindlichkeit unserer Wage am vor-

*) Ebenso vollständig wird die Wirkung des Erdmagnetismus in der von Helmholtz (*Wiedemanns Annalen* XIV. p. 52—54 oder *Gesammelte Abhandlungen* I. p. 922 bis 925) angegebenen electrodynamischen Wage, die, weil sie eine gewöhnliche Schneidenwage verwendet, vor der im Text beschriebenen Torsionswage bedeutende Vorzüge haben dürfte, eliminirt. Anm. des Uebersetzers.

teilhaftesten ist, die Ströme die festen Rollen nach entgegengesetzten Richtungen durchziehen, so fallen die Glieder mit ungeraden negativen Potenzen des Radius C der vom Mittelpunkt der beweglichen Rolle durch die festen Rollen gelegten Kugelfläche aus der Entwickelung des magnetischen Potentials ω dieser festen Rollen in der Nähe der Mitte der beweglichen heraus, und man erhält für den variablen Teil dieses Potentials nach der Schlussgleichung des Art. 715

$$\omega = \frac{8}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\pi n \gamma \left\{ 3\frac{r}{C^2}P_2(\vartheta) - \frac{11}{7}\frac{r^6}{C^6}P_6(\vartheta) + \dots \right\}.$$

Da r den Abstand des Punktes, für den ω gelten soll, von der Mitte der kleinen Rolle bedeutet, so wird in der Tat in der Nähe dieser Mitte, wenn nur die festen Rollen, also auch C, hinlänglich gross sind, die Kraft von Punkt zu Punkt nur sehr wenig variiren.

Ich mache noch darauf aufmerksam, dass in diesem Falle die kleine Rolle so wie der Magnet liegt, die grossen Rollen die Stellen der Aussenrollen des in Art. 715 beschriebenen Drei-Rollen-Galvanometers einnehmen, die grosse Doppelrolle dieses Galvanometers aber fehlt.

728. Will man die drei Rollen einander nahezu gleich machen und sie so nahe an einander bringen, dass die Abstände zwischen ihren Drähten gegen ihre Durchmesser sehr klein ausfallen, so wählt man, um ein möglichst gleichmässiges electromagnetisches Feld hervorzubringen, die Durchmesser der festen Rollen einander ganz gleich und lässt sie um den $\sqrt{4/3}$ten Teil von dem Abstand ihrer Ebenen den Durchmesser der beweglichen Rolle übersteigen. Der Leser wird diese Behauptung leicht aus dem in Art. 704 für den Inductionscoefficienten zweier Kreise auf einander gegebenen Ausdruck ableiten können.

729. Wage mit in einander sich verschiebenden Rollen. Hängt man an den Arm einer Wage ein langes Solenoid mit vertical gestellter Axe und befestigt unter dieses (und es eventuell zum Teil umgebend) ein zweites weiteres Solenoid derartig, dass seine Axe mit der des aufgehängten zusammenfällt, so wird, wenn die die Solenoide durchfliessenden Ströme gleiche Richtung verfolgen, das bewegliche Solenoid in das Innere des festen hineingezogen. Die Kraft, mit der das geschieht, behält so lange einen und denselben Wert, als kein Ende eines Solenoids einem Ende des andern zu nahe kommt (Art. 677).

Cap. XVI.

Electromagnetische Beobachtungen.

—–×—

Theorie der gedämpften Oscillationen.

730. Oscillation. Da viele Messungen electrischer und magnetischer Grössen von der Beobachtung der Bewegung eines schwingenden Körpers abhängen, so werde ich dieses Capitel mit der Untersuchung der Natur der oscillatorischen Bewegungen und mit der Auseinandersetzung der besten Methoden zur Beobachtung solcher Bewegungen beginnen.

Die Bewegung eines Körpers, der kleine Oscillationen um seine stabile Gleichgewichtslage ausführt, ähnelt der eines Punktes, welcher unter dem Einfluss einer direct wie sein Abstand von einem festen Punkte variirenden Kraft steht.

Dämpfung. Doch haben in unsern Versuchen die Körper während ihrer Oscillation von verschiedenen Ursachen herrührende Widerstände zu überwinden. Dahin gehört der Widerstand, den ihnen die Viscosität der Luft und die des Aufhängungsfadens oder die Reibung der Balancirspitze entgegensetzt. Bei manchen electrischen Apparaten kommt noch die Gegenwirkung der von den schwingenden Magneten in nahe befindlichen Leitern inducirten Ströme dazu, denn da die Magnete diese Ströme durch ihre Bewegung induciren, so werden nach dem Lenzschen Gesetz diese Ströme gegen die Bewegung der Magnete stets ankämpfen. Dadurch werden die Oscillationen des betreffenden Körpers oft weit stärker als durch die vorhergenannten Ursachen gedämpft.

Manchmal geht der Experimentator direct darauf aus, die Bewegung des betreffenden Magnets rasch zu dämpfen oder zu beruhigen; er bringt dann den Magnet in ein Metallgehäuse oder stellt in seine Nähe einen geschlossenen metallischen Kreis, den *Dämpfer*, auf. Ich werde daher Widerstände der hervorgehobenen Art als *Dämpfende* bezeichnen.

Bei langsamen Schwingungen, etwa bei solchen, die der Beobachter mit Bequemlichkeit zu registriren vermag, scheint der ganze dämpfende Widerstand, wodurch er auch hervorgerufen sein mag, der bezüglichen Geschwindigkeit proportional zu sein. Nur bei Bewegungen, die weit rascher als die Schwingungen, wie man sie gewöhnlich in electromagne-

tischen Apparaten anwendet, vor sich gehen, hat man Grund, den Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional zu setzen.

Unsere Aufgabe beschränkt sich hiernach auf die Untersuchung der Bewegung eines Körpers, der von einer festen Stelle aus proportional seinem Abstande von dieser angezogen wird, und der bei seiner Bewegung gegen einen Widerstand, der ganz so wie seine Geschwindigkeit variirt, zu kämpfen hat.

731. Die Untersuchung dieser Bewegung lässt sich nach der von Tait*) gemachten Anwendung des Princips des Hodographen**) sehr leicht und elegant durchführen.

Kraftwirkungen auf einen Punkt, der sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit auf einer logarithmischen Spirale bewegt. Ich nehme

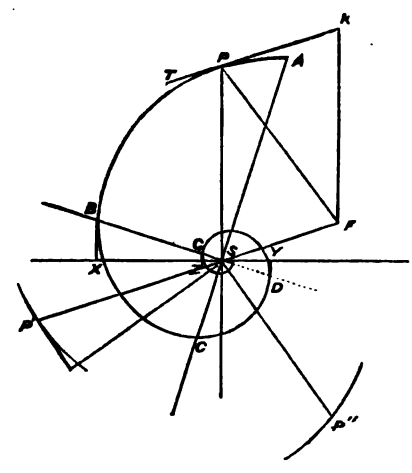


Fig. 58.

an, dass ein Punkt sich auf einer logarithmischen (äquiangularen) Spirale mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Pol S der Spirale bewegt, und suche die Beschleunigung, die er in einem Punkte derselben besitzt.

Bekanntlich ist die logarithmische Spirale dadurch definirt, dass alle ihre Tangenten PT mit den entsprechenden Radienvectoren immer einen und denselben Winkel α einschliessen.

---

*) *Proc. R. S. Edin.*, Dec. 16, 1867.

**) „Wenn sich ein Punkt irgendwie in einer Bahn bewegt, und von einem beliebigen festen Punkte O aus Linien gezogen werden, welche die Geschwindigkeit des bewegten Punktes für jeden Augenblick in Grösse und Richtung darstellen, so bilden die Endpunkte dieser Linien eine Curve, welche *Hodograph* genannt wird. Ein Bogenelement des Hodographs stellt die Beschleunigung dar. Die Tangente an den Hodographen stellt die Richtung dar, welche die Beschleunigung eines Punktes an der entsprechenden Stelle seiner Bahn hat.“ (Thomson und Tait: *Theoretische Physik*, Art. 37.)

Bezeichnet v die Geschwindigkeit, die der Punkt bei P besitzt, so hat man

$$v \sin\alpha = \omega . SP.$$

$\sin\alpha$ und ω sind beide constant, SP variirt also wie die Geschwindigkeit des Punktes. Will man daher den Hodographen dieser Bewegung construiren, so hat man von einem festen Punkte aus Linien zu ziehen, welche genau so gerichtet sind, wie die bezüglichen Tangenten der Spirale, und welche die Grösse der zugehörigen Radienvectoren dieser besitzen.

Ich wähle S, den Pol der Spirale, zum Pol des Hodographen, ziehe SP' parallel PT und mache $SP' = SP$. P' ist dann der dem Punkte P entsprechende Punkt des Hodographen. Da aber der Winkel $TPS = \alpha$ für alle Punkte der Spirale einen und denselben Wert hat, so ist $P'SP = \pi - \alpha$ ebenfalls von derselben Grösse für alle Hodographenpunkte. Der Hodograph ist also die ursprüngliche Spirale, gedreht um ihren Pol durch den Winkel $\pi - \alpha$.

Die Geschwindigkeit v des Punktes P auf der Spirale wird durch die Tangente PT dargestellt, die Geschwindigkeit v' des Punktes P' auf dem Hodographen durch die Tangente $P'T'$. Daher ist die Beschleunigung des Punktes P nach Grösse und Richtung

$$B = \frac{v'\omega}{\sin\alpha}.$$

Nun kann man für die Bewegung des Punktes P' auf dem Hodographen genau so wie für die des Punktes P auf der Spirale den Hodographen zeichnen, und dieser Hodograph des Hodographen ist wiederum der Hodograph, gedreht um den Pol durch den Winkel $\pi - \alpha$, also die ursprüngliche Spirale gedreht um ihren Pol durch den Winkel $2\pi - 2\alpha$.

Bezeichnet demnach P'' den Punkt des Hodographen vom Hodographen, der dem Punkte P' des Hodographen, also dem Punkte P der Spirale entspricht, so hat man

$$v' = \frac{\omega}{\sin\alpha} SP'',$$

also für die Beschleunigung des Punktes P

$$B = \frac{\omega^2}{\sin^2\alpha} SP''.$$

Darin ist SP'' die Linie SP gedreht um den Winkel $2\pi - 2\alpha$.

Zieht man durch den Punkt P die Linie PF parallel zur Linie SP'', so zeigt PF die Richtung der Beschleunigung des Punktes P an, macht man noch $PF = SP''$, so variirt auch PF von Punkt zu Punkt wie die Beschleunigung, und es ist

$$B = \frac{\omega^2}{\sin^2\alpha} PF.$$

Man kann nun diese Beschleunigung nach den Richtungen PS und PK zerlegen, und erhält

$$B_1 = \frac{\omega^2}{\sin^2\alpha} PS = \text{Beschleunigung in Richtung des Radiusvectors } PS,$$

$$B_2 = \frac{\omega^2}{\sin^2\alpha} SF = \quad „ \quad „ \quad „ \quad \text{der Tangente } PK.$$

Die erste Componente zeigt eine auf den sich bewegenden Punkt nach dem Pol S hin wirkende und wie der Abstand dieses Punktes von diesem Pol variirende Kraft an.

Die zweite wirkt nach der der Geschwindigkeit entgegengesetzten Richtung. Da man ferner, weil $SP = PF$ und $PSF = \pi + \alpha$ ist,

$$SF = PK = 2P'S\cos\alpha = -\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\omega} r$$

hat, so wird auch

$$B_2 = -2\frac{\omega\cos\alpha}{\sin\alpha} r.$$

Hiernach bewegt sich ein Punkt P, der von einem Centrum S mit der proportional seiner Entfernung r von ihm variirenden Kraft μr angezogen wird, wenn er einen wie seine Geschwindigkeit variirenden Widerstand $-2\varkappa r$ zu überwinden hat, auf einer logarithmischen Spirale mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω. Winkelgeschwindigkeit und Spirale sind durch die Gleichungen

$$\overline{\mu} = \frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}; \quad \varkappa = \omega\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

bestimmt.

Macht man $\alpha = \pi/2$, so wird

$$\mu_0 = \omega_0^2, \quad \varkappa_0 = 0.$$

Die Spirale geht in einen Kreis über.

Soll für eine Anzahl von Punkten, die sich auf verschiedenen Spiralen bewegen, die Attraction gegen die bezüglichen Pole einen und denselben Wert μ_0 haben, so muss die Winkelgeschwindigkeit von Spirale zu Spirale wie der Sinus des Parameterwinkels α variiren, also für eine Spirale, die durch den Winkel α gekennzeichnet ist,

$$\omega = \omega_0 \sin\alpha$$

sein.

732. Die Oscillation unter Dämpfung als Projection einer solchen Spiralbewegung. Da der Abstand der Projection des Punktes P auf eine horizontale durch S gelegte Axe XY von dem Pole S wie die Projection des Abstandes des Punktes P von S auf dieselbe Axe variirt, da ferner auch die Geschwindigkeit dieser Projection des Punktes P wie die Projection

der Geschwindigkeit von P abändert, so folgt, dass die besagte Projection des Punktes P sich auf der Axe XY genau so bewegt, wie wenn sie von S mit einer das μfache ihres Abstandes von S betragenden Kraft angezogen würde und zugleich gegen einen Widerstand von der $2\varkappa$fachen Grösse ihrer Geschwindigkeit fortwährend zu kämpfen hätte.

Daraus ergiebt sich aber der für uns wichtigste Schluss:

Die geradlinige Bewegung eines Punktes, der nach einem Centrum S mit der seinem Abstande von diesem Centrum proportional variirenden Kraft μr hingezogen wird, und der in jedem Augenblicke einen seiner augenblicklichen Geschwindigkeit v proportionalen Widerstand $2\varkappa v$ zu überwinden hat, ist die Horizontalprojection der Bewegung eines andern Punktes, der mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω auf einer um den Pol S gelegten logarithmischen Spirale fortgleitet. Spirale und Winkelgeschwindigkeit des auf ihr sich bewegenden Punktes sind durch die Gleichungen

$$\mu = \frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}, \quad \varkappa = \omega\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

bestimmt.

733. Die Gleichung der Spirale ist

$$r = Ce^{-\varphi\cot\alpha},$$

worin

$$\varphi = \omega t$$

zu setzen und unter t die Zeit zu verstehen ist. Die Horizontalprojection der Bewegung wird also durch die Gleichung

$$1) \qquad x = a + r\sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\mu - \varkappa^2}$$

bestimmt, und das ist die Gleichung für die Bewegung des den bezeichneten Kraftwirkungen unterliegenden Punktes auf der Axe XY. x bezeichnet den Abstand, den dieser Punkt zur Zeit t von dem anziehenden Pole S hat, a giebt die Entfernung desselben von diesem Pole, wenn er sich in der stabilen Gleichgewichtslage befindet.

Die aufeinanderfolgenden Umkehrstellen unseres auf der Axe sich bewegenden Punktes erhält man durch folgende Construction. Man zieht durch das Attractionscentrum S unter dem Winkel

$$2) \qquad \alpha = \arccos\frac{\varkappa}{\sqrt{\mu}}$$

eine Gerade und fällt von den Punkten $\ldots B, C, D, \ldots$, wo diese Gerade die Spirale schneidet, Lote auf die Horizontalaxe, d. h. auf die Bewegungslinie des Punktes. Die Fusspunkte $\ldots X, Y, Z \ldots$ dieser Lote geben dann die auf einanderfolgenden Umkehrstellen des oscillirenden Punktes in seinen successiven Schwingungen an.

Zu beobachtende und zu berechnende Grössen.

734. Ich setze voraus, dass der Observator die Bewegung des schwingenden Körpers nach einer der im vierten Capitel des dritten Teiles auseinandergesetzten Methoden, etwa mit Spiegel, Scala und Fernrohr, verfolgt. Er hat dann durch directe Beobachtung zu bestimmen:

1) Die Scalenablesung an den Stillstandpunkten (den Umkehrstellen), wodurch die successiven *Elongationen* des schwingenden Körpers aus seiner stabilen Gleichgewichtslage gegeben sind.

2) Die Zeit, zu der ein bestimmter Teilstrich der Scala nach der positiven oder negativen Richtung an einer festen Marke (etwa dem Verticalfaden eines Fernrohrs) vorbeigeht.

3) Die zu bestimmten Zeitpunkten an einer festen Marke vorübergehenden Scalenteilstriche. Diese Beobachtungen werden ausser bei langperiodischen Oscillationen nur in seltenen Fällen ausgeführt.*)

Aus diesen Beobachtungen sind dann zu bestimmen:

1) Das logarithmische Decrement der Schwingungen.

2) Die der Gleichgewichtslage des Körpers entsprechende Scalenablesung.

3) Die Dauer einer Schwingung.

Bestimmung des logarithmischen Decrements.

735. Unter *Logarithmisches Decrement* versteht man den Logarithmus des Verhältnisses, in welchem die Amplituden zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Schwingungen zu einander stehen.

Wir haben also, wenn dieses Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden gleich ρ gesetzt wird, und λ das logarithmische Decrement im natürlichen, L das im Briggischen, gewöhnlichen, Logarithmensystem angiebt,

1a) $$\lambda = \log \rho, \qquad L = \log_{\text{brigg}} \rho.$$

Man kann λ als das natürliche, L als das gewöhnliche logarithmische Decrement bezeichnen. Die beiden Grössen stehen zu einander in der Beziehung

2) $$\lambda = L \log 10.$$

Seien x_1, x_2, x_3 die registrirten Scalenablesungen, die drei aufeinanderfolgenden Elongationen X, Y, Z entsprechen, bezeichne ferner a die der Gleichgewichtslage zugehörige Scalenablesung und $r_1 = BX$ (Fig. 58) die Länge des von der ersten Elongation X auf der Bewegungsgeraden errichteten Lotes bis zu dem Punkte, wo es zum ersten Male die Spirale trifft, dann ist

a) $$\rho = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2}.$$

---

*) Gauss, *Resultate des Magnetischen Vereins*, 1836, II.

Man hat aber nach Art. 733)

b)
$$\begin{aligned} x_1 - a &= r_1 \sin\alpha, \\ x_2 - a &= - r_1 \sin\alpha e^{-\pi\cot\alpha}, \\ x_3 - a &= r_1 \sin\alpha e^{-2\pi\cot\alpha}, \end{aligned}$$

somit

3)
$$\lambda = \pi \cot\alpha.$$

Daraus ergiebt sich zunächst, dass das logarithmische Decrement während der ganzen Bewegung des Körpers einen und denselben Wert behält. Ferner findet man den die logarithmische Spirale charakterisirenden Winkel

4)
$$\alpha = \operatorname{arccot}\frac{\lambda}{\pi}.$$

Das logarithmische Decrement lässt sich nach der Formel 1a) immer aus drei aufeinanderfolgenden Elongationen berechnen. Hat man aber eine grössere Anzahl von Elongationen zur Verfügung, so wird

$$\lambda = \log\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2}, \quad \lambda = \log\frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_3}, \quad \lambda = \log\frac{x_3 - x_4}{x_5 - x_4}, \; \ldots .$$

also

1b)
$$\lambda = \frac{1}{n-1}\log\frac{c_1}{c_n},$$

wenn c_1 die Amplitude der ersten, c_n die der $n$ten beobachteten Schwingung angiebt. Die Formel 1b) für λ begründet schon an sich gegen die 1a) einen Fortschritt, weil die Logarithmen etwaiger Fehler in der Bestimmung der Amplituden im Resultat im Verhältnis von 1 zu $n - 1$ verkleinert erscheinen. Man kann sie aber noch verbessern, wenn man über die Anzahl n von Schwingungen, die zwischen der ersten und letzten Beobachtung liegen, passend verfügt. Nachdem man nämlich eine Amplitude c_1 registrirt hat, lässt man so viele Schwingungen vorbeigehen, bis die andere Amplitude c_n sich zu jener so nahe als möglich wie $1 : e$ verhält. Da dann λ der Zahl $1/(n-1)$ nahe kommt, so ist die Anzahl n der Schwingungen die der Zahl $1 + \frac{1}{\lambda}$ nächste ganze Zahl.

Doch wird diese Methode nur dann von Vorteil sein, wenn sich die erste und letzte Amplitude mit gleicher Genauigkeit beobachten lassen. Im allgemeinen wird aber die zur Erfüllung der hervorgehobenen Bedingung erforderliche Zeit zu gross ausfallen, und da einerseits die Wahrscheinlichkeit fremder Störungen mit der Beobachtungsdauer zunimmt, und andererseits die Beobachtung kleiner Amplituden sich mit geringerer Präcision wie die grosser ausführen lässt, so wird man meist gut tun, zwischen der ersten und letzten Beobachtung weniger Zeit, als die Theorie verlangt, verstreichen zu lassen.

Bestimmung der Gleichgewichtslage.

736. Aus zwei Elongationen und dem logarithmischen Decrement. In manchen Fällen hat man die Gleichgewichtslage des Körpers aus zwei aufeinanderfolgenden Beobachtungen zu bestimmen, während das logarithmische Decrement aus einer speciellen Untersuchung eruirt worden ist. Die zu benutzende Formel ist dann nach b) und 3) in Art. 735

$$a = \frac{x_1 + x_2 e^\lambda}{1 + e^\lambda}. \tag{1}$$

737. Aus drei Elongationen. Ist das logarithmische Decrement nicht sicher genug bekannt, so muss man drei aufeinanderfolgende Elongationen x_1, x_2, x_3 beobachten. Da dann für die drei Elongationen, die unter b) in Art. 735 aufgestellten Gleichungen gelten, so hat man

$$(x_1 - a)(x_3 - a) = (x_2 - a)^2$$

und

$$a = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_1 + x_3 - 2x_2}. \tag{2}$$

Die Elongationen X und Z liegen auf derselben Seite der Gleichgewichtslage, unterscheiden sie sich nur wenig von einander, so werden x_1 und x_3 einander nahezu gleich sein, und man hat näherungsweise

$$a = \frac{1}{4}(x_1 + 2x_2 + x_3). \tag{2_1}$$

Bestimmung der Schwingungsdauer.

738. Nachdem man die der Gleichgewichtslage des oscillirenden Körpers entsprechende Scalenablesung in der angegebenen Weise bestimmt hat, macht man an ihrer Stelle oder doch ihr so nahe als möglich eine deutliche Marke und notirt für eine Anzahl aufeinanderfolgender Schwingungen die Zeitmomente, an denen diese Marke gerade durch den Verticalfaden des Fernrohrs durchgeht.

Da man bei der Markirung der Gleichgewichtsablesung auf der Scala dieselbe im allgemeinen nicht genau treffen wird, nehme ich an, die angebrachte Marke befinde sich in der Entfernung x, die als klein vorausgesetzt werden darf, von derselben. Die Seite der Scala, auf der die Marke von der wirklichen Gleichgewichtsablesung liegt, bezeichne ich als die positive Seite derselben. Ich nenne ferner t_1 die Zeit, zu der die Marke in positiver Richtung durch den Verticalfaden hindurchgeht, $t_2, t_3, \ldots$ alle folgenden Durchgangszeiten. Die entsprechenden Zeiten $P_1, P_2, P_3, \ldots$ für die Durchgänge der wahren Gleichgewichtsablesung werden von diesen Zeiten $t_1, t_2, t_3, \ldots$ ein wenig verschieden sein. Wenn aber $v_1, v_2, v_3, \ldots$ die Geschwindigkeiten,

die der oscillirende Körper bei seinen bezüglichen Durchgängen durch die Gleichgewichtslage besitzt, bezeichnen, so hat man, da während der kurzen Zeitintervalle $t_1 - P_1$, $t_2 - P_2$, $t_3 - P_3$ ... diese Geschwindigkeiten als unveränderlich angesehen werden dürfen,

$$1') \qquad P_1 = t_1 - \frac{x}{v_1}, \quad P_2 = t_2 - \frac{x}{v_2}, \quad P_3 = t_3 - \frac{x}{v_3}, \ldots$$

Nun ist aber, wenn T die Zeit, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen verstreicht, also die Dauer einer einfachen Schwingung angiebt,

$$2') \qquad \begin{aligned} T &= P_2 - P_1, \\ T &= P_3 - P_2, \end{aligned}$$

also

$$2'a) \qquad \begin{aligned} T &= (t_2 - t_1) + x\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right), \\ T &= (t_3 - t_2) + x\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3}\right). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Grössen $1/v_1$, $1/v_2$, $1/v_3$ benutzen wir die Bewegungsgleichung des Körpers. Es ist nämlich

$$a) \qquad x - a = r_1 \sin(\alpha + \omega t)\, e^{-\omega t \cot \alpha},$$

daher allgemein die Geschwindigkeit v zur Zeit t

$$b) \qquad v = \omega r_1 e^{-\omega t \cot \alpha}[\cos(\omega t + \alpha) - \cot \alpha \sin(\omega t + \alpha)].$$

In dem Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen ändert sich ωt um π, wir haben also

$$c) \qquad \frac{v_\varkappa}{v_{\varkappa - 1}} = - e^{\pi \cot \alpha}$$

oder zufolge der Gleichungen 1a) und 3) in Art. 735

$$c_1) \qquad \frac{v_{\varkappa - 1}}{v_\varkappa} = - \rho,$$

wo also ρ das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden der Schwingung angiebt. Hiernach wird

$$v_2 = -\frac{1}{\rho} v_1, \quad v_3 = -\frac{1}{\rho} v_2 = \frac{1}{\rho^2} v_1$$

und

$$2'b) \qquad \begin{aligned} T &= (t_2 - t_1) + \frac{x}{v_1}(1 + \rho), \\ T &= (t_3 - t_2) - \frac{x}{v_1}\rho(1 + \rho). \end{aligned}$$

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen unter 2′b) die Grösse x/v_1, so resultirt

3) $$\tau = \frac{x}{v_1} = \frac{t_1 - 2t_2 + t_3}{(\rho + 1)^2},$$

also

2_1a) $$T = \frac{1}{\rho + 1}[\rho(t_2 - t_1) + (t_3 - t_2)]$$

oder

2_1b) $$T = \frac{1}{2}(t_3 - t_1) - \frac{1}{2}\frac{\rho - 1}{\rho + 1}(t_1 - 2t_2 + t_3).$$

Für die Zeit P_2 des zweiten, also des mittlern Durchganges der wahren Gleichgewichtslage, ergiebt sich daraus

1_1) $$P_2 = \frac{1}{4}(t_1 + 2t_2 + t_3) - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1}\right)^2(t_1 - 2t_2 + t_3).$$

Drei Durchgangsbeobachtungen einer der wahren Gleichgewichtsablesung nahe liegenden Marke genügen also völlig, um die Dauer $2T$ eines vollen Hin- und Herganges, den Zeitmoment des auf die Beobachtungen bezogenen mittlern Durchganges der wahren Gleichgewichtsablesung und die in Zeit ausgedrückte Entfernung τ dieser wahren Gleichgewichtsablesung von der markirten zu bestimmen.

Eine grössere Anzahl von Durchgangsbeobachtungen combinirt man nach den Regeln, die die Methode der kleinsten Quadrate vorschreibt, indem man immer im Auge behält, dass die Gleichungen

$$T = t_2 - t_1 + \frac{x}{v_1}(1 + \rho),$$

$$T = t_3 - t_2 - \frac{x}{v_1}\rho(1 + \rho),$$

$$T = t_4 - t_3 + \frac{x}{v_1}\rho^2(1 + \rho),$$

— — — — — — — —

die die Beobachtungen liefern, zur Berechnung der beiden Grössen T und x/v_1 dienen sollen, und dass $P_{\frac{1+n}{2}}$ aus der mittelsten Gleichung sich ergiebt.

Hat man zum Beispiel fünf Durchgangszeiten registrirt, so wird

2_2) $$T = \frac{1}{10}(2t_5 - t_4 - t_2 - 2t_1)$$
$$- \frac{1}{10}(t_1 - 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 + t_5)\frac{\rho - 1}{\rho + 1}\left(2 - \frac{\rho}{1 + \rho^2}\right),$$

1_2) $$P_3 = \frac{1}{8}(t_1 + 2t_2 + 2t_3 + 2t_4 + t_5)$$
$$- \frac{1}{8}(t_1 - 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 + t_5)\left(\frac{\rho - 1}{\rho + 1}\right)^2.$$

739. Wenn die Bewegung des schwingenden Körpers so rasch vor sich geht, dass der Beobachter unmittelbar aufeinanderfolgende Durchgänge nicht zu registriren vermag, so kann er zwischen den Registrirungen jedesmal zwei oder vier Beobachtungen auslassen, doch muss er sich immer so einrichten, dass zwei von ihm nach einander registrirte Durchgänge den Körper nach entgegengesetzten Richtungen hinführen. Bei der letzten Beobachtung soll der Körper sich nach derselben Richtung wie bei der ersten hinbewegen.

Bei Schwingungen, die lange Zeit hindurch genügend regelmässig vor sich gehen, braucht man während dieser ganzen Zeit hindurch überhaupt nicht zu registriren. Man beobachtet erst soviel Durchgänge, als zur ersten annähernden Bestimmung der Schwingungsdauer und der mittlern Durchgangszeit P während dieser Beobachtungsreihe hinreicht, und notirt, nach welcher Richtung der Körper sich beim mittlern Durchgang P hinbewegt, ob dieser Durchgang ein positiver oder negativer ist. Dann zählt man entweder die Schwingungen, die der Körper noch weiter vollführt, ohne die Durchgänge zu registriren, oder man überlässt auch den Apparat ganz sich selbst. Am Ende der Zeit, während deren keine Durchgänge beobachtet worden sind, beginnt man eine neue Reihe von Durchgangsbestimmungen, aus denen man wieder die jetzt geltende Schwingungsdauer T' und die Zeit P' des jetzigen mittlern Durchganges berechnet, indem man wieder die Richtung des Durchganges notirt.

Sind T' und T einander nahezu gleich, so ist das ein Beweis für die Regelmässigkeit der Schwingung und Berechtigung des Verfahrens. $(P' - P)/T$ muss dann einer ganzen Zahl sehr nahe gleich sein, die je nachdem die Durchgänge zu den berechneten Zeiten P' und P nach gleichen oder entgegengesetzten Richtungen geschehen, gerade oder ungerade ausfällt, sonst ist die ganze Beobachtung wertlos. Dividirt man nun $P' - P$ durch diese dem Quotienten $(P' - P)/T$ nächstliegende ganze Zahl n, so erhält man in

$$T = \frac{P' - P}{n}$$

einen mittlern Wert für die Schwingungsdauer.

740. Die so eruirte Schwingungsdauer ist wie gesagt eine mittlere Schwingungsdauer, bezogen auf die ganze Beobachtungsdauer. Sie muss noch auf unendlich kleine Bögen und auf nicht gedämpfte Schwingungen reducirt werden.

Reduction auf unendlich kleine Bögen. Bezeichnet T_1 die auf unendlich kleine Bögen reducirte, T die nach der eben gegebenen Anleitung bestimmte factische Schwingungsdauer, so kann man im allgemeinen

$$T = T_1(1 + \varkappa c^2) \tag{4'}$$

setzen, wo $\varkappa$ einen Zahlencoefficienten angiebt, der bei gewöhnlichen Pendel-

bewegungen den Wert 1/64 hat, und c die Amplitude der Schwingung zu der Zeit, da die beobachtete Schwingungsdauer gleich T ist, bedeutet.

Die Dauer von n Schwingungen ist daher

$$nT = T_1\,[n + \varkappa(c_1^2 + c_2^2 + \ldots c_n^2)].$$

Da aber nach Art. 736

$$c_1 = c_1, \quad c_2 = c_1\rho^{-1}, \quad c_3 = c_1\rho^{-2}, \ldots \; c_n = c_1\rho^{-(n-1)}$$

ist, so folgt

$$nT = T_1\left(n + \varkappa\,\frac{\rho^2 c_1^2 - c_n^2}{\rho^2 - 1}\right),$$

oder näherungsweise

$$4)\qquad T_1 = T\left(1 - \frac{\varkappa}{n}\,\frac{\rho^2 c_1^2 - c_n^2}{\rho^2 - 1}\right),$$

wo T die aus den Beobachtungen abgeleitete, T_1 die für unendlich kleine Bögen corrigirte Schwingungsdauer angiebt.

Reduction auf nicht gedämpfte Schwingungen. Die Reduction auf nicht gedämpfte Schwingungen ergiebt sich unmittelbar aus der Schlussbemerkung des Art. 731. Nicht gedämpfte Schwingungen sind die Horizontalprojection einer Kreisbewegung, und da nach dem citirten Artikel bei Bewegung eines Punktes auf verschiedenen Spiralen seine Winkelgeschwindigkeit in einem festen Verhältnis zu dem Sinus des Winkels α der betreffenden Spirale steht, und ein Kreis eine logarithmische Spirale vom Winkel $\pi/2$ ist, so folgt, wenn T_0 die auf nicht gedämpfte, T_1 die aus den Beobachtungen abgeleitete, auf gedämpfte Schwingung bezogene und auf unendlich kleine Bögen reducirte Schwingungsdauer angiebt,

$$T_0 = T_1 \sin\alpha,$$

oder nach Art. 735, 3)

$$5)\qquad T_0 = T_1\,\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}.$$

Periodische und Aperiodische Bewegungen.

741. Die allgemeine Differentialgleichung für die Bewegung eines Körpers, der von einem festen Centrum angezogen wird, und in jedem Augenblicke einen seiner augenblicklichen Geschwindigkeit proportionalen Widerstand zu überwinden hat, ist, wenn die Bahn geradlinig verläuft,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varkappa\frac{dx}{dt} + \omega^2(x - a) = 0.$$

x ist die Coordinate des Körpers zur Zeit t, a wenn er sich an seiner Gleichgewichtsstelle befindet.

$\varkappa$ ist der halbe Widerstandscoefficient, ω die Quadratwurzel aus der Beschleunigung, die der Körper in der Einheit der Entfernung von seiner Gleichgewichtsstelle besitzt.

Um diese Gleichung zu integriren setze ich zuvörderst

$$x - a = y e^{-\varkappa t}. \tag{1}$$

Sie geht dann über in

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\omega^2 - \varkappa^2) y = 0.$$

Da die Lösung dieser Gleichung

$$\begin{aligned} y_1 &= C \cos (t\sqrt{\omega^2 - \varkappa^2} + \alpha), && \text{für } \omega > \varkappa; \\ y_2 &= A + Bt && \text{"} \quad \omega = \varkappa; \\ y_3 &= C' \cosh (t\sqrt{\varkappa^2 - \omega^2} + \alpha'), && \text{"} \quad \omega < \varkappa \end{aligned} \tag{2}$$

ist, so besteht die Bewegung des Körpers:

Für $\omega > \varkappa$ in einer wirklichen, unendlich lange andauernden Oscillation von constanter Schwingungsdauer und stetig abnehmender Amplitude. Je grösser $\varkappa$ ausfällt, desto grösser wird die Schwingungsdauer und desto stärker nehmen die Amplituden ab.

Für $\omega < \varkappa$ in einer aperiodischen Translation. Der Körper kann während seiner ganzen Bewegungsdauer nur einmal durch seine Gleichgewichtslage gehen. Dann entfernt er sich von ihr bis zu seiner grössten Elongation, kehrt um und strebt ihr wieder zu, ohne sie doch je zu erreichen.

Galvanometer, in denen der Widerstand, mit welchem der Magnet oder die Rolle bei der Bewegung zu kämpfen hat, so gross ist, dass der letztere Fall eintritt, heissen *Aperiodisch* (*dead beat*).

Sie sind bei manchen Versuchen von Nutzen, namentlich finden sie beim Signalgeben in der Telegraphie Anwendung, wo freie Schwingungen die Bewegungen, auf die es eben ankommt, verdecken würden.

Berechnung der Gleichgewichtslage aus fünf in gleichen Zeitintervallen gemachten Scalenablesungen.

Wie aber auch die Werte von $\varkappa$ und ω sich zu einander verhalten mögen, immer kann man aus fünf durch gleiche Zeitintervalle getrennten

Ablesungen p, q, r, s, t der Scale die Gleichgewichtslage des Körpers durch die Formel

$$a = \frac{q(rs - qt) + r(pt - r^2) + s(qr - ps)}{(p - 2q + r)(r - 2s + t) - (q - 2r + s)^2}$$

berechnen.

Ueber die geeignetste Grösse der Ablenkung.

742. Will man mit einer Tangentenboussole die Stärke eines constanten Stromes bestimmen, so stellt man erst die Windungsebene ihrer Rolle parallel dem magnetischen Meridiane und notirt die Scalenablesung, die die Lage des Magnets fixirt. Dann lässt man den Strom durch die Rolle fliessen und beobachtet die neue Gleichgewichtslage, in die der Magnet sich begiebt. Die Differenz φ der beiden gehörig reducirten Scalenablesungen giebt die Ablenkung, die der Magnet durch den Strom aus seiner ersten Ruhelage erfahren hat.

Hiernach wird, wenn H die erdmagnetische Horizontalintensität, G den Coefficienten des Galvanometers und γ die Stärke des zu messenden Stromes bezeichnet,

$$1_1)\qquad \gamma = \frac{H}{G}\, tg\,\varphi.$$

Das gilt, wenn der Magnet auf einer Spitze balancirt ist. Hängt er jedoch an einem Faden, dessen Torsionscoefficient τMH (über die Wahl dieser Bezeichnung siehe Art. 452), so hat man

$$1_2)\qquad \gamma = \frac{H}{G}(\mathrm{tg}\,\varphi + \tau\varphi\,\sec\varphi).$$

743. Manche Galvanometer sind so eingerichtet, dass man die Anzahl der Windungen ihrer Rolle beliebig vergrössern oder verkleinern kann, bei andern wieder vermag man einen bestimmten Teil des Stromes vom Galvanometer abzulenken und auf einen besondern Leiter überzuführen; in beiden Fällen ist man dadurch in der Lage, den Wert von G, von welchem die Einwirkung eines die Rolle mit der Stärke Eins durchfliessenden Stromes auf den Magnet abhängt, abzuändern. Man kann also auch die Einrichtung stets so treffen, dass die Ablenkung, die der Magnet durch einen bestimmten Strom erfährt, einen bestimmten Wert erreicht, und es fragt sich, welche Ablenkung zur Berechnung der Stärke dieses Stromes sich am geeignetsten herausstellt.

Die Differentiation der Gleichung 1_1) des vorangehenden Artikels nach φ giebt

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{H}{G}\sec^2\varphi,$$

mithin wird wegen $G = H\,\mathrm{tg}\,\varphi/\gamma$

$$2)\qquad \frac{d\varphi}{d\gamma} = \frac{1}{2\gamma}\sin 2\varphi.$$

Da nun für einen bestimmten Wert des γ einer geringen Aenderung der Stromstärke, die grösstmögliche Aenderung der Ablenkung entspricht, wenn $\varphi = 45^0$ gewählt wird, so folgt, dass man den Wert von G so lange wird zu variiren haben, bis $G\gamma$ der Grösse H so nahe als möglich kommt. Bei der Application starker Ströme wird man also besser kein zu empfindliches Galvanometer in Anwendung bringen.

Wie man den Strom am besten auf die Magnetnadel wirken lässt.

744. Befindet sich der Beobachter in der Lage, mit Hilfe eines Stromschlüssels die Bahn des Stromes beliebig schliessen und öffnen zu können, so operirt er mit diesem Schlüssel am vorteilhaftesten, wenn er den Magnet mit der geringstmöglichen Geschwindigkeit in seine Gleichgewichtslage gelangen lässt. Das Verfahren dazu hat Gauss angegeben.

Der Stromkreis, in dem das Galvanometer eingeschaltet ist, soll zunächst offen sein, der Magnet sich also in seiner Ruhelage, im magnetischen Meridian, befinden. Der Beobachter schliesst für einen Moment die Strombahn, der Magnet setzt sich dadurch nach seiner neuen Gleichgewichtslage in Bewegung. Jetzt öffnet er wieder die Strombahn, der Magnet wird dann von keiner Kraft (ausser von seiner Trägheit) weiter getrieben, und würde bald nach seiner frühern Lage zurückkehren, wenn der Beobachter nicht wieder den Kreis schlösse. So fährt der Beobachter mit rasch auf einander folgendem Schliessen und Oeffnen des Stromes fort, bis der Magnet ohne nennenswerte Geschwindigkeit in seine neue Gleichgewichtslage gelangt ist. Hat er diese erreicht, so lässt der Beobachter den Stromkreis geschlossen, der Magnet bleibt dann in seiner neuen Lage unbeweglich stehen.

Die Zeitintervalle zwischen den einzelnen Operationen wird der Beobachter natürlich den Verhältnissen anzupassen haben. Für den Fall, dass man den die Bewegung des Magnets dämpfenden Widerstand vernachlässigen und von der Verschiedenheit der gesammten Kraft, die auf den Magnet in seiner neuen Gleichgewichtslage wirkt, gegen die in der alten abstrahiren darf, lässt sich eine feste Regel aufstellen. Da man nämlich die neue Kraft während der Dauer ihrer ersten Wirkung dem Magnete so viel kinetische Energie möchte mitteilen lassen als nachher, wenn der Strom wieder unterbrochen ist, von der ursprünglichen Kraft vernichtet wird, so muss man den Strom beim ersten Male so lange geschlossen halten, bis der Magnet die Hälfte des Weges zu seiner neuer Gleichgewichtslage zurückgelegt hat. Wird dann der Strom unterbrochen, so bewegt sich der Magnet noch weiter auf der andern Hälfte des Weges, aber seine Geschwindigkeit nimmt stetig ab und ist vollständig verschwunden, wenn er gerade seine neue Gleichgewichtslage erreicht hat. So wie das geschehen ist, schliesst man den

Strom wieder und lässt ihn geschlossen bleiben, der Magnet bewegt sich aber nicht mehr, da er sich eben in der durch die Kraftwirkung des Stromes ihm zugewiesenen Gleichgewichtslage befindet.

Nun beträgt die Zeit, die ein schwingender Körper braucht, um von einem Punkte seiner grössten Elongation zu einem, der sich gerade in der Mitte zwischen dieser und der Gleichgewichtslage befindet, zu gelangen, ein Sechstel der vollen Schwingungsperiode, also ein Drittel der Dauer, die er zu einer einfachen Schwingung verwendet. Daher hat der Beobachter, nachdem er sich durch besondere Versuche von der Zeit, die eine einfache Schwingung des Körpers in Anspruch nimmt, versichert, den Strom während eines Drittels dieser Zeit geschlossen, während des nächsten Drittels offen, und dann für die ganze Beobachtungsdauer wieder geschlossen zu halten.

Der Magnet gelangt dann in seine neue Gleichgewichtslage entweder ganz ohne Geschwindigkeit an, oder doch mit einer so geringen Tendenz zur Weiterbewegung, dass er nur ganz unbedeutende Vibrationen um dieselbe vollführt.

Dadurch ist aber der Beobachter im Stande, die Beobachtung der neuen Gleichgewichtslage, ohne erst auf das Aufhören der Vibrationen warten zu müssen, sofort vorzunehmen. Zur Erleichterung der genauen Abschätzung der Zeitintervalle bedient man sich eines Metronoms, das man so gestellt hat, dass es während der Dauer einer einfachen Schwingung des Magnets gerade drei Mal schlägt.

Verwickelter wird die Regel, wenn der Widerstand, mit dem die Bewegung des Magnets zu kämpfen hat, so gross ist, dass er in Rechnung gezogen werden muss, doch hören hier die Schwingungen, die der Magnet um seine neue Gleichgewichtslage vollführt, falls man das richtige Zeitmaass für Schliessen und Oeffnen des Kreises nicht ganz getroffen haben sollte, an sich schon so rasch auf, dass man von derselben Regel Gebrauch machen darf.

Will man den Magnet in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage wieder zurückkehren lassen, so öffnet man den Stromkreis und lässt ihn während eines Drittels der Dauer einer einfachen Schwingung offen, schliesst ihn dann und lässt ihn für die gleiche Zeitdauer geschlossen, zuletzt öffnet man ihn wieder und lässt ihn offen bleiben.

Soll auch die Gleichgewichtslage des Magnets bei umgekehrter Stromrichtung unmittelbar nach der bei directer registrirt werden, so öffnet man den Stromkreis, während der Magnet sich in der der directen Stromrichtung entsprechenden Gleichgewichtslage befindet, lässt ihn für die ganze Dauer einer einfachen Schwingung offen und schliesst hierauf den Stromkreis in der umgekehrten Richtung. Der Magnet gelangt dann ohne Geschwindigkeit gerade zu der Zeit in seine der umgekehrten Stromrichtung entsprechende Gleichgewichtslage, wenn der Strom in umgekehrter Richtung einsetzt, und bleibt daselbst.

Bestimmung der Ablenkung, die der Magnet durch einen Strom erfährt.

745. Bestimmung aus der ersten Schwingung. Hat man keine Zeit, mehr als eine Beobachtung anzustellen, so kann man die Ablenkung, die der Magnet durch einen bestimmten Strom erfährt, also auch die Stärke dieses Stromes, aus der ersten Schwingung des Magnets ableiten. Dabei ist zu berücksichtigen, ob der Magnet sich ohne Dämpfung oder mit solcher bewegt.

Im ersteren Falle ist die permanente Ablenkung φ, die der betreffende Strom dem Magnete erteilt, einfach halb so gross, wie seine erste Elongation von der ursprünglichen Gleichgewichtslage.

Im zweiten ist sie so gross, dass das Verhältnis einer Schwingungsamplitude zu der nächsten gleich ρ wird. Bezeichnet also ϑ_0 die der ursprünglichen Gleichgewichtslage und ϑ_1 die der extremen Elongation des Magnets bei der ersten Schwingung entsprechende Scalenablesung, so ist, Art. 735, die permanente Ablenkung, d. h. die Gleichgewichtslage der Schwingungen, die der Magnet, während der Strom fliesst, vollführt,

$$\varphi = \frac{\vartheta_0 + \rho\,\vartheta_1}{1+\rho} = \frac{\vartheta_0 + e^{\lambda}\vartheta_1}{1+e^{\lambda}}. \tag{1}$$

Man kann nach dieser Formel die permanente Ablenkung, auch ohne auf die Beruhigung der Schwingungen warten zu müssen, aus der ersten Elongation und dem logarithmischen Decrement berechnen.

746. Bestimmung aus einer Reihe von Beobachtungen. Hat man genügende Zeit zur Ausführung einer Reihe von Beobachtungen, so verfährt man am besten so:

Man lässt den Strom in positiver Richtung durch das Galvanometer fliessen und beobachtet drei auf einander folgende Elongationen in der Reihenfolge positiv, negativ, positiv. Bei der letzten Elongation unterbricht man den Strom und überlässt den Magnet etwa während der Dauer einer einfachen Schwingung sich selbst, er schwingt dann nach der negativen Seite hinüber. Gerade wenn er die negative Elongation erreicht hat, schliesst man den Strom, lässt ihn aber jetzt entgegengesetzt wie früher nach der negativen Richtung laufen. Der Magnet vibrirt dann um seine neue negative Gleichgewichtslage. Man beobachtet nun wieder drei auf einander folgende Elongationen. Dann unterbricht man den Strom während der Dauer einer einfachen Schwingung, lässt den Magnet nach der positiven Seite zurückgehen und schliesst den Strom, den man wieder nach der positiven Richtung schickt, wenn der Magnet gerade seine frühere positive Gleichgewichtslage erreicht hat, und beobachtet die auf einander folgenden Elongationen. So fährt man fort, bis man die genügende Anzahl von Beobachtungen erreicht zu haben glaubt.

Das Arbeiten mit abwechselnd gerichteten Strömen ist deshalb zu empfehlen, weil dadurch etwaige Aenderungen, die die Richtung des Erdmagnetismus im Laufe der Versuche erfährt, aus den Resultaten eliminirt werden. Ferner kann der Beobachter, indem er die Zeitintervalle für das Offen- und Geschlossenhalten des Stromes sorgfältig abwägt, die Ausdehnung der Vibrationen regeln; er vermag sie genügend klein zu machen und doch die einzelnen Schwingungen genügend markirt zu halten.

Die nachstehende Figur 59 giebt eine graphische Darstellung von der

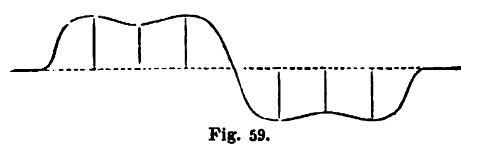


Fig. 59.

Bewegung des Magnets. Die Abscissen bezeichnen die Zeitmomente, die Ordinaten die diesen entsprechenden Ablenkungen des Magnets.

Die permanente Ablenkung φ, die der Magnet durch den Strom erfährt, ist aber, wenn $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_6$ die in der angegebenen Weise beobachteten Elongationen angeben, zum Beispiel für sechs Elongationsbeobachtungen nach Art. 737, 2_1):

$$2)\qquad \varphi = \frac{1}{8}(\vartheta_1 + 2\vartheta_2 + \vartheta_3 - \vartheta_4 - 2\vartheta_5 - \vartheta_6).$$

747. Multiplicationsmethode. Es kommt vor, dass die Ablenkung, die der Magnet des Galvanometers durch einen Strom erfährt, zu gering für eine genaue Bestimmung derselben ist. Man verschafft sich dann ausgiebigere Bewegungen dadurch, dass man in geeigneten Intervallen den Strom alternirend nach der einen und nach der andern Richtung fliessen lässt.

Man bestimmt zuerst die Dauer T einer einfachen Schwingung des Magnets, schickt dann den Strom die Zeitdauer T hindurch in positiver, hierauf dieselbe Zeitdauer T hindurch in negativer, dann wieder in positiver Richtung u. s. f. durch das Galvanometer. Man sieht, dass so die Bewegung des Magnets immer mehr verstärkt wird. Seine Ausschläge werden immer grösser; sind sie schon so gross geworden, dass die Elongationen deutlich markirt werden können, so bewirkt man die Umkehrungen des Stromes bequemer in den Zeitmomenten, wo der Magnet seine grössten Elongationen erreicht. Wie man dann die dem Strome entsprechende Ablenkung φ zu berechnen hat, lehrt die folgende Ueberlegung.

Beim Beginne der Beobachtungen befinde sich der Magnet, durch den positiven Strom getrieben, in der positiven Elongation ϑ_0. Wir kehren gerade zu dieser Zeit den Strom um. Die Gleichgewichtslage ist dann $-\varphi$, und wenn der Magnet noch darüber hinaus bis zur negativen Elongation ϑ_1 schwingt, haben wir nach der Definition von ρ

$$-\rho(\varphi + \vartheta_1) = \vartheta_0 + \varphi,$$

also

$$-\rho\,\vartheta_1 = \vartheta_0 + (\rho + 1)\,\varphi.$$

Gerade zu der Zeit, wo der Magnet unter dem Einfluss des negativen Stromes seine negative Elongation ϑ_1 erreicht hat, kehren wir den Strom wieder um. Die Gleichgewichtslage wird jetzt $+\varphi$, mithin die positive Elongation bestimmt durch

$$\rho\,\vartheta_2 = -\vartheta_1 + (\rho + 1)\,\varphi,$$

oder

$$\rho^2\,\vartheta_2 = \vartheta_0 + (\rho + 1)\,(1 + \rho)\,\varphi.$$

So kann man alle folgenden Elongationen berechnen. Ist der Strom in der fixirten Reihenfolge n mal umgekehrt worden, so hat man

$$(-1)^n\,\rho^n\,\vartheta_n = \vartheta_0 + (\rho + 1)(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1})\,\varphi$$

oder

$$(-1)^n\,\vartheta_n = \rho^{-n}\,\vartheta_0 + \frac{\rho + 1}{\rho - 1}\,(1 - \rho^{-n})\,\varphi.$$

Durch Umkehrung ergiebt sich also

$$\varphi = \left((-1)^n\,\vartheta_n - \rho^{-n}\,\vartheta_0\right)\frac{\rho - 1}{\rho + 1}\,\frac{1}{1 - \rho^{-n}}. \tag{3}$$

Für eine Beobachtungsreihe, die eine grosse Anzahl von Stromumkehrungen in sich begreift, wird n sehr gross, ρ^{-n} also klein, und

$$\varphi = (-1)^n\,\vartheta_n\,\frac{\rho - 1}{\rho + 1}. \tag{3$_1$}$$

Offenbar verlangt diese Methode, wenn sie exacte Resultate liefern soll, eine genaue Kenntnis der Grösse ρ, des Verhältnisses einer Schwingungsweite des Magnets zu der nächstfolgenden, deshalb überwiegt auch der Nachteil, dass die Ausschlagweiten im allgemeinen zu unregelmässig ausfallen, den Vorteil, den die Vergrösserung der Bewegung mit sich bringt, beträchtlich. Daher wird die Anwendung dieser Methode nur da von bedeutendem Nutzen sein, wo es sich um Constatirung der Existenz eines sehr schwachen Stromes handelt, denn diese Methode lehrt, wie man von einem schwachen Strome hervorgebrachte, an sich wenig ausgiebige Bewegungen durch geeignete Umkehrungen des Stromes zu einer deutlich verfolgbaren zu verstärken vermag.*)

Messung kurz andauernder Ströme.

748. Theorie. Wenn ein Strom nur während eines geringen Bruchteils der Schwingungsdauer des Magnets durch die Rolle des Galvanometers fliesst, so misst man die ganze Electricitätsmenge, die er mit sich geführt

*) Zu diesem und den folgenden Artikeln sei der Leser auf die Abhandlung von Dorn *Zur Multiplications- und Zurückwerfungsmethode*, Wied. Ann. Bd. 17, 1882, wo er auch die Literaturangaben findet, verwiesen.

hat, durch die Winkelgeschwindigkeit, die er dem Magnete während der kurzen Dauer seiner Einwirkung auf denselben erteilt hat. Diese Winkelgeschwindigkeit ist aber durch die Elongation, die der Magnet in seiner ersten Schwingung erreicht, bestimmbar.

Ich werde zunächst die Gesetze, denen zufolge die erste Schwingung vor sich geht, entwickeln. Der Einfachheit wegen soll von den die Schwingungen des Magnets dämpfenden Kräften abgesehen werden.

Es sei M das magnetische Moment und A das Trägheitsmoment des Magnets und der mit ihm schwingenden Teile des Apparates. Dann ist die Winkelbewegung, die der Magnet unter dem Einflusse des ihn treibenden Stromes γ ausführt, bestimmt durch die Gleichung

$$A\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + MH\sin\vartheta = MG\gamma\cos\vartheta$$

oder nach einmaliger Integration

$$A\frac{d\vartheta}{dt} + MH\int\sin\vartheta\, dt = MG\int\gamma\cos\vartheta\, dt + \text{Const.}$$

Da in unserm Falle der Strom nur sehr kurze Zeit andauern sollte, so wird, namentlich wenn der Magnet nicht zu klein gewählt wird, ϑ während der Dauer des Stromes seinen Wert ϑ_0 so gut wie gar nicht ändern, wir haben daher während der Einwirkung des Stromes

$$A\frac{d\vartheta}{dt} = MG\cos\vartheta_0\int\gamma\, dt + C$$

oder, weil

$$\int\gamma\, dt = Q$$

die ganze von dem Strome mit sich geführte Electricitätsmenge angiebt,

$$A\frac{d\vartheta}{dt} = MGQ\cos\vartheta_0 + C.$$

Der Durchgang der Electricitätsmenge Q durch die Rolle erteilt also dem Magnete ein angulares Moment $MGQ\cos\vartheta_0$, wo ϑ_0 den Wert, den ϑ zur Zeit des Durchganges des Stromes hat, bezeichnet. Befand sich der Magnet als der Strom zu fliessen anfing, in seiner Gleichgewichtslage, so ist $\vartheta_0 = 0$, $C = 0$ und

$$A\frac{d\vartheta}{dt} = MGQ. \tag{1}$$

Diese Gleichung rechtfertigt die an die Spitze dieses Artikels gestellte Behauptung, dass nämlich die Electricitätsmenge, die ein sehr rasch verlaufender Strom durch das Galvanometer entladet, durch die Winkelgeschwindigkeit, die der Magnet dadurch gleich zu Anfang erhält, gemessen wird.

Methode der ersten Schwingung. Nachdem die Electricität vorübergeflossen, schwingt der Magnet dem Gesetze

$$A \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + MH \sin\vartheta = 0$$

entsprechend, frei weiter.

Die Arbeit, die während der Aenderung des Winkels ϑ und $d\vartheta$ verbraucht wird, ist daher

$$-A \frac{d^2\vartheta}{dt^2} d\vartheta = + MH \sin\vartheta \, d\vartheta.$$

Die Energie die der Magnet, wenn er seine erste Elongation ϑ_1 erreicht, im Kampfe mit der erdmagnetischen Horizontalkraft eingebüsst hat, wird also $MH(1 - \cos\vartheta_1)$, und da diese Energie gleich der sein muss, die der Strom dem Magnete mitgeteilt hat, so ergiebt sich

$$\frac{1}{2} A \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = MH(1 - \cos\vartheta_1)$$

oder

2a) $$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{2 \frac{MH}{A} (1 - \cos\vartheta_1)}$$

und nach einfacher Transformation

2b) $$\frac{d\vartheta}{dt} = 2 \sqrt{\frac{MH}{A}} \sin\frac{\vartheta_1}{2}.$$

Benutzt man noch die Gleichung 1), so wird hiernach

1a) $$Q = 2 \frac{A}{MG} \sqrt{\frac{MH}{A}} \sin\frac{\vartheta_1}{2},$$

oder da die auf unendlich kleine Bogen reducirte Dauer einer einfachen Schwingung des Magnets unter dem Einfluss der erdmagnetischen Horizontalintensität

a) $$T = \pi \sqrt{\frac{A}{MH}}$$

ist,

1b) $$Q = 2 \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} \sin\frac{\vartheta_1}{2}.$$

Um es zu wiederholen, ist

- Q die vom kurz andauernden Strome durch das Galvanometer entladene Electricitätsmenge,
- H die erdmagnetische Horizontalintensität,
- G der Coefficient des Galvanometers,
- T die auf unendlich kleine Bogen reducirte Dauer einer einfachen Schwingung,
- ϑ_1 die erste Elongation des Magnets.

749. Correction für Dämpfung bei geringen Ausschlägen. Bei wirklich durchzuführenden Experimenten kommt es oft vor, dass der erste Ausschlag ϑ_1 verhältnismässig gering ausfällt. Da man dann die Bewegung eines Pols des Magnets als geradlinig betrachten darf, so kann man in diesem Falle auch die Dämpfung mit berücksichtigen.

Ursprünglich soll sich der Magnet in seiner Gleichgewichtslage befinden, dann soll er durch die momentane Entladung der Electricitätsmenge Q plötzlich die Winkelgeschwindigkeit v erhalten, hierauf bei der ersten kurzen Schwingung die Elongation ϑ_1 erreichen.

Nach Art. 733 können wir schreiben

3′) $$\vartheta = C \sin \omega t \, e^{-\omega t \cot \alpha},$$

also

2) $$\frac{d\vartheta}{dt} = C\omega \operatorname{cosec} \alpha \sin(\alpha - \omega t) \, e^{-\omega t \cot \alpha}.$$

Die Geschwindigkeit verschwindet zum ersten mal, wenn

$$\alpha - \omega t = 0$$

ist. Da dann $\vartheta = \vartheta_1$ wird, so haben wir

3a) $$\vartheta_1 = C \sin \alpha \, e^{-\alpha \cot \alpha}.$$

Ferner ist zur Zeit $t = 0$, wenn der Magnet durch die Entladung plötzlich die Winkelgeschwindigkeit v erhält,

2_1) $$v = C\omega \operatorname{cosec} \alpha \sin \alpha = C\omega,$$

mithin

3b) $$\vartheta_1 = \frac{v}{\omega} \sin \alpha \, e^{-\alpha \cot \alpha}.$$

Nun ist aber, da der Magnet seine Oscillationen unter dem Einfluss der erdmagnetischen Horizontalintensität ausführt, nach Artt. 731 und 741

b) $$\omega^2 = \frac{MH}{A} \sin^2 \alpha,$$

nach Art. 735, 3)

c) $$\cot \alpha = \frac{\lambda}{\pi}$$

und nach Art. 748, 1)

1) $$v = \frac{MG}{A} Q,$$

wir erhalten also

3c) $$\vartheta_1 = \frac{MG}{A} Q \sqrt{\frac{A}{MH}} \, e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{\lambda}{\pi}}.$$

$\pi\sqrt{A/MH} = T$ ist die auf nicht gedämpfte Schwingungen bezogene Dauer einer einfachen Schwingung. Bezeichnet T_1 die aus der Beobachtung sich unmittelbar ergebende Dauer der ersten gedämpften Schwingung, so folgt nach der Schlussgleichung des Art. 740

$$T = T_1 \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}},$$

also wird auch

3d) $$\vartheta_1 = \frac{QG}{H} \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{T_1} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{\lambda}{\pi}},$$

und

1) $$Q = \frac{H}{G} \frac{T_1}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \vartheta_1 e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arccot} \frac{\lambda}{\pi}}.$$

Die Gleichung 3d) bestimmt die erste Elongation durch die entladene Electricitätsmenge, die Gleichung 1) umgekehrt die entladene Electricitätsmenge durch die erste Elongation.

Ist das logarithmische Decrement verhältnismässig klein, so darf man sich der approximativen Formel

1_1) $$Q = \frac{H}{G} \frac{T_1}{\pi} \vartheta_1 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)$$

bedienen.

750. Zurückwerfungsmethode. Nach der eben auseinandergesetzten Methode der ersten Schwingung lassen sich die Messungen nur dann mit genügender Genauigkeit ausführen, wenn der Magnet im Augenblicke, wo er von dem vorübergehenden Stromstosse getroffen wird, sich in seiner Gleichgewichtslage und in Ruhe befindet. Will man einen Versuch wiederholen, so muss man warten, bis der Magnet sich wieder völlig beruhigt hat. Daher wird man in den Fällen, wo man eine bestimmte Stromentladung beliebig oft und in beliebigen Zeitintervallen zu wiederholen vermag, wenn man eine längere Reihe von Beobachtungen anstellen will, am besten von der folgenden von Weber beschriebenen *Zurückwerfungsmethode* Gebrauch machen.

Sei eine (nicht zu messende) durch das Galvanometer entladene Electricitätsmenge gleich Q_0. Der Magnet wird durch dieselbe aus seiner Ruhelage plötzlich herausgeworfen, verlässt dieselbe mit der Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = \frac{MG}{A} Q_0,$$

erreicht seine grösste Elongation

a$_1$) $$a_1 = \vartheta_1 = KQ_0, \quad K = \frac{G}{H}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{T_1}\, e^{-\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{\lambda}{\pi}},$$

schwingt nach seiner Gleichgewichtslage zurück, geht durch dieselbe mit der Geschwindigkeit

$$v_1 = -v_0 e^{-\lambda},$$

erreicht die erste negative Elongation

a$_2$) $$\vartheta_2 = -\vartheta_1 e^{-\lambda} = b_1$$

und kehrt in die Gleichgewichtslage zurück.

Liesse man ihn ungestört durch dieselbe hindurchgehen, so würde er sie mit der Geschwindigkeit

$$v_2 = v_0 e^{-2\lambda}$$

passiren. In dem Augenblick aber, wo er sich gerade in ihr befindet, lässt man plötzlich durch das Galvanometer die zu bestimmende Electricitätsmenge Q nach der entgegengesetzten Richtung wie Q_0 sich entladen. Dadurch geht v_2 über in $v_2 - v$, also in

$$v_2' = -\frac{MG}{A}(Q - Q_0 e^{-2\lambda}).$$

Ist nun Q dem absoluten Betrage nach grösser als $Q_0 e^{-2\lambda}$, so wird v_2' negativ werden, der Magnet wird also durch diesen Stromstoss zurückgetrieben, er bewegt sich zurück in negativer Richtung, wie wenn er von dem Entladungsstrom $-(Q - Q_0 e^{-2\lambda})$ getroffen wäre, und erreicht die erste negative Elongation

a$_3$) $$\vartheta_3 = -K(Q - Q_0 e^{-2\lambda}) = c_1 = -KQ + a_1 e^{-2\lambda}.$$

Dann schwingt er zu seiner Gleichgewichtslage zurück, passirt dieselbe mit der Geschwindigkeit

$$v_3' = -v' e^{-\lambda},$$

erreicht seine positive Elongation

a$_4$) $$\vartheta_4 = -\vartheta_3 e^{-\lambda} = d_1 = e^{-\lambda}(KQ - a_1 e^{-2\lambda})$$

und kehrt zu seiner Gleichgewichtslage zurück. Während er dieselbe mit der Geschwindigkeit

$$v_4' = v_2' e^{-2\lambda}$$

passiren will, wird er, diesmal von einem positiven Strome, der die Electricitätsmenge Q entladet, getroffen, und mit der Anfangsgeschwindigkeit

$$v_4'' = v_4' + \frac{MG}{A}Q = \frac{MG}{A}(Q - e^{-2\lambda}(Q - Q_0 e^{-4\lambda}))$$

zurückgeworfen. Die positive Elongation, die er dann erreicht, ist

$$\mathfrak{a}_5) \qquad \vartheta_5 = KQ - c_1 e^{-2\lambda} = KQ(1 - e^{-2\lambda}) + a_1 e^{-2\lambda} = a_2.$$

Die Beobachtung von vier Elongationen a, b, c, d betrachte ich als einem Satze von Beobachtungen angehörend. Die ganze Beobachtungsreihe ist also nach folgendem Schema auszuführen:

+ Strom, + Elongation, — Elongation, — Strom
+ Strom, + Elongation, — Elongation,
+ Elongation, — Elongation, — Strom

u. s. f.
wobei noch zu bemerken ist, dass der Strom stets in dem Moment, wo der Magnet die Gleichgewichtslage passirt, durch das Galvanometer entladen wird.

Die Nadel schwingt dann zuletzt periodisch in der Art, wie es die beistehende Figur 60 versinnbildlicht, in der die Abscissen die Zeiten, die Ordinaten die Orte des Magnets gegen seine Ruhelage zu den betreffenden Zeiten repräsentiren.

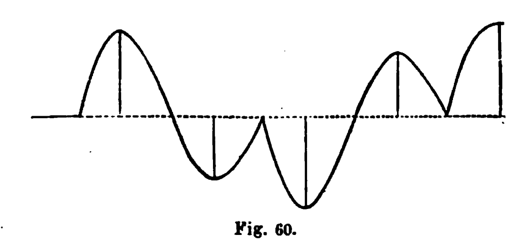


Fig. 60.

Die Herbeiführung dieses gleichförmigen Zustandes wird beschleunigt, wenn der erste Stromstoss schwächer als die folgenden gewählt wird. Das ist der Grund, weshalb die Electricitätsmenge des ersten Stromes nicht mit Q, sondern mit Q_0 bezeichnet ist.

Ein Satz von vier Elongationsbeobachtungen giebt die folgenden Relationen

$$a = KQ_0,\ b = -KQ_0 e^{-\lambda},\ c = -KQ + KQ_0 e^{-2\lambda},\ d = KQ e^{-\lambda} - KQ_0 e^{-3\lambda},$$

aus denen die Gleichungen

$$1_1) \qquad e^{-\lambda} = \frac{d-b}{a-c},$$

$$2_1) \qquad KQ = \frac{(a-b)e^{-2\lambda} + d - c}{1 + e^{-\lambda}}$$

resultiren.

Sind n Sätze von je vier Elongationsbeobachtungen angestellt, so hat man

$$1)\qquad e^{-\lambda}=\frac{\Sigma(d)-\Sigma(b)}{\Sigma(a)-\Sigma(c)},$$

$$2)\qquad KQ=\frac{1}{2n-1}\,\frac{1}{1+e^{-\lambda}}\left\{\sum_n\left[(a-b-c+d)(1+e^{-2\lambda})\right]-(a_1-b_1)\right.$$
$$\left.-(d_n-c_n)e^{-2\lambda}\right\}.$$

Die erste Gleichung dient zur Berechnung des logarithmischen Decrements, die zweite zu der der zu messenden Electricitätsmenge Q.

751. Multiplicationsmethode. Bei der Zurückwerfungsmethode haben wir die Entladung des Stromes immer so gerichtet, dass die Bewegung des Magnets gehemmt und in die entgegengesetzte verwandelt wurde. Bei der Multiplicationsmethode dagegen sorgt man dafür, dass sie verstärkt wird. Man richtet also die einzelnen Stromstösse so ein, dass die Geschwindigkeit des Magnets beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage immer mehr anwächst.

Jedesmal, wenn der Magnet seine Gleichgewichtslage passirt, lässt man den Strom sich entladen. Die Richtung der Entladung ist von gleichem Zeichen mit der der Bewegung des Magnets, die Entladung wird also alternirend nach der einen und nach der andern Seite vor sich gehen. Für die successiven Elongationen haben wir aber

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= \vartheta_1,\\ \vartheta_2 &= -KQ-e^{-\lambda}\vartheta_1,\\ \vartheta_3 &= -KQ-e^{-\lambda}\vartheta_2,\\ &-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\\ \vartheta_n &= -KQ-e^{-\lambda}\vartheta_{n-1}.\end{aligned}$$

Je weiter man die Operation ausdehnt, desto weniger ändern sich die Elongationen durch die neu hinzukommenden Stromstösse, ist n gross genug, so wird schliesslich $\vartheta_n=-\vartheta_{n-1}$ werden. Bezeichnet also ϑ die schliesslich erreichte halbe Ausschlagweite des Magnets (man erkennt sie daran, dass sie sich bei weiterer Fortsetzung der Operationen nicht mehr merklich ändert), so hat man

$$\vartheta=\pm\frac{1}{1-e^{-\lambda}}KQ,$$

eine Gleichung, aus der Q sich berechnen lässt. Je kleiner λ, das heisst je geringer die Dämpfung, die die Bewegungen des Magnets erfahren, ist, desto grösser kann die schliessliche Elongation ϑ werden, da aber dann einer-

seits die Operation sehr lange fortgesetzt werden muss, und andererseits der Wert von λ, weil ein geringer Irrtum in der Bestimmung desselben die Berechnung von Q sehr stark verfälschen kann, sorgfältig durch vorangehende Experimente eruirt werden muss, so wird diese Methode auch für wirkliche Messungen von Entladungsströmen nur selten sich als vorteilhaft erweisen. Man wird sie nur da, wo es sich um einen nicht anzuzweifelnden Nachweis der Existenz eines Stromes, der wegen seiner Schwäche direct nicht beobachtet zu werden vermag, handelt, anzuwenden haben.

Wie man aber auch kurz andauernde Ströme auf Magnete wirken lassen mag, man muss stets dafür sorgen, dass der Strom seine gesammte Electricitätsmenge schon entladen hat, ehe der Magnet sich noch merklich aus seiner Ruhelage entfernt, wenigstens darf die Strecke, die der Magnet während der Entladung von seinem Wege zurücklegt, ein nur geringer Bruchteil seiner ganzen Elongation sein. Daher muss man den Magnet so einrichten, dass seine Schwingungsdauer gegen die Entladungsdauer der zu messenden Ströme gross ausfällt. Ausserdem muss der Beobachter sorgsam der Bewegung des Magnets folgen, damit er immer dann, wenn der Magnet gerade seine Gleichgewichtslage passirt, den Strom zu appliciren vermag. Einen Ueberblick über den Fehler, den der Beobachter durch das Verpassen des richtigen Augenblicks begeht, gewinnt man durch die Bemerkung, dass die Wirkung einer Kraft, wenn sie die Elongation zu vermehren strebt, nach Art. 749 wie

$$e^{-\varphi \operatorname{arccot} \alpha} \sin(\alpha - \varphi)$$

variirt. Sie variirt also am stärksten, wenn $\varphi = 0$ ist, und deshalb wird jede unrechtzeitige Schliessung des Stromes — gleichgiltig, ob man ihn zu früh oder zu spät schliesst — seine entladene Electricitätsmenge geringer als sie in der Tat ist, erscheinen lassen. Der Betrag der Unterschätzung ergiebt sich aus dem Verhältnis des Cosinus der Phase, in der die Bewegung des Magnets zur Zeit, als der Strom entladen wurde, stand, zu Eins.

Cap. XVII.

Vergleichung von Rollen.

Experimentelle Bestimmung der electrischen Constanten einer Rolle.

752. Die Auseinandersetzungen des Art. 717 haben uns gelehrt, dass man bei einem Galvanometer, bei dem man auf grosse Empfindlichkeit zu sehen hat, die Rollen von geringer innerer Weite und von einer beträchtlichen Anzahl von Drahtwindungen wählen muss. Zur directen Bestimmung der electrischen Constanten dieser Rollen müsste man bei jeder Windung Form und Dimensionen kennen. Die innern Windungen sind aber von den äussern überdeckt und dadurch unzugänglich, allein selbst wenn man sie vor der weitern Aufwindung des Drahtes genau ausmessen könnte, so würde man doch immer noch den Zweifel, ob sie nicht durch den Druck der aufgelagerten andern Windungen in ihrer Form alterirt werden, nicht zu beseitigen vermögen.

Daher tut man besser, die electrischen Constanten solcher Rollen durch Vergleichung mit einer Normal- oder Standardrolle, deren Constanten schon bekannt sind, zu bestimmen.

Da die Dimensionen der Standardrolle durch directe Ausmessung ermirt werden müssen, so hat man sie — damit eventuelle Unsicherheiten in der Dicke ihres Drahtes oder den Circumferenzen ihrer Windungen von möglichst geringem Belang sind — ziemlich gross zu wählen. Den Canal, innerhalb dessen die Windungen liegen, macht man von rechteckigem Querschnitt und giebt ihm eine im Verhältnis zur Weite der Windungen geringe Tiefe und Breite. Das letztere ist nicht so sehr wegen der Correction, die man für den Querschnitt anzubringen hat, als wegen der Ungewissheit, in der man sich sonst hinsichtlich der Lage der von den obern Windungen überdeckten andern Windungen befindet, geboten.*)

---

*) Bei grossen Tangentenboussolen substituirt man manchmal die Rolle durch einen einzigen Kreis aus dickem Draht, der schon infolge seiner Steifheit seine Form auch ohne Unterlage zu bewahren vermag. Doch ist das für Standardinstrumente nicht zu empfehlen. Die Stromverteilung in einem Leiter hängt nämlich von der relativen Leitungsfähigkeit seiner einzelnen Teile ab. Irgend eine in der Substanz

Es sind nun die folgenden Constanten zu bestimmen.

1) Die in Art. 700 mit G_1 bezeichnete Constante, das heisst die Kraftwirkung, die die Rolle, wenn sie von einem Einheitsstrom durchflossen wird, in ihrem Mittelpunkte auf einen Einheitspol ausübt.

2) Die mit g_1 bezeichnete Constante, das heisst das magnetische Moment der Rolle, wenn sie von einem Einheitsstrom durchflossen wird.

Bestimmung der Constante G_1.

753. Da die Rollen der Arbeits-Normalgalvanometer bedeutend kleiner als die Standardrolle sein werden, so stellt man das zu bestimmende Galvanometer in das Innere der Standardrolle, lässt seinen Mittelpunkt mit dem dieser Rolle zusammenfallen und richtet seine Rolle ebenso wie die Standardrolle so, dass ihre bezüglichen Ebenen vertical und dem magnetischen Meridiane parallel verlaufen. Das Galvanometer mit der Standardrolle zusammen kann als Differential-Galvanometer angesehen werden, bei dem für die eine Rolle die Constante, G_1, bekannt ist, während die der andern, G_1', noch zu bestimmen ist.

Der Magnet des Galvanometers unterliegt den Einwirkungen beider Rollen. Fliesst also durch die Galvanometerrolle ein Strom von der Stärke γ' und durch die Standardrolle ein entgegengerichteter von der Stärke γ, so ist die Ablenkung δ, die der Magnet durch beide Ströme erleidet, bestimmt durch

$$H \operatorname{tg} \delta = G_1' \gamma' - G_1 \gamma.$$

Man justirt nun die Stromstärken so, dass der Magnet aus dem Meridian nicht heraustritt, und hat dann

$$G_1' = \frac{\gamma}{\gamma'} G_1.$$

Das Verhältnis γ/γ' der beiden Ströme zu einander kann in verschiedener Weise eruirt werden.

Da die Constante G_1' der Galvanometerrolle im allgemeinen grösser als die G_1 der Standardrolle sein wird, so kann man so verfahren: Man lässt den Strom einer Batterie mit ganzer Stärke γ erst durch die Standardrolle fliessen, verzweigt ihn dann so, dass er mit der Stärke γ' durch die

---

des Ringes befindliche schadhafte Stelle wird also den Strom entweder nach oben oder nach unten drängen, und dadurch wird der wirkliche Weg, den der Strom im Ringe einschlägt, unsicher. Da ferner, weil der Strom den Ring nur einmal umfliesst, die Wirkung des Ringes auf den Magnet von derselben Grössenordnung wie die der Stromzuleitungen und Electroden ist, so wird man die Zu- und Ableitungsstücke der Boussole sehr sorgfältig so arrangiren müssen, dass ihre Wirkungen sich gegenseitig vernichten. Gerade diesen Teil der störenden Einwirkungen auf den Magnet scheint man bei der Construction vieler Boussolen ganz übersehen zu haben. Um ihn zu eliminiren, stellt man die Zuleitung in der Nähe der Boussole aus einer Röhre, die Ableitung aus einem innerhalb dieser Röhre liegenden mit ihm coaxialen Draht her.

Galvanometerrolle und eine Reihe von Widerstandsrollen, deren Gesammtwiderstand zusammen mit dem der Galvanometerrolle R_1 ist, und mit der Stärke $\gamma - \gamma'$ durch andere Widerstandsrollen vom Gesammtwiderstande R_2 fliesst.

Nach Art. 276 ist dann

$$\gamma' R_1 = (\gamma - \gamma') R_2,$$

also wird

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

und

$$G_1' = \frac{R_1 + R_2}{R_2} G_1,$$

woraus die Constante G_1' in Teilen der Constante G_1 zu berechnen ist.

Herrscht hinsichtlich des Widerstandes der Galvanometerrolle nicht die genügende Sicherheit (weil vielleicht ihre Temperatur nicht zu bestimmen ist), so hat man die Widerstandsrollen, die mit dem Galvanometer zusammen einen Stromzweig gebildet haben, von so grossem Widerstande zu wählen, dass der Widerstand des Galvanometers dagegen wenig in Betracht kommt.

Bestimmung der Constante g_1.

754. Zur Bestimmung der Constante g_1 lässt man durch beide Rollen einen und denselben Strom, aber durch die eine entgegengesetzt wie durch die andere fliessen, hebt die Galvanometerrolle von ihrem Stativ ab, ohne dabei die Lage der Magnetnadel und die ihrer Axe zu alteriren, und verschiebt sie in Richtung ihrer mit der Axe der Standardrolle zusammenfallenden Axe so lange, bis der Magnet sich wieder in den magnetischen Meridian zurückbegeben hat.

Bezeichnet man mit r die Entfernung, in der sich jetzt die Mittelpunkte der beiden Rollen von einander befinden, so ist r auch die Entfernung des Mittelpunktes der Galvanometerrolle von der Mitte des Magnets, wir haben daher, weil jede Rolle wie ein Magnet wirkt, nach Art. 453

$$G_1 = 2\frac{g_1}{r^3} + 3\frac{g_2}{r^4} + 4\frac{g_3}{r^5} + \ldots.$$

Indem man dasselbe Experiment unter Verschiebung der Galvanometerrolle nach der entgegengesetzten Seite wiederholt, hat man unter r nunmehr die halbe Entfernung der beiden Lagen, in die man diese Rolle nach einander bringt, zu verstehen und neben der obern Gleichung noch die

$$G_1 = 2\frac{g_1}{r^3} - 3\frac{g_2}{r^4} + 4\frac{g_3}{r^5} - \ldots$$

aufzustellen. Der Vorteil, den die charakterisirte Wiederholung des Experiments bietet, besteht also darin, dass einerseits die Bestimmung der Grösse r von der Unsicherheit der Lage des Mittelpunktes des Magnetes befreit ist, und dass andererseits die g mit geraden Indices fortfallen. In erster Annäherung hat man dann

$$g_1 = \frac{1}{2} G_1 r^3.$$

Wenn die Standardrolle so eingerichtet ist, dass man eine Hälfte ihrer Windungen auszuschalten vermag, so wird man einen zweiten Doppelversuch mit ihrer Hälfte anstellen und zur Bestimmung von g_1 und g_3 die Gleichungen

$$2 G_1 = 4 \frac{g_1}{r^3} + 8 \frac{g_3}{r^5},$$

$$G_1 = 4 \frac{g_1}{r_1^3} + 8 \frac{g_3}{r_1^5}$$

haben.

Doch ist es oft möglich g_3 aus einer directen Ausmessung der Galvanometerrolle mit hinreichender Sicherheit zu bestimmen, so dass man g_1 aus der Gleichung

$$g_1 = \frac{1}{2} G_1 r^3 - 2 g_3 r^{-2}$$

zu berechnen vermag.

Aus den Dimensionen der Galvanometerrolle ergiebt sich aber, da der Mittelpunkt der Grundkugel in ihrer Mitte liegt, nach Art. 700

$$g_3 = -\frac{1}{8} \pi a^2 (6 a^2 + 3 \xi^2 - 2 \eta^2).$$

Vergleichung der Inductionscoefficienten.

755. Die Induction einer Rolle auf andere Rollen und auf sich selbst lässt sich nur in wenigen Fällen aus der Form und Lage der Strombahnen durch Rechnung ableiten, aber selbst in diesen wenigen Fällen hat eine directe Berechnung für die Praxis meist wenig Wert. Will man nämlich die Formeln numerisch auswerten, so muss man den Abstand der einander inducirenden Strombahnen genau messen, das ist aber nicht leicht mit genügender Präcision auszuführen. Nun würde zwar eine fehlerhafte Bestimmung dieses Abstandes bei Bahnen, die genügend weit von einander entfernt sind, das Resultat wenig beeinflussen, allein in diesem Falle ist auch die Induction der Bahnen auf einander gering. In der Praxis sucht man aber meistens zwei Kreise gerade so gegen einander zu stellen, dass ihre Induction auf einander sehr gross ausfällt, hier wird man sie also einander sehr nahe bringen, und dann ist natürlich auch ein kleiner in der

Distanzmessung gemachter Fehler verderblich. Da also die Methode der directen Ausmessung sich hier und da, wo die Rechnung sich überhaupt nicht weit genug führen lässt, nicht als vorteilhaft erweist, so sucht man die Induction zweier Strombahnen auf einander auf experimentellem Wege durch Vergleichung mit der zweier Strombahnen zu eruiren, die besonders dazu eingerichtet sind, dass man ihre Induction auf einander durch Ausmessung und Rechnung zu finden vermag.

Man kann dazu das folgende Verfahren einschlagen:

Es seien A und a die beiden Standardrollen, deren Induction auf einander in der gegebenen Entfernung völlig bekannt ist, B und b die beiden Rollen, deren Induction auf einander bestimmt werden soll. Man verbindet einerseits A und B und ein Galvanometer G und andererseits a und b und eine Batterie in der in der beistehenden Figur angegebenen Weise zu in sich geschlossenen Strombahnen. Sind dann P und Q die Electroden des Galvanometers, so bezeichne ich mit R den Widerstand des Zweiges PAQ, mit S den des Zweiges QBP und mit K den des Galvanometers, nenne $\dot{x}$ die Stärke des durch A, $\dot{y}$ die des durch B, $\dot{x} - \dot{y}$ die des durch das Galvanometer, γ die des durch die Batterie und die Kreise a und b fliessenden Stromes und lasse endlich L_1, L_2, N, Γ die Coefficienten der Selbstinduction der Rollen A, B, $a + b$ und des Galvanometers G; M, M' die Coefficienten der Induction der Rollen A, a bezüglich B, b auf einander bedeuten. Die kinetische Energie des ganzen Systems ist dann, wenn die Induction zwischen Galvanometer und Rollen vernachlässigt wird,

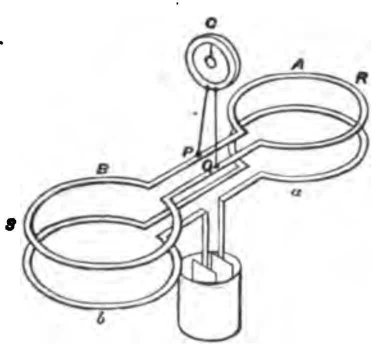


Fig. 61.

$$\text{a)} \quad T = \frac{1}{2} L_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \Gamma (\dot{x} - \dot{y})^2 + \frac{1}{2} N \gamma^2 + M \dot{x} \gamma + M' \dot{y} \gamma.$$

Da der Stromkreis A, B, G keine Batterie enthält und die ganze Strombahn A, B, G in die beiden Stromkreise $APGQA$, $BQGPB$ zerfällt, so haben wir nach Art. 581

$$\text{b)} \quad \begin{aligned} 0 &= \quad (\dot{x} - \dot{y}) K + \dot{x} R + \frac{d}{dt} [M \gamma + L_1 \dot{x} + \Gamma (\dot{x} - \dot{y})], \\ 0 &= - (\dot{x} - \dot{y}) K + \dot{y} S + \frac{d}{dt} [M' \gamma + L_2 \dot{y} - \Gamma (\dot{x} - \dot{y})], \end{aligned}$$

oder nach Ausführung der Integration nach t

$$\text{c)} \quad \begin{aligned} 0 &= \quad [(x - y) K + x R + M \gamma + L_1 \dot{x} + \Gamma (\dot{x} - \dot{y})]_0^\tau, \\ 0 &= - [(x - y) K - y S - M' \gamma - L_2 \dot{x} + \Gamma (\dot{x} - \dot{y})]_0^\tau. \end{aligned}$$

Nachdem der Strom der Batterie eine Zeit lang durch die Kreise a und b geflossen ist, unterbricht man ihn zur Zeit 0 plötzlich, dadurch wird in der Strombahn A, B, G ein Strom inducirt, der in sehr kurzer Zeit τ in A die Electricitätsmenge x, in B die y, im Galvanometer G die $x-y$ in Bewegung setzt. Im Augenblick 0, wo der Strom γ unterbrochen wird, hat man $\gamma=\gamma$, $x=y=\dot{x}=\dot{y}=0$, zur Zeit τ ist der Batteriestrom nicht mehr vorhanden und der Inductionsstrom verschwunden, also $\dot{x}=\dot{y}=0$, $\gamma=0$ geworden, daher wird

$$\text{d)}\qquad \begin{aligned} (x-y)K+xR-M\gamma&=0,\\ -(x-y)K+yS-M'\gamma&=0, \end{aligned}$$

oder

$$\text{1)}\qquad x-y=\gamma\frac{\frac{M'}{S}-\frac{M}{R}}{1+\frac{K}{R}+\frac{K}{S}}.$$

$x-y$ ist der durch das Galvanometer entladene inducirte Integralstrom, der nach einer der in den Artt. 749 bis 751 angegebenen Methoden gemessen werden könnte, justirt man aber durch Einschaltung von Widerstandsrollen die Widerstände R und S so lange, bis der im Kreise $APGQA$ inducirte Integralstrom dem im Kreise $BQGPB$ inducirten (natürlich ihm entgegengerichteten) gleich ist, so verschwindet $x-y$, und es wird

$$\text{2)}\qquad M'=\frac{S}{R}M.$$

Man kann dann nach Bestimmung des Verhältnisses, in dem die Widerstände der Kreise PAQ und PBQ sammt etwa zugehörigen Widerstandsrollen zu einander stehen, den Inductionscoefficienten M' zwischen den Rollen B und b in Einheiten desjenigen zwischen den Standardrollen A und a ausdrücken.

Vergleichung der Induction einer Rolle auf sich selbst mit der auf eine andere Rolle.

756. Man schaltet die Rolle L, deren Selbstinduction zu bestimmen ist, in den Zweig AF einer Wheatstoneschen Brücke. Ferner fügt man in den Schliessungsdraht ABZ, der die Batterie enthält, eine zweite Rolle M ein. Ich bezeichne mit L den Coefficienten der Induction der Rolle L auf sich selbst, mit M den der Induction dieser Rolle auf die Rolle M, nenne $\dot{x}$ die Stromstärke im Zweige AF, $\dot{y}$ die im Zweige AH (die Reihenfolge der Buchstaben setzt gleich die Richtung des Stromes in den bezüglichen

Zweigen fest). Die Stromstärke im Schliessungsdraht ZBA, der die Batterie enthält, ist dann gleich $\dot{x}+\dot{y}$.

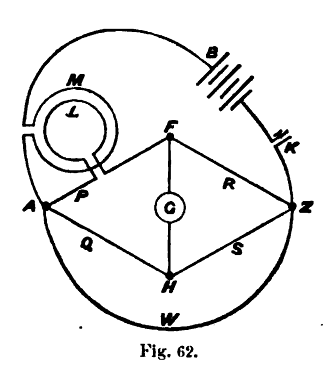


Fig. 62.

Nach Art. 581 wird hiernach die von A nach F wirkende äussere electromotorische Kraft

a) $$A-F=P\dot{x}+\frac{d}{dt}[L\dot{x}+M(\dot{x}+\dot{y})].$$

Ebenso ist die äussere von A nach H wirkende electromotorische Kraft

b) $$A-H=Q\dot{y}.$$

Zeigt nun das Galvanometer weder, wenn man die Batterie geschlossen hält, noch wenn man sie öffnet oder schliesst, irgend einen permanenten oder vorübergehenden Strom an, so wird, weil dann $H-F=0$ ist,

$1'_1$) $$P\dot{x}=Q\dot{y},$$

$1'_2$) $$L\frac{d\dot{x}}{dt}+M\left(\frac{d\dot{x}}{dt}+\frac{d\dot{y}}{dt}\right)=0,$$

also

1a) $$L=-\left(1+\frac{P}{Q}\right)M.$$

Da man M, die Induction der Rolle L auf die Rolle M, nach der im vorangehenden Artikel auseinandergesetzten Methode immer experimentell durch Standardrollen bestimmen kann, so lässt sich auf diesem Wege L immer eruiren.

Weil L eine positive Grösse ist, muss M negativ sein, das heisst man muss die Rollen so in den Kreis der Batterie einschalten, dass der Strom sie nach entgegengesetzten Richtungen durchzieht.

Bei der Ausführung einer solchen Vergleichung kann man damit beginnen, dass man die Widerstände P, Q, R, S der vier Zweige der Brücke so justirt, dass

2) $$PS=QR$$

wird, wodurch das Galvanometer gegen jeden permanenten Strom geschützt ist, und dann den Abstand der beiden Rollen von einander so lange justirt, bis beim Oeffnen oder Schliessen der Batterie das Galvanometer auch keinen Inductionsstrom mehr zur Anzeige bringt.

Vermag man aber die Entfernung zwischen den Rollen nicht zu justiren, so ändert man die Widerstände Q und S so lange ab, bis das Galvanometer auch bei unveränderter Lage der Rolle, wenn man den Strom öffnet und schliesst, von keinem Inductionsstrom getroffen wird. Da aber die Gleichung

$$PS = QR$$

trotzdem bestehen bleiben muss, so hat man darauf zu sehen, dass man Q und S so abändert, dass das Verhältnis dieser Grössen zu einander immer ein und dasselbe bleibt.

Die letzt angegebene Bedingung macht die zweite Methode ein wenig mühevoll, ich führe daher noch eine dritte Methode an.

Man richtet sich zunächst so ein, dass der durch Selbstinduction entstehende Strom den durch gegenseitige Induction auftretenden ein wenig übersteigt und gleicht dann diese beiden einander entgegengerichteten Ströme durch Einschaltung eines Widerstandes W zwischen A und Z aus. Die Bedingung $PS = QR$, dass ein permanenter Strom das Galvanometer nicht trifft, bleibt dadurch ungeändert fortbestehen, und man kann also allein durch geeignete Justirung des Widerstandes W die inducirten Ströme im Galvanometerdraht zum Verschwinden bringen. Ist das geschehen, so hat man

$$\text{1b)} \qquad L = -\left(1 + \frac{P}{Q} + \frac{P+R}{W}\right) M.$$

Vergleichung der Selbstinduction zweier Rollen.

757. Man schaltet die beiden Rollen, deren Selbstinductionen mit einander verglichen werden sollen, in zwei aneinanderstossende Zweige AF und FZ (Fig. 62) einer Wheatstoneschen Brücke ein und richtet die Widerstände der vier Zweige dieser so ein, dass das Galvanometer weder beim Oeffnen und Schliessen der Batterie, noch wenn dieselbe geschlossen ist, einen Strom anzeigt.

Sind L und N die Coefficienten der Selbstinduction der bezüglichen Rollen, so wird das Galvanometer in keinem Falle einen Strom anzeigen, wenn

$$\left(Px + L\frac{dx}{dt}\right)Sy = Qy\left(Rx + N\frac{dx}{dt}\right)$$

ist. Diese Gleichung zerfällt, da weder ein Strom, noch eine Stromschwankung im Galvanometer zur Erscheinung kommen soll, in die beiden

$$1) \qquad \frac{S}{Q} = \frac{R}{P},$$

$$2) \qquad \frac{L}{N} = \frac{P}{R}.$$

Die erste Gleichung ist die gewöhnliche für die Wheatstonesche Brücke geltende, die zweite zeigt, wie man den einen Coefficienten durch den andern auszudrücken vermag, wenn man die beiden Widerstandsverhältnisse S/Q und P/R so justirt hat, dass das Galvanometer weder beim Geschlossenhalten der Batterie, noch bei ihrem Oeffnen oder Schliessen einen Strom anzeigt.

Cap. XVIII.

Electromagnetische Widerstandseinheit.

Bestimmung des Widerstandes einer Rolle im electromagnetischen Maasssystem.

758. Der Widerstand eines Leiters ist als das Verhältnis des numerischen Betrages der electromotorischen Kraft zu der Stärke, die ein von ihr durch diesen getriebener Strom besitzt, definirt.

Die Stärke eines Stromes lässt sich nach den in den vorangehenden Capiteln auseinandergesetzten Methoden mit Hilfe eines Standard-Galvanometers, wenn man den Betrag der erdmagnetischen Horizontalintensität anzugeben vermag, in electromagnetischem Maasssystem jederzeit bestimmen. Dagegen ist die electromotorische Kraft schwer zu eruiren, direct berechnen lässt sie sich nur dann, wenn sie durch die Bewegung eines Leiters gegen ein electromagnetisches System wachgerufen wird.

Kirchhoffs Methode der Translation einer Rolle gegen eine andere.

759. Die erste Bestimmung des Widerstandes eines Drahtes im electromagnetischen Maasssystem hat Kirchhoff*) ausgeführt. Er stellte sich zwei Rollen A_1, A_2 von bekannter Form her und berechnete den Coefficienten ihrer gegenseitigen Induction aus den Daten ihrer Form und Lage.

Die Rollen A_1, A_2, eine Batterie B und ein Galvanometer G bildeten zusammen einen Stromkreis. Den Draht, dessen Widerstand bestimmt werden sollte, schaltete Kirchhoff zwischen zwei Punkte P und Q ein, deren erster zwischen den beiden Rollen, deren anderer zwischen Batterie und Galvanometer lag. Fliesst der Strom der Batterie in constanter Stärke, so läuft von ihm ein Teil durch den Draht

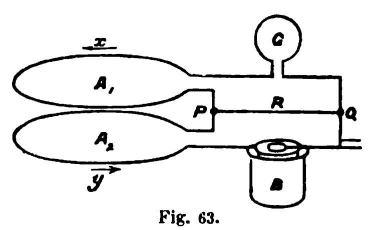


Fig. 63.

*) *Bestimmung der Constanten, von welchen die Intensität inducirter Ströme abhängt.* *Pogg. Ann.* LXXVI. (April 1849), oder *Gesammelte Abhandlungen* 118 ff.

PQ, ein Teil durch das Galvanometer. Letzteres zeigt dann eine permanente Ablenkung seiner Magnetnadel. Entfernt man nun die Rolle A_2 rasch aus ihrer jetzigen Lage in eine andere, in welcher der Inductions-Coefficient zwischen ihr und A_1 sich auf Null reducirt — solche Lagen haben wir in Art. 538 conjugirte genannt — so entsteht in beiden Rollen ein Inductionsstrom, der die Nadel des Galvanometers vorübergehend aus ihrer bisherigen Stellung treibt.

Der Widerstand R des Drahtes PQ lässt sich dann in folgender Weise aus der vom Batteriestrom hervorgebrachten permanenten und der durch den Inductionsstrom verursachten vorübergehenden Ablenkung der Magnetnadel des Galvanometers berechnen.

Ich bezeichne die Widerstände von QGA_1P, PA_2BQ, PQ mit K, B, R, nenne L, M, N die Inductionscoefficienten von A_1 und A_2, $\dot{x}$ die Stromstärke im Galvanometer G, $\dot{y}$ die in der Batterie B.

Der Strom fliesst durch den Draht PQ mit der Stärke $\dot{x} - \dot{y}$, daher ist, wenn E die electromotorische Kraft der Batterie angiebt, nach Art. 581

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} E &= -R\dot{x} + (B+R)\dot{y} + \frac{d}{dt}(M\dot{x} + N\dot{y}), \\ 0 &= -R\dot{y} + (K+R)\dot{x} + \frac{d}{dt}(M\dot{y} + L\dot{x}). \end{aligned}$$

Befindet sich das ganze System in Ruhe und bleibt die Batterie constant, so verschwinden die Differentialquotienten nach t, und man erhält

$$\text{1)}\quad (K+R)\dot{x} - R\dot{y} = 0.$$

Im allgemeinen ist aber, wenn nicht accentuirte Buchstaben auf den Anfangs-, accentuirte auf den Endzustand sich beziehen,

$$\text{b)}\quad \begin{aligned} R(x-x') - (B+R)(y-y') - M\dot{x} + M'\dot{x}' - N\dot{y} + N'\dot{y}' &= \int E dt \\ R(y-y') - (K+R)(x-x') - M\dot{y} + M'\dot{y}' - L\dot{x} + L'\dot{x}' &= 0. \end{aligned}$$

In Kirchhoffs Versuchen wird der Endzustand dadurch hervorgebracht, dass man die Rolle A_2 plötzlich in eine Lage versetzt, wo ihre Inductionswirkung auf die Rolle A_1 verschwindet, daher ist

$$M' = 0,\ L' = L,\ N' = N$$

und da der Inductionsstrom unmittelbar nachher aufhört, hat man auch

$$\dot{y}' = \dot{y},\ \dot{x}' = \dot{x},\ \int E dt = 0,$$

also wenn man statt $x' - x$ und $y' - y$ schreibt x bezüglich y

$$\text{b}_1)\quad \begin{aligned} (K+R)\,x - Ry - M\dot{y} &= 0, \\ (B+R)\,y - Rx - M\dot{x} &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die durch das Galvanometer sich entladende inducirte Electricitätsmenge

$$x = M \frac{(B+R)\dot{y} + R\dot{x}}{(B+R)(K+R) - R^2}, \tag{2}$$

oder nach Gleichung 1)

$$\frac{x}{\dot{x}} = \frac{M(B+R)(K+R) + R^2}{R(B+R)(K+R) - R^2} \tag{3}$$

$$= \frac{M}{R}\left\{1 + \frac{2R^2}{(B+R)(K+R)} + \dots\right\}.$$

Wenn, wie es in **Kirchhoffs** Experimenten tatsächlich der Fall gewesen ist, der Widerstand der Batterie sowohl, als der des Galvanometers gross gegen den zu messenden Widerstand R ausfallen, so hat man

$$\frac{x}{\dot{x}} = \frac{M}{R}. \tag{3_1}$$

Die Grösse x, die durch das Galvanometer sich entladende inducirte Electricitätsmenge, findet man nach einer der in den Artt. 748 bis 751 auseinandergesetzten Methoden; die $\dot{x}$, die permanente Stärke des von der Batterie durch das Galvanometer geschickten Stromes nach einer der in den Artt. 744 bis 747 gegebenen Anleitungen. M bestimmt man entweder direct durch Rechnung aus der Form der Rollen und ihrer ursprünglichen Lage gegen einander, oder indirect in der in Art. 755 gelehrten Weise durch Vergleichung mit der entsprechenden Grösse zweier Standardrollen. Ist das geschehen, so giebt die Gleichung 3_1) den Wert des Widerstandes R gemessen in Einheiten des electromagnetischen Maasssystems.

Die Beobachtung erfordert aber die Bestimmung der Schwingungsdauer der Magnetnadel und die des logarithmischen Decrements ihrer Schwingungen.

Webers Methode der Induction durch den Erdmagnetismus.

760. **Weber** lässt in seiner ersten Methode eine Rolle von bedeutender Grösse vertical um einen Durchmesser sich aus einer gegen den magnetischen Meridian senkrechten Lage in eine zu ihm parallele rasch bewegen und misst die Stärke des dadurch in derselben vom Erdmagnetismus inducirten Stromes an einer mit ihr zu einer Strombahn verbundenen und genügend entfernten Tangentenboussole.

Sei R der Widerstand der ganzen Strombahn, also der Rolle und Tangentenboussole zusammengenommen, H_1 die erdmagnetische Horizontalintensität an der Stelle, wo die Rolle sich befindet, g_1 das magnetische Moment der Rolle, wenn sie von einem Einheitsstrom durchzogen ist. Wird die Rolle durch Drehung um einen Durchmesser aus einer Lage, in der ihre positive Ebene senkrecht gegen den magnetischen Meridian steht, rasch

um eine halbe Revolution herumgedreht, so ruft der Erdmagnetismus in ihr einen Inductionsstrom hervor, der durch die Tangenten-Boussole, electromagnetisch gemessen, eine Electricitätsmenge

$$Q = \frac{2 g_1 H_1}{R}$$

entladet.

g_1 wird entweder nach der in Art. 754 gegebenen Methode durch Vergleichung mit einer Standardrolle bestimmt oder, wenn die benutzte Rolle weit genug ist, durch Ausmessung und Rechnung eruirt. Hat sich der Magnet der Boussole, bevor der Inductionsstrom eintrat, in Ruhe befunden, und ist die Zeit, die er zur Vollführung einer Schwingung braucht, gross gegen die, welche der Experimentator zur Drehung der Rolle in den magnetischen Meridian verwendet, so wird man Q nach einer der in den Artt. 748 bis 751 auseinandergesetzten Methoden bestimmen können.

Ich nehme an, dass man die Electricitätsmenge aus der ersten Schwingung, zu der der Magnet der Boussole durch die Entladung derselben den Impuls erhält, unter Vernachlässigung der Dämpfung berechnet; man hat dann nach Art. 748, 1b)

$$Q = \frac{H}{G} \frac{T}{\pi} 2 \sin \frac{\vartheta}{2},$$

wo H die erdmagnetische Horizontalintensität an der Stelle, wo die Boussole steht, G die Constante der Boussole, T die auf unendlich kleine Bogen reducirte Dauer einer einfachen Schwingung ihres Magnets und ϑ die beobachtete erste Elongation angiebt.

Darnach wird

$$R = \pi G g_1 \frac{1}{T \sin \frac{\vartheta}{2}} \frac{H_1}{H}.$$

Die Grösse H_1/H darf nur dann gleich Eins gesetzt werden, wenn man sich durch vorangehende Versuche — etwa, indem man einen Magnet erst an der Stelle, wo die Rolle, und dann an der, wo die Boussole sich befindet, schwingen lässt — davon überzeugt hat, dass an der Stelle der Rolle der Erdmagnetismus mit derselben Stärke wie an der der Boussole wirkt.

761. Bei der Anstellung einer fortlaufenden Reihe von Beobachtungen verfuhr Weber nach der Zurückwerfungsmethode. Er stellte erst die Rolle so, dass ihre Ebene dem magnetischen Meridiane parallel verlief. Dann drehte er sie um einen verticalen Durchmesser, bis ihre Ebene senkrecht zum Meridiane stand und ihre positive Seite dem Norden zuwandte. Er beobachtete nun an der Boussole die erste, in diesem Falle negative Elongation, verfolgte den Magnet, wie er durch die Gleichgewichtslage ging, notirte die erste positive Elongation und wartete, bis der Magnet abermals in seine Gleichgewichtslage gelangte. In dem Augenblick, wo der Magnet sie

wieder passiren wollte, drehte er die Rolle wieder, bis ihre positive Seite nach Süden wies. Der Inductionsstrom, der dadurch in der Rolle hervorgerufen wird, wirft den Magnet zurück; man beobachtet erst eine positive, dann eine negative Elongation und verfährt überhaupt bei der weiteren Beobachtung und Berechnung genau so, wie in Art. 750 schon angegeben ist.

So kann man in der Tat den Widerstand der Rolle zusammen mit dem der Boussole in electromagnetischen Maasseinheiten bestimmen.

Bei der wirklichen Ausführung solcher Experimente ist man, wenn die Ausschläge der Boussolennadel ausgiebig genug sein sollen, gezwungen, den Draht der Rolle aus Kupfer herzustellen. Leider hat aber das genannte Metall den Nachteil, dass es seinen Widerstand mit der Temperatur stark ändert, und da es nicht leicht ist, die Temperirung des Apparats an seinen verschiedenen Stellen zu eruiren, also den Zustand desselben während des Versuchs zu constatiren, so wird man — falls man nicht auf den dauernden Wert einer solchen Messung verzichten will — den Widerstand der ganzen aus Rolle und Boussole bestehenden Strombahn vor und nach der Messung mit dem einer eigens dazu mit besonderer Sorgfalt hergestellten Widerstandsrolle vergleichen müssen. Die Messung giebt dann auch den Widerstand dieser wohldefinirten Widerstandsrolle.

Webers Methode der Schwingungen einer Boussolennadel bei offener und geschlossener Rolle.

762. Die zweite Methode Webers beruht auf der Tatsache, dass ein Magnet, der in der Nähe einer geschlossenen Rolle schwingt, in dieser Ströme inducirt und dadurch seiner eigenen Bewegung Hindernisse bereitet.

Man hängt einen kräftigen Magnet so auf, dass er in der Mitte einer Galvanometerrolle schwebt, versetzt ihn in Schwingungen und beobachtet deren Dauer und logarithmisches Decrement einmal, wenn die Rolle offen, und dann, wenn sie in sich geschlossen ist. Da im letztern Falle die durch die Bewegung des Magnets inducirten Ströme sich in der Rolle ausbilden können, so werden die Schwingungen nach dem Lenzschen Gesetz stärker als im erstern gedämpft werden.

Ist T die Dauer, λ das logarithmische Decrement einer einzelnen Schwingung des Magnets, so hat man, falls

$$\omega = \frac{\pi}{T}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{T}$$

gesetzt wird und φ die Ablenkung des Magnets zur Zeit t aus seiner Gleichgewichtslage bedeutet, für die Bewegung des Magnets die Gleichung

$$\varphi = C_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \beta). \tag{a_1}$$

Das gilt sowohl, wenn die Rolle offen, als wenn sie in sich geschlossen ist. ω und α haben aber bei offener Rolle andere Werte als bei geschlossener.

Richtet man sich so ein, dass der Magnet durch ganz kurze Bogen schwingt, so ist die Differentialgleichung, der die Bewegung des Magnets bei **offener** Rolle folgt (Art. 741),

$$\text{b)} \qquad A\frac{d^2\varphi}{dt^2}+B\frac{d\varphi}{dt}+C\varphi=0.$$

A bezeichnet das Trägheitsmoment des Magnets und aller mit ihm mitschwingenden Teile des Apparates, $Bd\varphi/dt$ den Widerstand, den er von der Viscosität der Luft, des Aufhängungsfadens u. s. f. erleidet, $C\varphi$ das seiner Bewegung widerstrebende Moment der Kraft, die durch die magnetische Wirkung der Erde, die Torsion der Aufhängung u. s. f. hervorgebracht wird.

Wird jetzt die Rolle in sich geschlossen, so wirken die in ihr inducirten Ströme auf den Magnet in jedem Augenblick mit einem Kraftmoment, das nach Art. 583 die Grösse $\gamma dM/d\varphi$ besitzt, falls M den Inductionscoefficienten zwischen Magnet und Rolle*), γ die Stärke des in dieser cursirenden inducirten Stromes angiebt. Wir haben daher als Differentialgleichung der Bewegung des Magnets bei geschlossener Rolle

$$c_1) \qquad A\frac{d^2\varphi}{dt^2}+B\frac{d\varphi}{dt}+C\varphi=\gamma\frac{dM}{d\varphi}.$$

Ein Magnet kann selbst wie eine Rolle angesehen werden. Daher ist nach Art. 700 der Inductionscoefficient M zwischen ihm und der Rolle

$$M=G_1g_1P_1(\vartheta)+G_2g_2P_2(\vartheta)+\dots.$$

$G_1, G_2, \dots$ sind die durch die Form der Rolle bestimmten, $g_1, g_2, \dots$ die aus der Form des Magnets zu eruirenden Coefficienten, die P bedeuten zonale harmonische Functionen des Winkels ϑ, den die Axe des Magnets mit der der Rolle einschliesst, sind also, wenn der Magnet sich bewegt, variabel. Durch geeignetes Arrangement der Windungen der Rolle und dadurch, dass man den Magnet aus mehreren kleineren in bestimmter Weise zu einander gelegten Magneten zusammensetzt, kann man die auf das erste Glied in der Entwickelung für M folgenden auf eine gegen den Betrag dieses ersten Gliedes verschwindende Grösse reduciren. Man hat dann $M=G_1\,g_1\,P_1(\vartheta)$ oder weil $P_1(\vartheta)=\cos\vartheta$ und $\vartheta=\pi/2-\varphi$ ist,

$$M=G_1g_1\sin\varphi.$$

g_1 ist das magnetische Moment des Magnets, ich ersetze dieses Symbol durch den üblichern Buchstaben m und habe, wenn der Magnet seinerseits durch die inducirten Ströme nicht in seiner Stärke afficirt wird,

$$M=G_1m\sin\varphi.$$

---

*) Genauer, die Induction zwischen der Rolle, wenn sie von einem Einheitsstrom durchflossen wird, und dem Magnete, wie er eben ist.

Die Gleichung c_1) geht also, weil $\cos\varphi = 1$ gesetzt werden darf, über in

c₂) $$A\frac{d^2\varphi}{dt^2} + B\frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = \gamma m G.$$

Diese Gleichung enthält noch die unbekannte, von φ selbst abhängige Grösse γ, zu deren Elimination wir die in Art. 581 entwickelten Inductionsgesetze anzuwenden haben.

Ich bezeichne mit R den Widerstand der Rolle und mit L den Coefficienten ihrer Induction auf sich selbst. Da die Rolle von keiner äussern electromotorischen Kraft angegriffen wird, so hat man nach den Lehren des citirten Art. 581

d') $$R\gamma + \frac{d}{dt}(L\gamma + M) = 0,$$

also zufolge des Wertes für M und weil die Rolle fest bleibt,

d) $$L\frac{d\gamma}{dt} + R\gamma + Gm\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

oder mit genügender Genauigkeit

d₁) $$L\frac{d\gamma}{dt} + R\gamma + Gm\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Aus dieser und der Gleichung c_2) folgt nunmehr

d₂) $$L\left(A\frac{d^3\varphi}{dt^3} + B\frac{d^2\varphi}{dt^2} + C\frac{d\varphi}{dt}\right) + R\left(A\frac{d^2\varphi}{dt^2} + B\frac{d\varphi}{dt} + C\varphi\right) + G^2m^2\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

als lineare Differentialgleichung dritter Ordnung für φ.

Was wir nun zu eruiren suchen, ist nicht etwa die Bewegung des Magnets, diese kennen wir aus unsern Beobachtungen, wir wollen vielmehr R aus dieser Bewegung bei offener und geschlossener Rolle berechnen, die Gleichung d_2) ist also nicht als Differentialgleichung, sondern als Bestimmungsgleichung für R anzusehen.

Es seien α_0 und ω_0 die Werte, welche $\alpha = \lambda/T$ und $\omega = \pi/T$ besitzen, wenn die Rolle geöffnet ist; R wird dann unendlich gross und die Gleichung d_2) geht in die b) über.

Die allgemeine Lösung von b) ist aber

$$\varphi = C_1 e^{-\frac{B}{2A}t}\cos\left(t\sqrt{C - \frac{B^2}{4A}} + \beta\right).$$

Daher wird nach a_1)

$$B = 2A\alpha_0,\quad C = A(\alpha_0^2 + \omega_0^2).$$

Bewegt sich der Magnet, während die Rolle geschlossen ist, so tritt an

Stelle der Gleichung b) die d_2), deren für uns brauchbare Lösung die Form

$$\varphi = C_1 e^{-(\alpha + i\omega)t}$$

haben wird. α und ω entsprechen den früher mit α_0 und ω_0 bezeichneten Grössen, haben aber nicht dieselben Werte.

Nun ist, wenn

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2} + B\frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = A\Phi$$

gesetzt wird,

$$-R = \frac{G^2 m^2}{A}\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\Phi} + \frac{L\,d\log\Phi}{dt},$$

also, weil

$$\Phi = \left\{(\alpha + i\omega)^2 - 2\alpha_0(\alpha + i\omega) + \alpha_0^2 + \omega_0^2\right\} e^{-(\alpha + i\omega)t}$$

ist,

$$R = \frac{G^2 m^2}{A}\frac{\alpha + i\omega}{\alpha^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega - 2\alpha_0(\alpha + i\omega) + \alpha_0^2 + \omega_0^2} + L(\alpha + i\omega),$$

oder wenn man die imaginären von den reellen Gliedern scheidet,

$$\begin{aligned}&\Big[R\left\{\alpha^2 - \omega^2 - 2\alpha\alpha_0 + \alpha_0^2 + \omega_0^2\right\}\\ &\quad - \frac{G^2 m^2}{A}\alpha - L\left\{(\alpha^2 - \omega^2 - 2\alpha\alpha_0 + \alpha_0^2 + \omega_0^2)\alpha - 2\omega^2(\alpha - \alpha_0)\right\}\Big]\\ &+ i\omega\Big[2(\alpha - \alpha_0)R\\ &\quad - \frac{G^2 m^2}{A} - L\left(\alpha^2 - \omega^2 - 2\alpha\alpha_0 + \alpha_0^2 + \omega_0^2 + 2\alpha(\alpha - \alpha_0)\right)\Big] = 0.\end{aligned}$$

Da $i = \sqrt{-1}$ ist, so muss jeder der beiden in eckige Klammern gesetzten Ausdrücke für sich verschwinden, wir haben also

$$1_1)\qquad R = \frac{G^2 m^2}{2A}\frac{1}{\alpha - \alpha_0} + \frac{L}{2}\left(3\alpha - \alpha_0 - \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha - \alpha_0}\right).$$

$$1_2)\qquad R = \frac{G^2 m^2}{A}\cdot\frac{\alpha}{(\alpha - \alpha_0)^2 - (\omega^2 - \omega_0^2)} + L\left(\alpha - \frac{2\omega^2(\alpha - \alpha_0)}{(\alpha - \alpha_0)^2 - (\omega^2 - \omega_0^2)}\right),$$

Beide Gleichungen können zur Berechnung von R verwendet werden, weil aber im allgemeinen ω weit grösser als α ausfällt, wird man sich der ersten zu bedienen haben, und die zweite nur als Controlgleichung benutzen. Aus beiden Gleichungen zusammen können wir aber noch eine approximative Formel für R ableiten.

Wenn die Beobachtungen gehörig durchgeführt sind, müssen die linken Seiten jener Gleichungen, also auch ihre rechten einander gleich sein. Wir haben daher

$$G^2m^2(\alpha^2-\alpha_0^2+\omega^2-\omega_0^2)=LA[(\alpha-\alpha_0)^4+(\omega^2-\omega_0^2)^2+2(\alpha-\alpha_0)^2(\omega^2+\omega_0^2)]$$

und da $LA\omega^2$ gegen G^2m^2 sehr klein ist, so folgt hieraus sehr näherungsweise

$$\alpha^2-\alpha_0^2=-(\omega^2-\omega_0^2),$$

also nach 1_1)

$$1)\qquad R=\frac{G^2m^2}{2A(\alpha-\alpha_0)}+2L\alpha.$$

Die Constante G der Rolle kann man nach Ausmessung ihres Windungsdrahtes durch Rechnung finden, besser tut man aber, sie nach der in Art. 753 auseinandergesetzten Methode durch Vergleichung mit einer Standardrolle zu eruiren; A ist das Trägheitsmoment des Magnets und aller mit ihm mitschwingenden Teile des Apparates, sein Werth ist nach bekannten Methoden durch Rechnung oder durch Vergleichung mit einem schon bestimmten Trägheitsmoment abzuleiten; $\omega, \omega_0, \alpha, \alpha_0$ sind durch die Beobachtung selbst gegeben, und es ist, wenn T_0 die Schwingungsdauer bei offener, T die bei geschlossener, λ_0 das logarithmische Decrement bei offener, λ das bei geschlossener Rolle bezeichnet,

$$\omega_0=\frac{\pi}{T_0},\quad \omega=\frac{\pi}{T};\quad \alpha_0=\frac{\lambda_0}{T_0},\quad \alpha=\frac{\lambda}{T}.$$

Den schwierigsten Teil einer solchen Untersuchung bildet die Bestimmung des magnetischen Moments m des schwingenden Magnets, da dieses sowol von der Temperatur, als von der erdmagnetischen Kraft, als von etwaigen Erschütterungen in seinem Betrage verändert wird. Man muss daher bei der Messung dieses Moments den Magnet möglichst in den Zustand, in welchem er sich während des Versuchs befindet, versetzen.

Der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung für R steht in seinem numerischen Betrage im allgemeinen weit hinter dem ersten zurück, er ist daher auch von geringerer Wichtigkeit. Zu seiner Eruirung bestimmt man die Selbstinduction L der Rolle entweder durch Rechnung oder nach Art. 756 durch Vergleichung mit einer Standardrolle.*)

---

*) Dorn hat diese zweite Webersche Methode ausgebildet und erweitert. Siehe dessen Abhandlung: *Die Reduction der Siemensschen Einheit auf absolutes Maass*. Wiedemanns *Annalen* XVII., p. 773 ff. Er behauptet, dass in der Formel 1) an Stelle von $2L\alpha$ stehen müsste $L\alpha$, ich kann aber nicht sehen, weshalb. Doch scheinen die von Maxwell eingeführten Vernachlässigungen überhaupt zu Widersprüchen zu führen. Anm. des Uebers.

Thomsons Methode der Erdinduction auf eine rotirende Rolle.

763. Die in der Ueberschrift genannte Methode ist von W. Thomson, der von der British Association behufs Feststellung electrischer Maasseinheiten eingesetzten Commission vorgeschlagen und von Balfour Stewart, Fleeming Jenkin und dem Autor dieses im Jahre 1863 zur Anwendung gebracht worden.

Man lässt in der Mitte der Rolle, deren Widerstand in electromagnetischen Maasseinheiten bestimmt werden soll, eine Magnetnadel schweben und dreht sie mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine verticale Axe.

Der Erdmagnetismus und die Magnetnadel induciren dann in ihr einen Strom, der während der einen Hälfte einer Umdrehung nach der einen, während der zweiten nach der andern Richtung fliesst. Die Magnetnadel wird aber aus dem magnetischen Meridian stets in Richtung der Rotation abgelenkt.

764. Ich bezeichne mit

H die erdmagnetische Horizontalintensität,
γ die Stärke des in der Rolle inducirten Stromes,
G die magnetische Kraft, die die Rolle, wenn sie von einem Einheitsstrom durchzogen wird, in ihrem Mittelpunkte auf einen Einheitspol ausübt,
g den Inhalt der von allen Windungen erfassten Flächen,
L den Coefficienten der Selbstinduction der Rolle,
m das magnetische Moment des in ihrer Mitte schwebenden Magnets,
ϑ den Winkel, den die Ebene der Rolle zur Zeit t mit dem magnetischen Meridian einschliesst,
φ den Winkel, um welchen die Axe des Magnets gegen den magnetischen Meridian geneigt ist,
A das Trägheitsmoment des Magnets und aller mit ihm sich bewegenden Teile,
$mH\tau$ den Torsionscoefficienten des Fadens, an dem der Magnet hängt,
α das Azimut des Magnets, wenn sein Aufhängungsfaden torsionsfrei ist,
R den Widerstand der Rolle.

Der variabele Teil der kinetischen Energie unseres Systems ist dann zur Zeit t

$$\text{a)} \qquad T = \frac{1}{2} L\gamma^2 - Hg\gamma \sin\vartheta - mG\gamma \sin(\vartheta - \varphi) + mH \cos\varphi + \frac{1}{2} A\dot{\varphi}^2.$$

Das erste Glied, $L\gamma^2/2$, ist die Energie des inducirten Stromes, so weit sie von der Rolle selbst abhängt. Das zweite, $Hg\gamma \sin\vartheta$, trägt der Einwirkung zwischen dem Erdmagnetismus und Rolle; das dritte,

$mH\gamma \sin(\vartheta - \varphi)$, der zwischen Magnet und Rolle Rechnung. Das vierte, $mG\cos\varphi$, verdankt der Wirkung zwischen dem Magnet und der Erde seine Entstehung. Das fünfte endlich, $\frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2$, ist die kinetische Energie, die der Bewegung des Magnets und der an ihm befestigten Teile ihre Entstehung verdankt.

Zu dieser kinetischen Energie kommt noch die von der Torsionselasticität des Fadens, an welchem der Magnet sammt seinen beweglichen Ansatzstücken hängt, herrührende potentielle Energie, deren variabeler Teil

b) $$V = \frac{mH}{2}\tau(\varphi^2 - 2\varphi\alpha)$$

ist.

Bezeichnet nun, wie bisher, p das electrokinetische Moment des Stromes, so haben wir nach Art. 581, weil eine äussere electromotorische Kraft die Rolle nicht angreift,

1'a) $$R\gamma + \frac{dp}{dt} = 0,$$

und da zufolge der Gleichung a)

c) $$p = \frac{\partial T}{\partial \gamma} = L\gamma - Hg\sin\vartheta - mG\sin(\vartheta - \varphi)$$

ist, so haben wir

1'b) $$R\gamma + L\frac{d\gamma}{dt} - \big(Hg\cos\vartheta - mG\cos(\vartheta - \varphi)\big)\frac{d\vartheta}{dt} + mG\cos(\vartheta - \varphi)\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Ist aber ω die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Rolle sich gleichförmig um ihre Axe dreht, so wird

$$\vartheta = \omega t, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega,$$

also

1'c) $$R\gamma + L\frac{d\gamma}{dt} = Hg\omega\cos\vartheta + mG(\omega - \dot{\varphi})\cos(\vartheta - \varphi).$$

Diese Gleichung würde sofort R zu berechnen gestatten, wenn die einzelnen in derselben vertretenen Grössen bekannt wären.

765. Theorie wie Erfahrung haben gelehrt, dass φ, das Azimut des Magnets zur Zeit t, zwei Arten von periodisch wiederkehrenden Variationen unterworfen ist. Die eine Variation tritt in Form einer freien Oscillation des Magnets auf, deren Periode von der Intensität des Erdmagnetismus abhängt und beim Versuch zu mehreren Secunden ansteigt. Die zweite besteht in einer erzwungenen Vibration von einer Periode, die die Hälfte der Zeit, welche die Rolle zu einer vollen Umdrehung verwendet, in Anspruch nimmt. Da aber, wie ich noch zeigen werde, die Amplitude dieser Vibration fast zum Verschwinden gebracht werden kann, so wird man, weil die freien

Schwingungen des Magnets sich nach einiger Zeit beruhigen, φ als sehr näherungsweise constant ansehen dürfen.

Wir haben dann für γ die Differentialgleichung

$$L\frac{d\gamma}{dt} + R\gamma = Hg\omega\cos\vartheta + mG\omega\cos(\vartheta - \varphi),$$

woraus, weil $\vartheta = \omega t$ ist, durch Integration

$$1)\qquad \gamma = \frac{Hg\omega}{R^2 + L^2\omega^2}(R\cos\vartheta + L\omega\sin\vartheta)$$
$$+ \frac{mG\omega}{R^2 + L^2\omega^2}[R\cos(\vartheta - \varphi) + L\omega\sin(\vartheta - \varphi)]$$
$$+ Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

folgt. Das Exponentialglied verliert, wenn die Rotation der Rolle gleichförmig geworden ist, bald jeden mit den andern Gliedern vergleichbaren Wert, es bleibt also nach einiger Zeit

$$1_1)\qquad \gamma = \frac{\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\Big\{Hg[R\cos\vartheta + L\omega\sin\vartheta] + mG[R\cos(\vartheta - \varphi) + L\omega\sin(\vartheta - \varphi)]\Big\}.$$

Das ist die Gleichung, die wir aus unserer dynamischen Theorie der Ströme für den Inductionsstrom der Rolle ableiten können.

Wir haben nun in derselben Weise die Gleichung für den Magnet zu bilden. Nach den Lagrangeschen Formeln ist die Bewegung des Magnets dem Gesetze

$$2')\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} + \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$$

unterworfen, also wird wegen a) und b)

$$2\text{a})\qquad A\frac{d\dot\varphi}{dt} - mG\gamma\cos(\vartheta - \varphi) + mH[\sin\varphi + \tau(\varphi - \alpha)] = 0.$$

Indem man γ durch seinen unter 1_1) angeführten Wert ersetzt und nach Functionen von Vielfachen von ϑ ordnet, erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ, deren allgemeines Integral durch

$$2)\qquad \varphi = \varphi_0 + be^{-lt}\cos nt + c\cos 2(\vartheta - \beta)$$

ausgedrückt werden kann.

Das erste Glied φ_0 giebt den mittlern Wert, um welchen herum φ schwankt, das zweite stellt die freien Schwingungen, die der Magnet unter dem Einfluss des Erdmagnetismus und der dämpfenden Kräfte ausführt, und verliert nach einiger Zeit jede Bedeutung, das dritte endlich trägt dem

durch das fortwährende Wechseln der Richtung des inducirten Stroms entstehenden Hin- und Hergeworfenwerden des Magnets Rechnung. Doch muss man bemerken, dass bei der Ableitung dieser Gleichung für φ von der Tatsache, dass die durch das zweite und dritte Glied charakterisirte Bewegung, wenn der Apparat einmal in Gang ist, verschwinden, schon Gebrauch gemacht ist.

Da φ_0 nicht von t abhängt und die vom inducirten Strom im Mittel während einer vollen Umdrehung hervorgebrachte Ablenkung bedeutet, so haben wir

$$-mG\int_0^{2\pi}\gamma\cos(\vartheta-\varphi_0)d\vartheta+mH\int_0^{2\pi}\big(\sin\varphi_0+\tau(\varphi_0-\alpha)\big)\,d\vartheta=0$$

zu setzen, woraus unter Berücksichtigung des in 1_1) für γ gegebenen Wertes folgt

$$3')\qquad \frac{mG\omega}{R^2+L^2\omega^2}\{Hg(R\cos\varphi_0+L\omega\sin\varphi_0)+GmR\}$$
$$=2mH\big(\sin\varphi_0+\tau(\varphi_0-\alpha)\big).$$

Die Gleichung ist zunächst als Bestimmungsgleichung für φ_0 aufzufassen. Wenn aber φ_0 durch die Beobachtung gegeben ist, so wird sie zur Berechnung von R dienen können. Sie ist nach dieser Grösse quadratisch und giebt geordnet

$$3'b)\qquad 2HR^2\operatorname{tg}\varphi_0\left(1+\frac{\tau(\varphi_0-\alpha)}{\sin\varphi_0}\right)-G\omega R(Hg+Gm\sec\varphi_0)$$
$$=L^2\omega^2H\operatorname{tg}\varphi_0\left(\frac{Gg}{L}-2\left(1+\frac{\tau(\varphi_0-\alpha)}{\sin\varphi_0}\right)\right),$$

also

$$3)\ R=\frac{gG\omega\left(1+\frac{Gm}{Hg}\sec\varphi_0\right)}{4\operatorname{tg}\varphi_0\left(1+\frac{\tau(\varphi_0-\alpha)}{\sin\varphi_0}\right)}\left\{1+\sqrt{1+\frac{8L\operatorname{tg}^2\varphi_0\left(1-\frac{2L}{Gg}\left(1+\frac{\tau(\varphi_0-\alpha)}{\sin\varphi_0}\right)\right)\left(1+\frac{\tau(\varphi_0-\alpha)}{\sin\varphi_0}\right)}{gG\left(1+\frac{Gm}{gH}\sec\varphi_0\right)^2}}\right\}.$$

Hängt der Magnet an einem Faden, so wird man immer unter dem Wurzelzeichen die mit τ multiplicirten Glieder fortlassen und

$$3_1)\qquad R=\frac{gG\omega\left(1+\frac{Gm}{Hg}\sec\varphi_0\right)}{4\operatorname{tg}\varphi_0\left(1+\frac{\tau(\varphi_0-\alpha)}{\sin\varphi_0}\right)}\left\{1+\sqrt{1+\frac{8L\operatorname{tg}^2\varphi_0\left(1-\frac{2L}{Gg}\right)}{gG\left(1+\frac{Gm}{gH}\sec\varphi_0\right)^2}}\right\}$$

setzen dürfen.

Da ferner $L\operatorname{tg}\varphi_0$ gegen Gg nur klein ist, kann man die Wurzel entwickeln, und es resultirt, wenn von $Gm\sec\varphi_0/gH$ höhere Potenzen als die erste vernachlässigt werden,

$$3_2)\quad R=\frac{Gg\omega}{2\operatorname{tg}\varphi_0\left(1+\frac{\tau(\varphi_0-\alpha)}{\sin\varphi_0}\right)}\left\{1+\frac{Gm}{gH}\sec\varphi_0-\left(\frac{2L}{Gg}\right)\left(\frac{2L}{Gg}-1\right)\operatorname{tg}^2\varphi_0\right.$$
$$\left.-\left(\frac{2L}{Gg}\right)^2\left(\frac{2L}{Gg}-1\right)^2\operatorname{tg}^4\varphi_0\right\}.$$

Setzt man nunmehr den ersten Näherungswert für R, nämlich $G g \omega / 2 \operatorname{tg} \varphi_0$ in die Gleichung 1_1) ein, berechnet aus dieser γ und reducirt damit die Differentialgleichung 2a) auf die einzige Unbekannte φ, so findet man, dass diese eine Function von der Form $b e^{-lt} \cos nt$ zum Integral hat, wenn $n = \sqrt{Hm \sec \varphi_0 / A}$ gesetzt wird, und dass sie ferner auch durch die Function $c \cos 2(\vartheta - \beta)$ erfüllt wird, wenn man $c = n^2 \sin \varphi_0 / 4 \omega^2$ macht. Dreht sich also die Rolle, während der Magnet nur eine Schwingung zu vollführen im Stande ist, um ihre Axe herum, so fällt ω^2 gross, c also klein aus, und da c die Amplitude der durch den fortwährenden Stromwechsel erzwungenen Vibration des Magnets angiebt, so folgt, dass diese Vibration, wenn nur die Rolle sich rasch genug um ihre Axe dreht, völlig ausser Acht gelassen werden darf. Man wird aber natürlich mit der definitiven Beobachtung von φ_0 so lange warten müssen, bis der Magnet seine Lage wirklich scheinbar nicht mehr ändert.

766. Die Gleichung 3) bestimmt den Widerstand der Rolle durch die Ablenkung φ, die die Rolle, wenn sie unter dem Einfluss des Erdmagnetismus mit der Geschwindigkeit ω um einen verticalen Durchmesser rotirt, dem in ihrer Mitte schwebenden Magnete erteilt. Die erdmagnetische Horizontalintensität ist zwar ebenfalls in der Gleichung vertreten, man hat aber nicht direct ihren Wert, sondern ihr Verhältnis zum magnetischen Moment m des Magnets zu bestimmen. Dieses Verhältnis lässt sich aber leicht nach den in Art. 454 gegebenen Anleitungen durch Ablenkungsbeobachtungen am Magnetometer eruiren. Immerhin wird man einen so schwachen Magnet zu wählen haben, dass das Glied $Gm \sec \varphi_0 / gH$ in dem Ausdruck für R von nur secundärer Bedeutung ist.

Ueber die wirkliche Ausführung derartiger Widerstandsbestimmungen in electromagnetischem Maass, über die anzuwendenden Vorsichtsmaassregeln und über die noch nötigen Correctionen findet der Leser das Nähere in dem *Report of the British Association for 1863* p. 168.*)

Joules Calorimetrische Methode.

767. Die Joulesche Methode zur Bestimmung eines Widerstandes in electromagnetischem Maass basirt auf dem in Art. 242 behandelten Jouleschen Gesetz.

Nach diesem Gesetz ist nämlich die Wärmemenge h, die ein Strom γ, während er einen Widerstand R überwindet, in dem Körper, der ihm diesen Widerstand entgegensetzt, entwickelt,

$$h = \frac{1}{J} \int R \gamma^2 dt,$$

wo J das dynamische Aequivalent der gewählten Wärmeeinheit angiebt.

*) Es sei noch auf die Kritik, der Rayleigh in den *Proc. R. S.* 1881, p. 104 bis 124 diese Methode unterworfen hat, hingewiesen.

Zeigt der Körper, so lange das Experiment dauert, stets denselben Widerstand, so hat man hieraus

$$R = \frac{Jh}{\int \gamma^2 dt}.$$

Zur Bestimmung von R muss man also erstens die in einer gewissen Zeit entwickelte Wärmemenge und zweitens das Quadrat γ^2 der Stärke des die Wärme producirenden Stromes kennen.

h berechnete Joule*) aus der Temperaturerhöhung, die eine gewogene Quantität Wasser, welche den Stromleiter umgab, durch die in diesem entwickelte Wärmemenge erfuhr, wobei er die Correctionen für Strahlung, Leitung u. s. f. dadurch bestimmte, dass er den Gang der Temperatur des Wassers alternirend, während der Strom den Draht durchfloss und während er es nicht tat, verfolgte.

Die Stärke des Stromes mass er mit einer Tangentenboussole; natürlich musste er zu diesem Behufe die erdmagnetische Horizontalintensität bestimmen, und das tat er nach der in Art. 457 auseinandergesetzten Methode. Ausserdem controlirte er seine Messungen durch seine in Art. 726 beschriebene Inductionswage, welche nicht γ, sondern geradezu γ^2 zu bestimmen gestattet. Man kann aber noch directer gleich das Integral $\int \gamma^2 dt$ messen, wenn man den Strom durch ein selbsttätiges Electrodynamometer, dessen Scalenablesungen γ^2 proportional verlaufen, sendet. Dabei stellt man die einzelnen Beobachtungen in gleichen Zeitabschnitten an, indem man während des ganzen Experiments die Scalenangaben, die den grössten Ausschlägen der beweglichen Rolle des Dynamometers entsprechen, notirt.

*) *Report of the British Association*, 1867.

Cap. XIX.

Vergleichung der electrostatischen mit den electromagnetischen Einheiten.

—×—

Die Reductionszahl zwischen dem electrostatischen und electromagnetischen Maasssystem stellt eine Geschwindigkeit oder das Reciproke einer solchen dar.

768. Die absoluten Grössen der electrischen Einheiten hängen im electrostatischen wie im electromagnetischen Maasssystem von den gerade benutzten Einheiten für Länge, Masse und Zeit ab, und da sie in den genannten beiden Maasssystemen nicht in derselben Weise durch die drei fundamentalen Einheiten bestimmt sind, so wird das Verhältnis des Betrages einer electrischen Grösse, wenn sie electrostatisch gemessen wird, zu dem Betrage, wenn man sie in electromagnetischen Einheiten ausdrückt, von der Wahl der concreten Einheiten für Länge und Zeit abhängen.

Nun erhellt aus der Tabelle, die ich in Art. 627 für die Dimensionen der electrischen Grössen aufgestellt habe, wie schon in Art. 628 bemerkt worden ist, dass die Zahl der electrostatischen Electricitätseinheiten, die in einer electromagnetischen Electricitätseinheit enthalten sind, umgekehrt wie die concrete Zeiteinheit und direct wie die concrete Längeneinheit variirt. Bestimmt man also eine Geschwindigkeit, deren Grösse numerisch gleich dem Verhältnis einer electromagnetischen zu einer electrostatischen Electricitätseinheit ist, so wird die Zahl, die diese Geschwindigkeit repräsentirt, auch dann noch dieses Verhältnis repräsentiren, wenn wir für die concrete Längen- und Zeiteinheit eine andere Wahl treffen.

Die bezeichnete Geschwindigkeit, die die Beziehungen zwischen den electrostatischen und den electromagnetischen Phänomenen vermittelt, ist hiernach eine physikalische Grösse von ganz bestimmtem Betrage. Ihre numerische Bestimmung zählt auch zu den wichtigsten Untersuchungen, zu denen die electrischen Erscheinungen Veranlassung geben. Um einzusehen, dass das Verhältnis der electromagnetischen Electricitätseinheit zur electro-

statischen wirklich eine Geschwindigkeit ist, hat man die folgende Betrachtung anzustellen.

Wenn zwei gleichgerichtete Ströme parallele gerade Bahnen durchfliessen, so wird die Länge a der einen Bahn von der ganzen andern Bahn, wenn sie von derselben um die Strecke b absteht, nach Art. 686 mit der Kraft

$$F = 2CC'\frac{a}{b}$$

angezogen; C, C' sind darin die numerischen Beträge der Stärken der bezüglichen Ströme, electromagnetisch gemessen. Macht man $b = 2a$, so wird

$$F = CC'.$$

Ladet man nun zwei kleine Leiter, die sich von einander in der Entfernung r befinden, dadurch, dass man jeden von ihnen mit einem der beiden Ströme verbindet und diese durch die Zeit t hindurch fliessen lässt, mit den electrostatisch gemessenen Electricitätsmengen e, e', so werden sich diese kleinen Leiter mit der Kraft

$$F_1 = \frac{ee'}{r^2}$$

abstossen.

Electromagnetisch gemessen ist aber die Electricitätsmenge, die ein Strom von der Stärke C durch einen Querschnitt des Leiters in der Zeit t hindurchführt, gleich Ct, electrostatisch also gleich nCt, wenn n die Anzahl electrostatischer Electricitätseinheiten, die einer electromagnetischen Electricitätseinheit äquivalent sind, bedeutet. Wir haben also

$$F_1 = \frac{CC'n^2t^2}{r^2}.$$

Verrücken wir jetzt die beiden kleinen Leiter so lange, bis ihre gegenseitige Abstossung numerisch eben so gross ist, wie die Anziehung der ersten Strombahn auf das Stück a der von ihr in der Entfernung $2a$ befindlichen zweiten Strombahn, so hat man

$$\frac{CC'n^2t^2}{r^2} = CC'$$

oder

$$r = nt.$$

Da nun t eine Zeit, r eine Länge ist, so wird n eine Geschwindigkeit bedeuten, deren absoluter Betrag ganz unabhängig von den gewählten concreten Einheiten ist.

769. Ich will noch zeigen, wie man sich von dieser Geschwindigkeit auch eine physikalische Vorstellung zu machen vermag.

Wir laden eine ebene Fläche zur electrostatisch gemessenen Flächendichte σ und bewegen sie in ihrer eigenen Ebene mit der Geschwindigkeit v.

Offenbar ist diese sich so bewegende Ebene einer ebenen Stromschale äquivalent, bei welcher der Strom durch die Einheit der Breite ihrer Oberfläche mit der electrostatisch gemessenen Stärke σv, also mit der electromagnetisch gemessenen Stärke $\sigma v/n$, bewegt, wenn n die Anzahl electrostatischer Electricitätseinheiten, die einer electromagnetischen Einheit äquivalent ist, bedeutet. Laden wir eine zweite ebene, der ersten parallele Fläche zur electrostatisch gemessenen Flächendichte σ' und bewegen sie mit der Geschwindigkeit v' in ihrer eigenen Ebene, so wird auch diese Ebene eine ebene Stromschale.

Nun beträgt nach Art. 124 die Abstossungskraft, die zwischen den beiden genannten Ebenen herrscht, für jede Flächeneinheit

$$F_1 = 2\pi\sigma\sigma'.$$

Ferner ist die electromagnetische Anziehungskraft zwischen den beiden aus ihnen abgeleiteten Stromschalen nach Art. 653 für jede Flächeneinheit

$$F = 2\pi u u',$$

wo u, u' die Stromdichten in den bezüglichen Schalen angeben. Wir haben aber

$$u = \frac{1}{n}\sigma v, \quad u' = \frac{1}{n}\sigma' v',$$

also wird

$$F = 2\pi\sigma\sigma'\frac{v v'}{n^2},$$

und

$$\frac{F_1}{F} = \frac{n^2}{v' v}.$$

Anziehung und Abstossung sind aber zwei gleichartige Grössen, daher muss n eine Quantität derselben Art wie v, d. h. eine Geschwindigkeit sein.

Stellen wir uns jetzt vor, dass jede der geladenen Ebenen sich in sich selbst mit der Geschwindigkeit n bewegt, so wird die Abstossung F_1 numerisch gleich der Anziehung F, die beiden geladenen und in sich mit der Geschwindigkeit n bewegten Ebenen werden also auf einander gar keine Kraftwirkung ausüben.

Daraus können wir sofort das Verhältnis, in dem eine electrostatische Electricitätseinheit zu einer electromagnetischen steht, als numerisch der Geschwindigkeit gleich definiren, mit welcher zwei geladene parallele Ebenen sich in sich selbst und nach derselben Richtung bewegen müssen, wenn sie auf einander gar keine Kraftwirkung ausüben sollen.

Diese Geschwindigkeit beträgt etwa 288 000 km für die Secunde, das Experiment lässt sich also in der angegebenen Weise nicht ausführen.

770. Kann man die Flächendichte, zu der die Ebenen geladen sind, und die Geschwindigkeit, mit der sie bewegt werden, so gross

machen, dass die magnetische Kraftwirkung einer Ebene auf die andere einen messbaren Betrag erreicht, so wird man wenigstens die hier gemachte Supposition, dass nämlich ein sich bewegender electrisirter Körper einem electrischen Strome äquivalent ist, zu verificiren vermögen.

Nach den Versuchen von W. Thomson darf man annehmen, dass eine in freier Luft befindliche electrisirte Fläche sich durch Funken zu entladen beginnt, wenn die electrische Kraft $2\pi\sigma$ an ihr die Stärke 130 erreicht, bewegte sich also eine solche Fläche mit der Geschwindigkeit v in sich selbst, so wäre ihre magnetische Kraftwirkung $2\pi\sigma v/n$ etwa gleich $0{,}0005\,v$, oder wenn man für v hundert Meter, d. h. ein Zehntel Kilometer ansetzt, gleich 0,00005. Nun beträgt aber in denselben Einheiten gemessen die erdmagnetische Kraft in unsern Gegenden etwa 0,175. Daher würde eine aufs höchste geladene Ebene, wenn sie sich in sich selbst mit der nicht unbeträchtlichen Geschwindigkeit von 100 m in der Secunde bewegte, magnetisch ein viertausendteil von der Kraft, mit der die Erde in horizontaler Richtung in unsern Breiten wirkt, aufweisen. Das ist eine zwar geringe, aber doch messbare Kraftgrösse. Als electrisirte Fläche könnte man eine geladene, nicht leitende Scheibe verwenden, die man um eine horizontale Axe in der Ebene des magnetischen Meridians sich drehen liesse. Den Magnet, der durch seine Ablenkung die Stärke der von der Scheibe ausgeübten magnetischen Kraft messen soll, würde man, damit er von einer möglichst grossen Kraft angegriffen wird, in die Nähe des obern oder untern Teiles derselben bringen und gegen die electrostatische Wirkung der Ladung der Scheibe durch Zwischenschiebung eines breiten Metallschirmes schützen. Ich weiss nicht, ob man bisher einen solchen Versuch wirklich angestellt hat.*)

Vergleichung der Einheiten für Electricitätsmengen.

771. Da das Verhältnis der electromagnetischen zur electrostatischen Electricitätseinheit numerisch durch eine Geschwindigkeit dargestellt wird, so werde ich es hinfort durch das Zeichen v symbolisiren.

Die erste Bestimmung dieses Verhältnisses ist von Weber und Kohlrausch ausgeführt worden. Ihr Verfahren bestand darin, dass sie eine und dieselbe Menge Electricität erst electrostatisch und dann electromagnetisch massen. Die electrostatische Messung führten sie dadurch aus, dass sie das Quantum Electricität einer Leydener Flasche mitteilten. Nach frühern Sätzen ist dann die Ladung e der Flasche gleich dem Product aus ihrer

*) Das ist bekanntlich auf Helmholtz' Veranlassung seitdem (1876) durch Herrn A. Rowland mit dem erwarteten Ergebnis, dass geladene Körper durch ihre Bewegung die Eigenschaften von Strömen aufweisen, geschehen. Helmholtz: *Gesammelte Abhandlungen* 791 ff., auch *Pogg. Ann.* Bd. 158 p. 481 ff. Helmholtz nennt solche mit der ponderabeln Materie bewegte Electricität *Convectiv fortgeführte Electricität.* Anm. des Uebers.

Capacität c in die Potentialdifferenz E, die durch die Ladung ihren Belegungen mitgeteilt wird, also

$$e = Ec. \tag{1}$$

Die Capacität der Flasche wurde durch Vergleichung mit der einer aufgehängten Kugel, aus deren Nähe alle Körper möglichst entfernt worden waren, bestimmt. Da die Capacität einer Kugel electrostatisch gemessen gleich ihrem Radius ist, so konnten sie so (Art. 227) auch die ihrer Flasche ableiten.

Zur Bestimmung der Potentialdifferenz der Belegungen ihrer Flasche verbanden sie diese Belegungen mit den Electroden eines Electrometers, dessen Constanten sie vorher durch sorgfältige Untersuchung in electrostatischen Maasseinheiten kennen gelernt hatten. Um nun die Stärke der Ladung auch in electromagnetischen Maasseinheiten zu erfahren, entluden sie die Flasche durch ein Galvanometer. Wie wir in Art. 748 gesehen haben, erteilt jede plötzliche Entladung durch ein Galvanometer dem Magnete desselben eine von ihrer Stärke abhängige Winkelgeschwindigkeit. Der Magnet verlässt deshalb seine Gleichgewichtslage und entfernt sich von derselben so weit, als es ihm die retardirende Wirkung der erdmagnetischen Horizontalintensität gestattet. Die Electricitätsmenge Q, die die Entladung mit sich führte, wird nach Art. 748 in electromagnetischen Einheiten gemäss der Formel

$$Q = \frac{H}{G}\frac{T}{\pi} 2 \sin\frac{\vartheta}{2} \tag{2}$$

berechnet. Darin ist

- H die erdmagnetische Horizontalintensität und nach den im siebenten Capitel des dritten Teiles gegebenen Anleitungen zu bestimmen,
- G die in Art. 700 mit G_1 bezeichnete Hauptconstante des Galvanometers,
- T die auf unendlich kleine Bogen reducirte Dauer einer einfachen Schwingung des Magnets,
- ϑ die erste Deviation, die die Entladung dem Magnete erteilt.

In dieser Weise fanden Weber und Kohlrausch

$$v = 310\,740 \text{ km per Secunde.}$$

Die unter dem Namen electrische Absorption bekannte Eigenschaft der festen Dielectrica setzt der genauen Bestimmung der Capacität einer Leydener Flasche grosse Hindernisse entgegen. In der Tat zeigt sich in Folge derselben die scheinbare Capacität als Function der Zeit, die man zwischen dem Laden oder Entladen und dem Messen des Potentials verstreichen lässt; je länger diese Zeit ist, um so grösser fällt der Wert, den man für die Capacität der Flasche erhält, aus. Da nun die Dauer, die eine Potentialbestimmung für sich in Anspruch nimmt, immer gross gegen die

während welcher die vollständige Entladung durch das Galvanometer geschieht, sein muss, so wird wahrscheinlich die electrostatische Messung im Verhältnis zur electromagnetischen ein zu hohes Resultat geliefert haben. Die von Weber und Kohlrausch für v gefundene Zahl wird also vermutlich etwas zu gross sein.

Vergleichung der Einheiten für die electromotorische Kraft.

772. In einer electromagnetischen Einheit der electromotorischen Kraft sind $1/v$ electrostatische Einheiten dieser Grösse enthalten. Da v die schon behandelte, als Geschwindigkeit sich darstellende Reductionszahl ist, so könnte man mit Hilfe der in den vorangehenden Artikeln schon erhaltenen Resultate auch für die electromotorische Kraft das Verhältnis ihrer electromagnetischen zu ihrer electrostatischen Einheit ableiten. Man kennt aber auch directe Methoden zur Auffindung dieses Verhältnisses.

Thomsons Methode. In der Thomsonschen Methode lässt man einen constanten Strom durch einen Draht von grossem Widerstande fliessen.

Verbindet man die Enden dieses Drahtes mit den bezüglichen Electroden eines Electrometers, so erhält man nach den im 13. Capitel des zweiten Teiles gegebenen Anleitungen unmittelbar die zwischen diesen Punkten herrschende, den Strom durch den Draht treibende electromotorische Kraft in electrostatischen Maasseinheiten. Um sie auch in electromagnetischen Maasseinheiten zu bekommen, bedient man sich des Ohmschen Gesetzes. Nach diesem ist nämlich die electromotorische Kraft, die einen Strom durch einen bestimmten Draht treibt, gleich der Intensität, mit der der Strom durch den Draht geht, multiplicirt mit dem Widerstande dieses Drahtes. Bestimmt man also mit einem in den Stromkreis eingeschalteten Electrodynamometer die Stärke des den Draht durchziehenden Stromes und mit einem Ohm (der electromagnetischen Widerstandseinheit) den Widerstand des Drahtes, so giebt das Product der so erhaltenen Zahlen den Wert der den Strom durch Draht treibenden electromotorischen Kraft in electromagnetischen Maasseinheiten. Das Verhältnis dieses zu dem schon eruirten Werte in electrostatischen Maasseinheiten giebt die Reductionszahl $1/v$ oder das Reciproke der kritischen Geschwindigkeit.

Offenbar hat man zwei Kräfte, die am Electrometer und die am Electrodynamometer ausgeübte, zu messen. Im Resultat erscheint jedoch nur der Quotient aus diesen Kräften.

Da nun dieser Quotient eine Zahl sein muss, so folgt, dass die Reductionszahl v in dieser Methode als Widerstand bestimmt wird. In der Tat ist auch der Widerstand eines Leiters electromagnetisch gemessen von den Dimensionen einer Geschwindigkeit.

773. Methode von Thomson und Maxwell. In der zweiten, vom Verfasser angewendeten Methode misst man die genannten Kräfte nicht direct, sondern lässt sie sich gegenseitig in ihren Wirkungen aufheben.

Man verbindet die bezüglichen Enden einer in einen Stromkreis eingeschalteten Rolle von bedeutendem Widerstande mit zwei parallelen, einander gegenüberstehenden Scheiben, von denen eine sich senkrecht gegen ihre Fläche verschieben lässt. Würden sich die beiden Scheiben berühren, so könnte der Strom die Rolle durchfliessen, da das nicht der Fall ist, so ladet er sie, und die beiden Scheiben ziehen infolge der Differenz ihrer Potentiale einander an. Man befestigt nun an den von einander abgewandten Seiten derselben zwei andere Rollen und schickt durch diese einen andern Strom nach entgegengesetzten Richtungen. Dem Ampèreschen Gesetz zufolge, werden sich dann die Rollen abstossen, daher die beiden Scheiben, mit denen sie rigid verbunden sind, auseinanderzuziehen suchen. Hier wirkt also die electrodynamische Abstossungskraft der Rollen der electrostatischen Anziehungskraft der Scheiben entgegen. Ein Beobachter verschiebt nun die bewegliche Scheibe so lange gegen die feste, bis ihre Anziehung gegen diese von der Abstossung der an ihr befestigten Rolle gegen die mit der festen verbundene ganau äquilibrirt wird, der andere bestimmt inzwischen mit Hilfe eines Differentialgalvanometers das Verhältnis, in dem die Stärke des die Scheiben durch die grosse Rolle ladenden zu der des die an den bezüglichen Scheiben festgemachten Rollen durchfliessenden Stromes steht.

Diese Methode verlangt also weder bei der Potentialdifferenz noch bei der Stromstärke absolute Messungen, sie verlangt nur relative Bestimmungen, die genannten Grössen können also beliebig in irgend einer Einheit ausgedrückt werden. Sie setzt aber voraus, dass man den Widerstand der Rolle, durch welchen die Scheiben geladen werden, etwa durch Vergleichung mit einem Ohm, in electromagnetischen Maasseinheiten kennt.

Die Anziehung der Scheiben gegen einander hängt von dem Quadrate des Quotienten aus ihrem (als gleich vorausgesetzten) Durchmesser in den Abstand ihrer Ebenen ab.

Die Abstossung der Rollen wird durch den Quotienten aus dem Durchmesser ihrer (als gleich weit vorausgesetzten) Mittelwindungen in den Abstand der Ebenen dieser Mittelwindungen bestimmt.

Das Verhältnis, in dem die beiden einander entgegenwirkenden Kräfte stehen, ist das der Gleichheit.

Das Verhältnis, das zwischen den Stärken der angewandten Ströme waltet, wird durch Vergleichung der Widerstände eruirt, die in den bezüglichen Zweigen des Differentialgalvanometers herrschen, wenn bei gleichzeitiger Applicirung beider Ströme seine Nadel aus ihrer Ruhelage nicht heraustritt (Art. 346).

Hiernach wird v direct in Einheiten des Widerstandes der grossen, die Scheiben ladenden Rolle, der seinerseits in Ohms ausgedrückt ist, gemessen.

Thomson*) hat so für v den Wert 28,2 Ohm gefunden, ich**) selbst erhielt 28,8 Ohm.

*) *Rep. of B. A.* 1869 p. 434.
**) *Phil. Trans.* 1868 p. 643, und *Rep. of B. A.* 1869 p. 436.

Vergleichung der Einheiten für die Capacität.

774. In electromagnetischen Einheiten kann die Capacität eines Condensators dadurch bestimmt werden, dass man die electromotorische Kraft, die ihn ladet, und die Electricitätsmenge, die bei seiner Entladung entströmt, mit einander vergleicht.

Man schaltet eine Rolle von grossem Widerstande in den Stromkreis einer Voltaschen Batterie ein und verbindet ihre Electroden mit denen des Condensators.

Bezeichnet dann Q die Electricitätsmenge, mit der der Condensator geladen wird, E die Potentialdifferenz seiner Belegungen, die mit der der Electroden der Rolle identisch ist, und C seine Capacität, so hat man

1') $$C=\frac{Q}{E}.$$

Q und E sind beide in electromagnetischen Maasseinheiten zu bestimmen.

Sei R der in electromagnetischen Maasseinheiten gemessene Widerstand der Rolle, γ die Stärke des diese durchziehenden Stromes, dann ist nach dem Ohmschen Gesetz

$$\gamma=\frac{E}{R}.$$

Giebt aber φ die Ablenkung, die der Strom γ in einem Galvanometer hervorbringt, so hat man nach Art. 742

$$\gamma=\frac{H}{G}\operatorname{tg}\varphi,$$

wo H die erdmagnetische Horizontalintensität, G die Hauptconstante des strommessenden Galvanometers bedeutet. Also wird

a) $$E=R\frac{H}{G}\operatorname{tg}\varphi.$$

Zur Bestimmung von Q entladen wir den Condensator. Wir lösen erst seine und dann des strommessenden Galvanometers Verbindung mit dem Stromkreis, warten bis die Nadel sich völlig in ihre Ruhelage begeben hat, und verbinden die Electroden des Condensators mit denen des Galvanometers. Der Condensator entladet sich dann plötzlich durch das Galvanometer und versetzt der Nadel desselben einen Stoss, der sie um einen bestimmten Winkel aus ihrer Ruhelage dreht. Ist ϑ die Grösse dieses Winkels, so hat man nach Art. 748

b) $$Q=\frac{H}{G}\frac{T}{\pi}2\sin\frac{\vartheta}{2},$$

und damit wird

1) $$C_m=\frac{T}{\pi}\frac{1}{R}\frac{2\sin\frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Hiernach ist die Capacität eines Condensators, electromagnetisch gemessen, durch die folgenden Grössen bestimmt*):

T die Dauer einer einfachen Schwingung der Nadel des strommessenden Galvanometers.

R der Widerstand der Rolle.

φ die Ablenkung der Galvanometernadel aus ihrer Ruhelage durch den in der Rolle fliessenden Strom.

ϑ die durch den Entladungsstoss hervorgebrachte erste Ablenkung der Galvanometernadel aus ihrer Ruhelage.

Wie man die Capacität des Condensators in electrostatischen Einheiten misst, habe ich im ersten Teile dieses Werkes (Art. 226 ff.) auseinandergesetzt. Ist aber C_s die electrostatisch gemessene Capacität des Condensators, so hat man nach Art. 628

$$C_s = v^2 C_m, \tag{2'}$$

also

$$v^2 = \pi R \frac{C_s}{T} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}}. \tag{3}$$

Die letzte Gleichung lehrt, wie man auch durch electrostatische Capacitätsmessungen, in Verbindung mit electromagnetischen Widerstandsbestimmungen, die kritische Geschwindigkeit zu eruiren vermag. Uebrigens wird, weil v nur von der Quadratwurzel von R abhängt, bei dieser Methode ein Fehler in der Widerstandsbestimmung den Wert von v nicht so stark wie bei der vorangehenden in den Artt. 772, 773 beschriebenen verfälschen.

Für die Bestimmung der Capacität in electromagnetischen Einheiten besitzt man noch eine andere Methode.

775. Bestimmung durch continuirliche Ladung und Entladung des Condensators. Bricht man den Schliessungsdraht eines Stromkreises an einer Stelle entzwei und verbindet die getrennten Enden mit den bezüglichen Electroden eines Condensators, so fliesst der Strom in die Belegungen dieses hinein. Seine Stärke nimmt aber, je weiter die Potentialdifferenz des Condensators ansteigt um so mehr ab, und wenn der letztere die ihm bei der ladenden electromotorischen Kraft und seiner Capacität zukommende Electricitätsmenge in sich aufgenommen, hört der Strom ganz zu fliessen auf.

Trennt man jetzt die Electroden des Condensators von den Drahtenden und verbindet sie in umgekehrter Reihe mit denselben, so entladet sich der Condensator durch den Schliessungsdraht und ladet sich zugleich wieder, aber diesmal in entgegengesetzter Richtung wie früher. Hiernach fliesst

*) Der beschriebenen Methode hat sich Fleeming Jenkin (*Rep. B. A.* 1867) bei directen Messungen der Capacität von Condensatoren in electromagnetischen Maasseinheiten bedient.

bei der zweiten Operation durch den Schliessungsdraht ein vorübergehender Strom, der an Electricität im Ganzen zwei Ladungen des Condensators mit sich fortführt.

Eine besondere mechanische Einrichtung, der *Commutator* oder die *Wippe*, gestattet die Umkehrungen der Verbindungen des Condensators mit den Electroden der Batterie in gleichen Zeitintervallen beliebig oft zu wiederholen. Lässt man zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umkehrungen so viel Zeit verfliessen, dass der Condensator sich vollständig zu entladen vermag, so wird die ganze in dem Schliessungsdraht inzwischen fortgeführte Electricitätsmenge gleich $2EC$ sein, wenn E die Potentialdifferenz der Belegungen des Condensators, C seine Capacität bedeutet.

Das successive Laden und Entladen des Condensators wird im Schliessungsdraht eine besondere Strömung constituiren, die man auch zu messen vermag. Man schaltet nämlich in den Schliessungsdraht ein Galvanometer ein, dessen Nadel man so stark beschwert hat, dass viele Ladungen und Entladungen vor sich gehen, ehe sie nur eine freie Schwingung vollführt. Die sich folgenden Entladungen (verbunden mit gleichzeitigen Ladungen) wirken dann auf die Nadel zusammen, wie ein stationärer Strom, dessen Stärke

$$1_1)\qquad \gamma = \frac{Q}{\theta} = \frac{2EC}{\theta}$$

ist, wenn θ die Dauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umlegungen der Wippe bedeutet. Hat man den Winkel, um welchen die Nadel unter diesen Umständen aus ihrer Ruhelage abgelenkt wird, bestimmt, so lässt sich in bekannter Weise γ, also auch $2EC/\theta$ berechnen.

Nun entfernen wir den Condensator und schalten an seine Stelle in den Schliessungskreis eine Rolle ein, deren Widerstand wir so justiren, dass die Nadel des Galvanometers von dem jetzt regelmässig fliessenden Strome um denselben Winkel wie vorher abgelenkt wird. Die Stärke des Stromes ist dann ebenso gross wie früher, wir haben also, wenn R den Widerstand der ganzen Strombahn angiebt,

$$\frac{E}{R} = \frac{2EC}{\theta},$$

also

$$2_1)\qquad R = \frac{\theta}{2C},$$

oder

$$3_1)\qquad C = \frac{\theta}{2R}.$$

Die Verbindung eines Condensators mit einer gleichförmig tätigen Wippe gestattet also, wenn R bekannt ist, die Capacität des Condensators in sehr einfacher Weise zu berechnen.

776. Der Widerstand R kann nach einer der in den Artt. 345 bis 357 beschriebenen Methoden mit einem Ohm verglichen werden. Es ist auch nicht nötig. dass dieser Widerstand durch einen besonderen Apparat bestimmt wird.

Man kann den Condensator sammt seiner Wippe und nachher die Widerstandsrolle in einer der Zweigleitungen eines Differentialgalvanometers (Art. 346) oder einer Wheatstoneschen Drahtcombination (Art. 347) einschalten. Hat man, zum Beispiel, die Widerstände der Zweigleitungen so eingerichtet, dass wenn der Condensator und die Wippe eingeschaltet und in Tätigkeit sind, das Galvanometer auf Null zeigt, und ersetzt man Condensator und Wippe durch eine Rolle, deren Widerstand R_1 so justirt ist, dass das Galvanometer auch jetzt noch auf Null weist, so wird die Grösse $\theta/2C$ durch den Widerstand R_1 zusammen mit dem Widerstand des ganzen übrigen Leitersystems, einschliesslich dem der Batterie gemessen. Hiernach ist der zu berechnende Widerstand R gleich R_1 vermehrt um den Widerstand des ganzen übrigen Leitersystems, einschliesslich der Batterie. Als Electroden des ganzen Systems gelten dabei die Electroden der Rolle vom Widerstande R_1. Verwendet man übrigens zu einem solchen Experiment ein Differentialgalvanometer oder eine Wheatstonesche Drahtcombination, so braucht man nach Ausschaltung des Condensators keine weitern Operationen, also keine Einschaltung der Rolle R_1 vorzunehmen, da man den Widerstand, den diese Rolle haben muss, damit das Galvanometer bei ihrer Einschaltung immer noch auf Null zeigt, aus den als bekannt vorausgesetzten andern Widerständen des ganzen Stromsystems zu berechnen vermag.

Ich beziehe mich auf die in Art. 347 gegebene schematische Darstellung der Wheatstoneschen Drahtcombination, benutze auch die daselbst eingeführten Symbole. Der Condensator und die Wippe sollen die Stelle des Leiters AC einnehmen, wo auch, wenn es nöthig wäre, der Widerstand R_1 eingeschaltet werden müsste, das Galvanometer befinde sich in der Leitung DA.

Zeigt das Galvanometer auf Null, so ist

$$4_1)\qquad R_1 = b = \frac{c\gamma}{\beta}.$$

Der zweite Teil R_2 des Widerstandes, der zusammen mit R_1 den gesuchten Widerstand R ergiebt, gehört dem System der Leiter AD, DC, AB, BC, DB an, wobei die Punkte A und C als Electroden gelten. Daher haben wir

$$4_2)\qquad R_2 = \frac{\beta(c+a)(\gamma+\alpha) + ca(\gamma+\alpha) + \gamma\alpha(c+a)}{(c+a)(\gamma+\alpha) + \beta(c+a+\gamma+\alpha)}.$$

a, der Widerstand der Batterie sammt ihren Schliessungen, kann zwar nicht mit genügender Genauigkeit eruirt werden, wird aber, wenn die andern Widerstände nur gehörig gross gewählt werden, den Wert von R_2 nur wenig influiren.

Für die Capacität des Condensators haben wir aber in electromagnetischen Maasseinheiten

$$3_2)\qquad C = \frac{\theta}{2(R_1 + R_2)}.$$

777. Es kommt vor, dass ein Condensator eine so grosse Capacität besitzt, dass er sich zwischen den einzelnen rasch auf einander folgenden Umlegungen der Wippe nicht völlig zu entladen vermag.

Ist dann zur Zeit t die Potentialdifferenz seiner Belegungen gleich E_1, so hat man nach dem Ohmschen Gesetz für die Stärke des Entladungsstromes

$$-(E - E_1) = R_2 \frac{dQ}{dt}$$

oder

$$CE - CE_1 + CR_2 \frac{dQ}{dt} = 0.$$

$+ CE_1$ ist aber die Electricitätsmenge, die der Condensator bis zu dieser Zeit entladen hat, also die Grösse, die wir mit Q bezeichnet haben. Daher wird

$$1')\qquad Q + CR_2 \frac{dQ}{dt} + CE = 0.$$

Darin ist C die Capacität des Condensators, Q die Entladung, R_2 der Widerstand aller zwischen seinen Electroden vorhandenen, die Batterie enthaltenden Schliessungsteile und E die electromotorische Kraft, die die Batterie für sich auf seinen Belegungen hervorruft.

Die Integration der abgeleiteten Gleichung ergiebt

$$Q = (Q_0 + EC)\, e^{-\frac{t}{R_2 C}} - EC,$$

wenn mit Q_0 der Wert, den Q zu Anfang der Zeit t hat, bezeichnet wird.

Hieraus erhält man für die gesammte während einer Contactdauer τ entladene Electricitätsmenge

$$1\,a)\qquad Q = 2EC \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{R_2 C}}}{1 + e^{-\frac{\tau}{R_2 C}}}.$$

Indem man die beiden im vorangehenden Artikel definirten Widerstände c und γ gegen β, a oder α gehörig gross wählt, vermag man die Zeitgrösse $R_2 C$ gegen τ so klein zu machen, dass man bei der Ausrechnung der Exponentialfunction $e^{-\tau/R_2 C}$ für C den durch die Gleichung 3_2) bestimmten Wert benutzen und

$$\frac{\tau}{R_2 C} = 2\frac{R_1 + R_2}{R_2}\frac{\tau}{\theta}$$

setzen darf. Man erhält dann

$$1\text{b)}\qquad Q = 2EC\frac{1 - e^{-2\frac{R_1 + R_2}{R_2}\frac{\tau}{\theta}}}{1 + e^{2\frac{R_1 + R_2}{R_2}\frac{\tau}{\theta}}},$$

somit für die Capacität

$$3\text{a)}\qquad C = \frac{1}{2}\frac{Q}{E}\frac{1 - e^{-2\frac{R_1 + R_2}{R_2}\frac{\tau}{\theta}}}{1 + e^{-2\frac{R_1 + R_2}{R_2}\frac{\tau}{\theta}}}.$$

Q/E ist aber wegen der Gleichungen 1_1) und 3_2) nahezu gleich $\theta/(R_1 + R_2)$, somit

$$3\text{b)}\qquad C = \frac{1}{2}\frac{\theta}{R_1 + R_2}\frac{1 - e^{-2\frac{R_1 + R_2}{R_2}\frac{\tau}{\theta}}}{1 + e^{-2\frac{R_1 + R_2}{R_2}\frac{\tau}{\theta}}}.$$

Das ist die corrigirte Gleichung für C. R_1 bezeichnet den Widerstand, den man an Stelle des Condensators sammt Wippe einzuschalten hat, wenn der Strom mit derselben Stärke wie vorher fliessen soll. R_2 ist der Widerstand des ganzen Schliessungskreises, abzüglich des Condensators und der Wippe. θ ist die Zeit, die zwischen dem Anfang einer Entladung und dem Beginn der nächstfolgenden verfliesst, τ endlich bedeutet die Dauer eines Contacts, während dessen die Entladung vor sich geht.

Bestimmung des Verhältnisses der Capacität eines Condensators zu der electromagnetischen Capacität der Selbstinduction einer Rolle.

778. Vergleichung mit der electromagnetischen Capacität des Condensators. Verbindet man zwei Punkte eines Schliessungsdrahtes mit den Electroden eines Condensators, so wird ein Teil des Stromes einer den Schliessungskreisen angehörenden Batterie, statt das zwischen den gedachten Punkten befindliche Drahtstück zu durchziehen, zur Ladung des Condensators verwendet werden. Je weiter diese Ladung vorgeschritten ist, um so geringer wird dieser anderweitig benutzte Teil des Stromes sein, der Strom steigt in dem Drahtstück ganz allmälig von Null bis zu der ihm nach den Verhältnissen zugehörenden Stärke an. Die mathematische Theorie lehrt nun, dass die Formel, welche das Ansteigen der Stromstärke in dem Drahtstück zur Darstellung bringt, in diesem Fall genau so gebaut ist, wie in dem, wo zwischen den beiden Enden des Drahtstückes statt des Condensators die Rolle eines Electromagnets eingeschaltet ist. Verbindet man also

einen Zweig einer Wheatstoneschen Brücke mit einem Condensator, den ihm gegenüberstehenden mit der Rolle eines Electromagnets, so wird man immer die Widerstände so zu justiren vermögen, dass im Brückendraht zu keiner Zeit — auch dann nicht einmal, wenn der Strom geöffnet oder geschlossen wird — ein Strom zur Anzeige kommt.

Es seien — Fig. 64 — P, Q, R, S die bezüglichen Widerstände der vier Zweige einer Wheatstoneschen Brücke. Ich schalte eine Rolle, deren Coefficient der Selbstinduction gleich L ist, in den Zweig AH vom Widerstande Q ein und verbinde die Electroden eines Condensators von der Capacität C durch dicke Metallstücke von geringem Widerstande mit den bezüglichen Enden F und Z des dem Drahte AH gegenüberstehenden Drahtes FZ vom Widerstande R. FH ist der Brückendraht und enthält ein Galvanometer G. AZ ist eine Zweigleitung, in welche die Batterie B eingeschaltet ist.

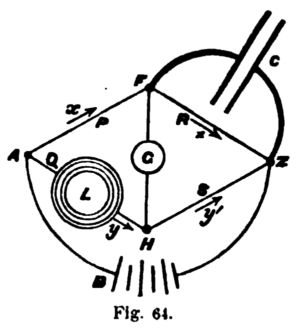


Fig. 64.

Soll nun das Galvanometer G zu keiner Zeit, sei es, dass man den Strom der Batterie fliessen lässt, sei es, dass man ihn unterbricht oder schliesst, einen Strom anzeigen, so müssen die Potentiale in den Enden F und H des Brückendrahtes einander gleich sein. Wir haben zunächst zuzusehen, wann das geschieht, und dann zur Abschätzung der Sicherheit, die die Methode gewährt, die Stärke des eventuell das Galvanometer durchfliessenden Stromes zu bestimmen.

Ich bezeichne mit x die gesammte Electricitätsmenge, die bis zur Zeit t durch den Zweig AF hindurchgeflossen ist; giebt dann z die entsprechende Grösse für den Zweig FZ, so haben wir in $x - z$ die Ladung, die der Condensator zur Zeit t besitzt. Da nun dz/dt die Stärke des durch FZ zur Zeit t fliessenden Stromes ist, so ergiebt sich nach dem Ohmschen Gesetz für die zwischen den Electroden des Condensators zur Zeit t wirkende electromotorische Kraft

1') $$E_1 - E_2 = R\frac{dz}{dt},$$

also, weil

a) $$C(E_1 - E_2) = x - z$$

ist,

1) $$x - z = RC\frac{dz}{dt}.$$

Das gilt für den Zweig, in den der Condensator eingeschaltet ist. Sei nun y die gesammte Electricitätsmenge, die bis zur Zeit t den die Rolle enthaltenden Zweig AH durchflossen hat, die electromotorische Kraft, die zwischen A und H wirkt, ist dann nach Art. 581

2') $$E_1' - E_2' = Q\frac{dy}{dt} + L\frac{d^2y}{dt^2},$$

und da diese electromotorische Kraft, wenn das Galvanometer zu keiner Zeit einen Strom zur Anzeige soll bringen können, gleich der von A nach F wirkenden sein muss, so haben wir

$$P\frac{dx}{dt} = Q\frac{dy}{dt} + L\frac{d^2y}{dt^2}. \tag{2}$$

Die Gleichungen 1) und 2) enthalten drei unbekannte Grössen x, y, z, wir brauchen also noch eine Gleichung, diese wird aber durch die Bedingung, dass, wenn das Galvanometer G keinen Strom anzeigen soll, auch die zwischen H und Z und F und Z wirkenden electromotorischen Kräfte einander gleich sein müssen, geliefert. Wir erhalten so zuvörderst

$$S\frac{dy'}{dt} = R\frac{dz}{dt}. \tag{3'}$$

Der Strom fliesst durch den Brückendraht nicht, er geht also durch den an AH sich anschliessenden Zweig HZ mit derselben Stärke y, mit der er AH durchzieht, somit wird

$$y' = y \tag{b}$$

und

$$S\frac{dy}{dt} = R\frac{dz}{dt}. \tag{3}$$

Eliminirt man aus den drei Gleichungen 1) bis 3) x und y und integrirt die entstehende Differentialgleichung zweiter Ordnung für z, so resultirt

$$RQ\left(z + \frac{L}{Q}\frac{dz}{dt}\right) = SP\left(z + RC\frac{dz}{dt}\right). \tag{4}$$

Nun ist die Bedingung dafür, dass in dem Brückendraht ein die Zweige durchfliessender Strom nicht zur Anzeige kommen soll,

$$RQ = SP. \tag{5}$$

Die Gleichung 4) lehrt also, dass wenn im Brückendraht auch keine Stromschwankungen sich bemerkbar machen sollen,

$$\frac{L}{Q} = RC \tag{6'}$$

sein muss.

Verändert man also, nachdem man die Widerstände R, Q, S, P so eingerichtet hat, dass die Bedingung 5) erfüllt ist, also ein die Drahtcombination durchfliessender constanter Strom im Galvanometer nicht zur Anzeige gebracht wird, die beiden Widerstände Q und R derartig, dass QR seinen frühern Wert beibehält, das Galvanometer aber weder beim Oeffnen noch beim Schliessen der Batterie irgendwie afficirt wird, so giebt die Gleichung

$$L = QRC \tag{6$_1$}$$

den Wert der electromagnetischen Capacität der Selbstinduction der Rolle.

Vergleichung mit der electrostatischen Capacität des Condensators. Nach Art. 774 haben wir als Beziehung zwischen der electrostatischen und electromagnetischen Capacität eines Condensators

$$C = \frac{c}{v^2},$$

daher

$$L = QR\frac{c}{v^2}. \tag{6_2}$$

Q und R sind beide Widerstände, also von den Dimensionen einer Geschwindigkeit, c hat die Dimensionen einer Linie, electromagnetisch gemessen hat also der Coefficient der Selbstinduction einer Rolle die Dimensionen einer Linie.

Schreibt man die Gleichung 6_2) in der Form

$$v^2 = \frac{c}{L}QR, \tag{7}$$

so dient sie zur Berechnung der Reductionszahl v.

c ist die electrostatisch gemessene Capacität des Condensators und kann nach den Anleitungen des Art. 229 durch Vergleichung mit einem Standard-Accumulator bestimmt werden.

L ist der electromagnetisch gemessene Coefficient der Selbstinduction der Rolle und kann nach den Anleitungen des Art. 756 durch Vergleichung mit dem Inductions-Coefficienten zweier Standard-Rollen auf einander bestimmt werden.

Q und R bedeuten beide in electromagnetischen Maasseinheiten auszudrückende Widerstände. Daher verlangt diese Methode ebenso wie die zweite, in den Artt. 772, 773 auseinandergesetzte, die Bestimmung der Widerstandseinheit.

Bestimmung des Products aus Capacität eines Condensators und Selbstinduction einer Rolle.

779. Der Apparat, dessen wir uns bei der Bestimmung des Products aus der Capacität eines Condensators und der Capacität der Selbstinduction einer Rolle zu bedienen haben, besteht aus einem Condensator, dessen Belegungen durch Vermittelung eines geeignet gebogenen Drahtes mit zwei Rollen L und L' verbunden sind. Wie die umstehende Figur 65 lehrt, hängt die Rolle L' bifilar von dem Drahte herab, die Rolle L ist dagegen festgelegt. Erstere besteht aus zwei parallel gestellten Teilen, zwischen denen eine Axe vertical hindurch geht. Auf der genannten Axe ist ein Magnet M horizontal befestigt, dreht man also diese Axe mit Hilfe eines Schnurlaufs, so rotirt der Magnet in einer Horizontalebene. Damit die durch die Rotation des Magnets verursachten Luftströme auf die Rolle L'

kein Bewegungsmoment ausüben, umgiebt man den Magnet und alle mit ihm sich drehenden Teile mit einem kleinen Gehäuse.

Während der Magnet sich dreht, bringt er in der Rolle L' Inductionsströme hervor und da, sowie diese Ströme auftreten, zwischen ihnen und dem Magnete eine ponderomotorische Wechselwirkung eintritt, so wird dem Lenzschen Gesetze zufolge die Rolle um die Verticalaxe in Richtung der Drehung des Magnets abgelenkt. Wir haben nun die Stärke der inducirten Ströme und die Grösse der Ablenkung, die die bewegliche Rolle erfährt, zu bestimmen.

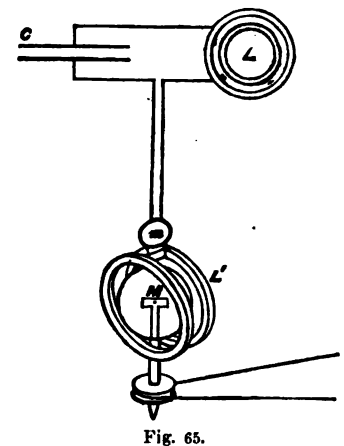


Fig. 65.

Die inducirten Ströme verbreiten sich durch den ganzen Schliessungskreis und laden auch den Condensator. Bezeichnet nun x die Ladung, die die obere Belegung des letztern zur Zeit t besitzt, und giebt E die electromotorische Kraft, die ihm diese Ladung mitteilt, so haben wir als erste Gleichung

a) $$x = CE.$$

Ferner folgt aus Art. 582

b) $$R\dot{x} + \frac{d}{dt}(L\dot{x} + M\cos\vartheta) + E = 0,$$

wenn R den Widerstand des ganzen mit den Electroden des Condensators verbundenen Schliessungskreises, L die Summe der Coefficienten der Selbstinduction der beiden Rollen L und L' angiebt und M das electromagnetische Moment der Rolle L', wenn ihre Axe mit der Axe des Magnets zusammenfällt, $M\cos\vartheta$ also dieses Moment, wenn ihre Axe mit der des Magnets den Winkel ϑ einschliesst, bedeutet.

Aus der Combination von a) und b) folgt nunmehr

1') $$CL\frac{d^2x}{dt^2} + CR\frac{dx}{dt} + x = CM\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}.$$

ϑ hängt von der Rotation des Magnets ab, wenn diese Rotation stationär geworden ist, und der Magnet sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit n dreht, so hat man

c) $$\vartheta = nt, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = n$$

und

1) $$CL\frac{d^2x}{dt^2} + CR\frac{dx}{dt} + x = CMn\sin\vartheta.$$

Die Allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

2') $$x = ae^{-\lambda_1 t} + be^{-\lambda_2 t} + A\sin\vartheta + B\cos\vartheta.$$

a und b sind willkürliche, durch den Anfangszustand zu bestimmende Constanten, λ_1 und λ_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} = 0.$$

A und B genügen den Gleichungen

$$(1 - CLn^2)A - CRnB = CMn,$$
$$(1 - CLn_2)B + CRnA = 0.$$

Der Ausdruck für den Gesammtstrom besteht also aus zwei Teilen, der eine Teil hängt nur von den auf der linken Seite unserer Differentialgleichung stehenden Grössen ab und nimmt mit der Zeit wie eine Exponentialfunction derselben ab; der zweite Teil wird durch ϑ bestimmt und kann als durch die Rotation erzwungen angesehen werden, sein Wert ist

2₁) $$x_2 = -MCn\frac{RCn\cos\vartheta - (1 - CLn^2)\sin\vartheta}{R^2C^2n^2 + (1 - CLn^2)^2}.$$

Wenn die Rotation einige Zeit gedauert hat, ist der erste Teil fast ganz verschwunden, der zweite bleibt dann allein zu beachten.

Da ferner die Kraft, mit der der Magnet die Rolle L angreift, gleich und entgegengesetzt der Kraft sein muss, mit der er selbst von der Rolle angegriffen wird, so haben wir für das Moment Θ dieser Kraft nach Art. 583

3') $$\Theta = -\dot{x}\frac{d(M\cos\vartheta)}{d\vartheta} = M\sin\vartheta\frac{dx}{dt}.$$

Den auf eine Revolution des Magnets bezogenen mittlern Wert dieser Kraft erhält man, wenn man Θ nach t von 0 bis $2\pi/n$ integrirt und durch $2\pi/n$ dividirt. Hiernach wird dieser mittlere Wert

3₁) $$\overline{\Theta} = \frac{n}{2\pi}M\int_0^{2\pi/n}\sin\vartheta\frac{dx}{dt}dt.$$

Hat der Magnet sich schon längere Zeit bewegt, so darf man x durch x_2 ersetzen, man erhält dann

$$3_2)\qquad \Theta = \frac{1}{2}\frac{M^2RC^2n^3}{R^2C^2n^2 + (1 - CLn^2)^2}.$$

Die erzwungenen Vibrationen der Rolle um ihre Gleichgewichtslage kann man dadurch, dass man ihr ein grosses Trägheitsmoment verleiht, sehr bedeutend einschränken, die mittlere Ablenkung des Magnets wird dann dem mittlern Moment proportional sein.

Bezeichnet also D diese mittlere Ablenkung, so hat man, wenn P eine Constante bedeutet,

$$4)\qquad P\frac{n}{D} = \left(\frac{1}{n} - CLn\right)^2 + R^2C^2 = \frac{1}{n^2} + C^2L^2n^2 + (R^2C^2 - 2CL).$$

Die Gleichung enthält ausser L, C und den beobachtbaren Grössen n, D die Unbekannten P und R^2. Lässt man aber den Magnet unter denselben Umständen nach einander mit drei verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten n_1, n_2, n_3 rotiren, so hat man drei Gleichungen von der obigen Form, aus denen man durch Elimination von P und $R^2C^2 - 2CL$ erhält,

$$5)\qquad C^2L^2 = \frac{1}{n_1^2n_2^2n_3^2}\,\frac{\frac{n_1^3}{D_1}(n_2^2-n_3^2)+\frac{n_2^3}{D_2}(n_3^2-n_1^2)+\frac{n_3^3}{D_3}(n_1^2-n_2^2)}{\frac{n_1}{D_1}(n_2^2-n_3^2)+\frac{n_2}{D_2}(n_3^2-n_1^2)+\frac{n_3}{D_3}(n_1^2-n_2^2)}.$$

Das ist die Gleichung, die ich habe ableiten wollen, sie gestattet aus drei Beobachtungen an dem geschilderten Apparate das Product aus der Capacität eines Condensators und der Capacität der Selbstinduction einer Rolle (eigentlich zweier von einander entfernter Rollen) zu bestimmen.

Aus der unter 4) angegebenen Formel erhellt noch, dass n/D ein Minimum, D also ein Maximum wird, wenn man $n^2 = 1/CL$ wählt; da man eine solche specielle Wahl natürlich nur bei einer Beobachtung treffen kann, wird man $n_1^2 > 1/CL$, $n_2^2 = 1/CL$, $n_3^2 < 1/CL$ zu machen suchen.

Da die n Winkelgeschwindigkeiten bedeuten, so hat CL nach der Gleichung 5) die Dimensionen des Quadrats einer Zeit. Verstehen wir unter τ^4 den Wert des rechten Teiles der citirten Gleichung, so wird hiernach

$$CL = \tau^2$$

und τ eine Zeitgrösse.

Nun sei wie bisher c die electrostatisch gemessene Capacität des Condensators, l die electrostatisch gemessene Capacität der Selbstinduction der Rolle. Wir haben dann, weil c und L beide die Dimensionen einer Linie besitzen,

$$cL = v^2cl = v^2CL = v^2\tau^2,$$

also

$$6)\qquad v^2 = \frac{cL}{\tau^2}.$$

τ^2 ist die Wurzel der auf der rechten Seite der Gleichung 5) stehenden Grösse, also völlig durch die Beobachtungen gegeben; wie man c und L bestimmt, habe ich schon oft angedeutet. Die Gleichung 6) bietet also ein neues Hilfsmittel zur Berechnung der Reductionszahl v.

Ich habe noch zu bemerken, dass die im vorangehenden beschriebene Versuchsanordnung zur Bestimmung von v der von Grove in *Phil. Mag. March* 1868 p. 184 angegebenen ähnelt. Ferner verweise ich den Leser auf die Bemerkungen, die ich im Maiheft des genannten Journals zu derselben gemacht habe.

Widerstandsbestimmungen in electrostatischen Maasseinheiten.

780. Entladet man einen Condensator von der Capacität C durch einen Draht vom Widerstande R, so ist die Ladung, die der Condensator zur Zeit t noch besitzt, nach Art. 355 bestimmt durch

$$\frac{x}{C} + R\frac{dx}{dt} = 0.$$

Sie hat also zur Zeit t den Wert

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

woraus folgt

$$RC = \frac{t}{\log x_0 - \log x} = \frac{t}{\log E_0 - \log E_1}, \tag{1}$$

wenn E_0 die Potentialdifferenz des Condensators zur Zeit, wenn die Entladung beginnt, E_1 die, wenn sie aufhört, bedeutet.

Der Versuch wird genau wie in der in Art. 355 beschriebenen Siemensschen Anordnung durchgeführt. Man ladet den Condensator, verbindet seine Belegungen mit den Electroden eines Electrometers, misst an diesem seine Potentialdifferenz E_0, lässt ihn während der Zeit t sich durch den Draht R ganz oder zum Teil entladen und misst am Electrometer wieder seine Potentialdifferenz E_1.

Kann man also die Capacität des Condensators in electrostatischen Maasseinheiten angeben, so lehrt die Gleichung 1), wie man den Widerstand R ebenfalls in electrostatischen Maasseinheiten berechnet

Ferner sieht man, dass der so berechnete Widerstand die Dimensionen des Reciproken einer Geschwindigkeit besitzt, bezeichnet also R_m den Widerstand, den der Draht in electromagnetischen, R_s den, welchen er in electrostatischen Maasseinheiten aufweist, so ist

$$v^2 = \frac{R_m}{R_s}.$$

Die Durchführung dieses Experiments verlangt, wie schon in Art. 355 bemerkt, dass R einen sehr bedeutenden Widerstand repräsentirt, und da zu electromagnetischen Messungen mit Vorteil immer nur geringe Widerstände sich werden anwenden lassen, wird man R_m und R_s nicht gut an demselben Draht bestimmen können. Man wird vielmehr zwei Drähte verwenden, bei dem einen, der den bedeutenden Widerstand hat, die electrostatische, bei dem andern, vom geringen Widerstand, die electromagnetische Widerstandsbestimmung vornehmen und zuletzt die Widerstände der beiden Drähte mit einander nach den gewöhnlichen Methoden vergleichen.

Cap. XX.

Electromagnetische Theorie des Lichtes.

Berechtigung der Annahme eines besondern raumerfüllenden Mediums.

781. Ich habe an verschiedenen Stellen dieses Werkes die electromagnetischen Erscheinungen durch eine mechanische Einwirkung der Körper auf einander zu erklären versucht und bin dabei der Conception gefolgt, dass diese Einwirkungen von Körper zu Körper durch ein den Raum zwischen den Körpern ausfüllendes Medium fortgeleitet werden. Da nun auch die Undulationstheorie des Lichtes die Existenz eines den Raum erfüllenden Mediums annimmt, so werde ich im folgenden zu zeigen haben, dass die Eigenschaften unseres electromagnetischen Mediums mit denen des lichttragenden identisch sind.

Es wäre philosophisch nicht zu rechtfertigen, wollte man, so oft es eine neue Erscheinung zu erklären giebt, den ganzen Raum auch mit einem neuen Medium füllen, hat aber das Studium zweier verschiedener Wissenszweige unabhängig zu der Conception eines Mediums geführt und ist man zudem gezwungen, dem Medium, wenn es zur Erklärung der einen Erscheinungsclasse, der des Electromagnetismus, dienen soll, dieselben Eigenschaften, wie wenn es zum Verständnis der andern Erscheinungsclasse, der des Lichtes, benutzt wird, zuzusprechen, dann dürfte die Wahrscheinlichkeit für die physikalische Existenz eines solchen Mediums erheblich verstärkt werden.

Die Eigenschaften der Körper sind einer quantitativen Messung zugänglich, daher werden wir auch bei unserem Medium für einige seiner Eigenschaften numerische Daten zu erlangen vermögen. Man kann nun die Geschwindigkeit, mit der eine Störung sich in ihm fortpflanzt, sowohl aus electromagnetischen Experimenten berechnen, als auch direct aus der Schnelligkeit, mit der das Licht sich durch dasselbe verbreitet, ableiten. Findet sich dann, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für electromagnetische Störungen

ebenso gross wie die für Lichtschwankungen ist, und zwar nicht blos in der Luft, sondern auch in andern durchsichtigen Medien, so hat man hinreichenden Grund zu der Annahme, das Licht sei eine electromagnetische Erscheinung. Zugleich giebt die Verbindung, in die dadurch zwei sonst so distincte Erscheinungsclassen, wie die des Electromagnetismus und die der Optik zu einander treten, die Ueberzeugung von der Realität eines Mediums, das in seinen Eigenschaften der durch unsere Sinne sich uns bemerkbar machenden Materie ähnelt.

Optische und electromagnetische Eigenschaften des Mediums.

782. Schickt ein Körper Licht aus, so giebt er damit einen gewissen Betrag von Energie fort, absorbirt dann ein anderer Körper das von jenem emittirte Licht, so nimmt er, wie daraus erhellt, dass er sich dabei erwärmt, eine gewisse Menge Energie in sich auf. In dem Zeitintervall, welches zwischen der Emission des Lichtes durch den einen und seiner Absorption durch den andern Körper verfliesst, muss es also irgendwo in dem Raume, der sich zwischen den beiden Körpern erstreckt, als Energie existirt haben.

Die Emissionstheorie des Lichtes nimmt an, dass die Energie durch Lichtkörperchen, die von dem leuchtenden zu dem erleuchteten Körper wirklich übergehen, und die dabei sowohl ihre kinetische Energie als auch eine gewisse andere Art Energie, die sie in sich aufzunehmen im Stande sind, mit sich führen, übertragen wird.

Nach der Undulationstheorie des Lichtes füllt ein materielles Medium den den leuchtenden von dem erleuchteten Körper trennenden Raum, und dieses Medium ist es, welches durch die Wirkung seiner Teilchen auf einander die Energie, die der leuchtende Körper ausgiebt, von Teilchen zu Teilchen fortleitet und bis zum erleuchteten Körper hinschafft. Darnach würde also dieses Medium während des Ueberganges des Lichtes von dem einen zu dem andern Körper der Träger der Energie sein.

Was die Art der im Medium während der Fortpflanzung des Lichtes befindlichen Energie anbetrifft, so sollte sie gemäss der Entwickelung, die Huyghens, Fresnel, Young, Green, Neumann u. A. der Undulationstheorie verliehen haben, teils potentieller, teils kinetischer Natur sein. Die potentielle nahm man als durch die Verdrehung der einzelnen Teilchen des Mediums gegen einander entstanden an; hiernach würde das Medium als elastisch zu betrachten sein. Die kinetische sollte durch vibratorische, in dem Medium vor sich gehende Bewegungen wachgerufen werden; und das setzt voraus, dass das Medium eine endliche Dichtigkeit besitzt.

Auch in der Theorie der Electricität und des Magnetismus, wie sie in diesem Werke adoptirt worden ist, hat man es mit zwei Arten von Energie, der electrostatischen und der electrokinetischen, zu tun, und diese beiden Energiearten sollten ihren Sitz nicht so sehr in den electrisirten oder

magnetisirten Körpern als vielmehr in jedem Teile des diese umgebenden Raumes, wo nur die electrische oder magnetische Kraft sich in ihrer Wirkung zeigt, haben. Unsere Theorie der Electricität und des Magnetismus stimmt also mit der Undulationstheorie des Lichtes schon darin überein, dass sie die Existenz eines Mediums voraussetzt, das als Träger zweier Energieformen auftreten kann.*)

Allgemeine Gleichungen für electromagnetische Störungen in einem isotropen Medium.

783. Ich werde zunächst die Bedingungen für die Fortpflanzung electromagnetischer Störungen durch ein Medium unter den Annahmen entwickeln, dass letzteres überall von gleicher Beschaffenheit ist, und dass es ausser der Bewegung, die die electromagnetischen Störungen eventuell involviren, keine Bewegung besitzt.

Sei C die specifische Leitungsfähigkeit des Mediums, K seine specifische Capacität für electrostatische Induction, μ seine magnetische Permeabilität.

Wir drücken, um zu der allgemeinen Gleichung einer electromagnetischen Störung zu gelangen, die totale Strömung $\mathfrak{C}$ an einer Stelle des Mediums durch das daselbst herrschende Vector-Potential $\mathfrak{A}$ und electrische Potential Ψ aus.

Die totale Strömung wird erstens durch den geleiteten Strom $\mathfrak{K}$ und zweitens durch die Variation $\dot{\mathfrak{D}}$ der electrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ hervorgebracht, und da $\mathfrak{K}$ sowohl als $\mathfrak{D}$ bei isotropen Medien in der in den Artt. 608, 609 unter F_1'), G') angegebenen Weise von der localen electromotorischen Kraft $\mathfrak{E}$ abhängen, so hat man wie in Art. 611, J')

$$1'\,\text{a})\qquad \mathfrak{C} = C\mathfrak{E} + \frac{1}{4\pi} K \frac{d\mathfrak{E}}{dt}.$$

In dem Medium sollten keine Bewegungen vor sich gehen, nach Art. 599, B'd) ist also

$$\mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi$$

und in leicht verständlicher Schreibweise

$$\mathfrak{C} = -\left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \nabla\psi\right).$$

---

*) „Indem ich die Beziehungen eines Vacuums zur magnetischen Kraft, und den allgemeinen Charakter der ausserhalb des Magnets auftretenden Erscheinungen betrachte, neige ich mich meinerseits mehr der Ansicht zu, dass das Uebertragen der Kraft von Ort zu Ort eher eine ausserhalb des Magnets vor sich gehende Erscheinung ist, als dass es durch Attraction und Repulsion in die Ferne geschieht. Es kann dieses Uebertragen eine Function des Aethers sein, denn es ist nicht unwahrscheinlich, dass wenn der Aether überhaupt existirt, er auch noch zu andern Tätigkeiten als blos zum Fortleiten von Strahlungen herangezogen werden dürfte.“ Faraday *Exp. Res.* 3075.

Wir haben aber zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ noch eine andere Beziehung. Nach Art. 616 ist nämlich

$$4\pi\mu\mathfrak{C} = \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla J,$$

wo

$$J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}$$

zu setzen ist. Daher wird

$$\text{1'b)} \qquad \mu\left(4\pi C + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \nabla\Psi\right) + \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla J = 0.$$

Die Wahl der Coordinatenaxen ist ganz unserm Belieben anheimgegeben, deshalb zerfällt die Gleichung 1'b) in die drei Formeln

$$\text{1)} \qquad \begin{aligned} \mu\left(4\pi C + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \nabla^2 F + \frac{\partial J}{\partial x} &= 0, \\ \mu\left(4\pi C + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \nabla^2 G + \frac{\partial J}{\partial y} &= 0, \\ \mu\left(4\pi C + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) + \nabla^2 H + \frac{\partial J}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Das sind die drei allgemeinen Gleichungen, denen die electromagnetischen Störungen in einem unbewegten isotropen Medium folgen.

Differenzirt man sie bezüglich nach x, y, z und addirt die Resultate, so wird, weil alle Glieder in

$$\nabla(\nabla^2\mathfrak{A}) - \nabla^2 J$$

sich aufheben, und x, y, z von t nicht abhängen,

$$\text{2)} \qquad \mu\left(4\pi C + K\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial J}{\partial t} - \nabla^2\Psi\right) = 0.$$

Bei einem nichtleitenden Medium ist $C = 0$, und $\nabla^2\Psi$, welches der Raumdichte der an der betrachteten Stelle befindlichen Electricität proportional ist, mit t nicht variabel, daher

$$\text{2}_1\text{)} \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0.$$

J ist also dann entweder eine lineare Function von t, oder eine Constante, oder gänzlich gleich Null. Hiernach würden J und Ψ beide bei der Verfolgung periodischer electromagnetischer Störungen in einem Nichtleiter keine Rolle spielen.

Fortpflanzung von Schwingungen in einem Nichtleitenden Medium.

784. Bei einem Nichtleitenden Medium ist, wie bemerkt, $C=0$ und

$$
1)\qquad
\begin{aligned}
K\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+\nabla^2 F&=0,\\
K\mu\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}+\nabla^2 G&=0,\\
K\mu\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}+\nabla^2 H&=0.
\end{aligned}
$$

In dieser Form ähneln unsere Gleichungen für die electromagnetischen Störungen denen für die Bewegung eines elastischen festen Körpers. Sind die Anfangsbedingungen gegeben, so kann ihre Lösung in der von Poisson*) beschriebenen und von Stokes**) bei der Theorie der Beugung angewendeten Form ausgeführt werden.

Ich setze

$$
2)\qquad V=\frac{1}{\sqrt{K\mu}}
$$

und nehme an, dass F, G, H, sowie die Derivirten $\partial F/\partial t$, $\partial G/\partial t$, $\partial H/\partial t$ für eine bestimmte Epoche, für $t=0$, in allen Punkten des Mediums gegeben sind.

Sei O die Stelle des Mediums, für welche der Wert einer der drei Grössen, etwa F, zur Zeit $t=t$ gesucht wird. Man schlägt von O als Mittelpunkt eine Kugelfläche vom Radius Vt, bestimmt für jeden Punkt der Kugelfläche den Wert, den F zur Zeit $t=0$ daselbst besitzt, und bildet aus allen der Kugelfläche zu dieser Zeit zugehörigen Werten des F einen mittlern Wert $\overline{F}$ für F. Hierauf bestimmt man für jeden Punkt der genannten Kugelfläche auch den zur Zeit $t=0$ ihm zugehörigen Wert von $\partial F/\partial t$ und bildet wiederum aus allen der Kugelfläche zu dieser Zeit zugehörigen Werten den Mittelwert $\overline{\partial F/\partial t}$.

Verfährt man ebenso mit G und H, so hat man zur Zeit t im Punkte O

$$
3)\qquad
\begin{aligned}
F&=\frac{\partial}{\partial t}(\overline{F}t)+t\,\overline{\frac{\partial F}{\partial t}},\\
G&=\frac{\partial}{\partial t}(\overline{G}t)+t\,\overline{\frac{\partial G}{\partial t}},\\
H&=\frac{\partial}{\partial t}(\overline{H}t)+t\,\overline{\frac{\partial H}{\partial t}}.
\end{aligned}
$$

*) *Mém. de l'Acad.* Tome III., p. 130.
**) *Cambridge Transactions*, vol. IX., p. 10 (1850).

785. Hiernach würde der Zustand, in dem die Stelle O des Mediums sich zur Zeit t befindet, von dem Zustand, der an allen um die Strecke Vt von ihr entfernten Stellen zu einer um das Zeitintervall t voraufgegangenen Zeit $t = 0$ herrschte, bestimmt werden. V drückt also die Geschwindigkeit aus, mit der die betreffende Störung sich fortgepflanzt hat.

Zur Specialisirung des Anfangszustandes nehme ich an, dass zur Zeit $t = 0$, die beiden Grössen $\mathfrak{A}$ und $\dot{\mathfrak{A}}$ nur innerhalb eines bestimmten Gebietes S von Null verschiedene Werte haben sollen. Dem obigen zufolge werden dann diese Grössen in O zur Zeit $t = t$ nur dann einen von Null verschiedenen Wert besitzen, wenn die um O mit dem Radius Vt geschlagene Kugelfläche das Gebiet S ganz oder doch zum Teil einschliesst. Liegt O ausserhalb des Gebietes S, so wird die Störung in O nicht eher auftreten, als bis Vt der kürzeste Abstand zwischen O und S geworden ist. Sobald Vt den Wert dieses kürzesten Abstandes erreicht hat, beginnt die Störung sich auch in O bemerkbar zu machen, und sie dauert daselbst so lange fort, bis Vt gleich dem Abstande der Stelle O von dem am weitesten von ihr abliegenden Teile von S geworden ist. Hat Vt diesen grössten Wert erreicht, so schwindet die Störung in O für immer.

Lichtgeschwindigkeit und electrostatische und magnetische Capacität.

786. Nach der Gleichung 2) in Art. 784 ist die Geschwindigkeit, mit der electromagnetische Störungen sich in einem Nichtleiter fortpflanzen,

$$1)\qquad V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}.$$

Für Luft ist unter Benutzung des electrostatischen Maasssystems

$$K = 1\,,\ \mu = \frac{1}{v^2}\,,$$

also

$$2_1)\qquad V = v.$$

Die genannte Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird hiernach in Luft numerisch gleich der Anzahl electrostatischer Electricitätseinheiten, die eine electromagnetische Electricitätseinheit in sich fasst.

Im electromagnetischen Maasssystem ist

$$K = \frac{1}{v^2}\,,\ \mu = 1\,,$$

also wiederum

$$2_2)\qquad V = v.$$

Geht man von der Theorie aus, dass das Licht eine electromagnetische Störung ist, die durch dasselbe Medium, durch welches auch die andern electromagnetischen Wirkungen sich ausbreiten, fortgepflanzt wird, so muss V so gross sein, wie die Geschwindigkeit des Lichtes, die man schon nach vielen rein optischen Methoden bestimmt hat. Andererseits ist die V gleich sein sollende Grösse v, also die Anzahl electrostatischer Electricitätseinheiten, die eine electromagnetische Electricitätseinheit in sich fasst, nach mehreren im vorangehenden Capitel beschriebenen Methoden durch rein electromagnetische Experimente eruirbar. Man hat also zwei ganz verschiedene Wege zur Bestimmung zweier sich gleich sein sollender Grössen, und darum wird die Uebereinstimmung, bezüglich Nichtübereinstimmung der Resultate für V mit denen für v den besten Prüfstein für die electromagnetische Theorie des Lichtes abgeben.

787. Die folgende Tabelle zeigt, inwiefern zwischen den Beträgen der beiden Grössen wirklich eine Uebereinstimmung vorhanden ist. Die drei links stehenden Zahlen sind die durch directe Beobachtung erlangten Hauptresultate für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes durch die Luft oder durch den interstellaren Raum, die drei rechts stehenden geben die aus der Vergleichung der electrischen Einheiten deducirten Hauptresultate.

Lichtgeschwindigkeit $\left(\frac{\text{Meter}}{\text{Sec.}}\right)$.		*Verhältnis der electrischen Einheiten.*	
Fizeau	314000000	Weber	310740000
Aberration u. s. f. Sonnenparallaxe	308000000	Maxwell	288000000
Foucault	298360000	Thomson	282000000

Offenbar sind hiernach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts und das Verhältnis der electrischen Einheiten Zahlen von derselben Grössenordnung. Doch ist weder V noch v bis jetzt mit solcher Sicherheit bekannt, dass man sagen könnte, die eine dieser Grössen übersteige die andere. Man darf aber hoffen, dass weitere Experimente uns das Verhältnis, in welchem die beiden Zahlen V und v zu einander stehen, genauer werden kennen lehren.

Bis jetzt steht unsere Theorie, der zufolge die beiden Grössen gleich sein sollten, und die auch einen Grund, weshalb die Gleichheit stattfinden muss, angiebt, wie ein Blick auf die Tafel lehrt, mit den erlangten Resultaten nicht im Widerspruch.

788. Bei anderen Medien, als bei Luft, ist die Geschwindigkeit V umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Product der dielectrischen und magnetischen inductiven Capacität des betreffenden Mediums. Die Undulationstheorie lehrt andererseits, dass die Geschwindigkeit des Lichtes von Medium zu Medium umgekehrt wie der Refractionsindex variirt.

Man kennt noch kein durchsichtiges Medium, dessen magnetische inductive Capacität von der der Luft um mehr als um einen sehr kleinen Bruchteil verschieden ist. Daher muss das verschiedene Verhalten solcher durchsichtiger Medien gegen electromagnetische Störungen zum grössten Teil durch die Verschiedenheit ihrer bezüglichen dielectrischen inductiven Capacitäten bedingt sein.

Unsere Theorie verlangt also, dass die dielectrische inductive Capacität eines Mediums dem Quadrate seines Refractionsindex gleich sein soll.

Nun ist der Brechungsexponent verschieden für die verschiedenen Lichtarten, er ist bei den kurzwelligen grösser, als bei den langwelligen. Bei der Zusammenstellung mit der dielectrischen inductiven Capacität haben wir den Refractionsindex zu wählen, der Wellen mit allerlängster Periode entspricht, weil solche die einzigen Wellen sind, deren Bewegungen mit den langsamen Processen, durch welche wir die Capacitäten der Dielectrica bestimmen, verglichen werden können.

Mit genügender Genauigkeit kennt man bis jetzt nur beim Paraffin die dielectrische Constante. Gibson und Barclay haben, wie schon in Art. 229 bemerkt worden ist, für diesen Körper in seinem starren Zustande

$$K = 1,975$$

gefunden. Andererseits giebt Gladstone beim geschmolzenen Paraffin den Brechungsexponenten für die Linien A, D und H

Temperatur	A	D	H
54° C.	1,4306	1,4357	1,4499
57° C.	1,4294	1,4343	1,4493

Daraus finde ich für Wellen von unendlicher Länge

$$\text{Refractionsindex} = 1,422,$$

während

$$\sqrt{K} = 1.405$$

ist. Die Differenz zwischen den beiden Zahlen ist zu gross, als dass sie sich durch Beobachtungsfehler allein erklären liesse, sie lehrt, dass man die optischen Eigenschaften der Körper aus den electrischen erst dann wird ableiten können, wenn wir über die Constitution der Körper im Klaren sind. Doch glaube ich, dass auch jetzt schon die Uebereinstimmung zwischen den Zahlen so gross ist, dass, wenn in der Folge keine grössern Discrepanzen zwischen den electrischen und optischen Eigenschaften bei einer beträchtlichen Anzahl von Körpern gefunden werden sollten, man wol schliessen darf, dass die $\sqrt{K}$, wenn sie auch nicht geradezu gleich dem Refractionsindex ist, doch den wichtigsten Teil desselben bildet*).

*) Wegen der Literatur muss ich den Leser auf die Abhandlungen von v. Helmholtz, Boltzmann, Lorenz u. a. verweisen. Die Zahlen Maxwells abzuändern oder neue hinzuzufügen, ist noch zu früh. Anm. des Uebers.

Ebene Wellen.

790. Krummlinig-polarisirte Wellen. Wir wenden nunmehr unsere Aufmerksamkeit speciell den ebenen Wellen zu.

Sei die Normale einer ebenen Welle die z Axe, alle Grössen, deren Veränderung die Welle constituirt, hängen dann nur von z und t ab, sind aber ganz unabhängig von x und y. Hiernach ist nach dem fundamentalen Gleichungssystem A) für die magnetischen Inductionscomponenten

$$\text{A)} \qquad a = -\frac{\partial G}{\partial z}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad c = 0.$$

Die magnetische Störung geht also in der Ebene der Welle vor sich, und das stimmt mit der Tatsache, dass bei ebenen Lichtwellen die Störung ebenfalls in Ebenen geschieht.

Ferner haben wir für die Stromcomponenten nach dem fundamentalen Gleichungssystem E), und weil bei isotropen Medien

$$\text{L)} \qquad \alpha = \frac{1}{\mu} a = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial G}{\partial z}, \quad \beta = \frac{1}{\mu} b = \frac{1}{\mu}\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \gamma = \frac{1}{\mu} c = 0$$

ist,

$$\text{E)} \qquad \begin{aligned} 4\pi\mu u &= -\frac{\partial b}{\partial z} = -\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \\ 4\pi\mu v &= \frac{\partial a}{\partial z} = -\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \\ 4\pi\mu w &= 0, \end{aligned}$$

also geht auch die electrische Störung in der Wellenebene vor sich, zugleich erhellt, dass ihre Richtung senkrecht zu der der magnetischen Störung verläuft, geschieht jene in Richtung der x Axe, so folgt diese der Richtung der y Axe.

Die electrische Störung lässt sich aber auch noch in anderer Weise berechnen.

Da unser Medium ein nichtleitendes sein sollte, so besitzt die electrische Störung keinen fortgeleiteten Strom, in der Bezeichnungsweise des Art. 610 ist also

$$p = q = r = 0,$$

und nach dem Gleichungssystem H)

$$\text{H)} \qquad u = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Ferner haben wir nach F_1) in Art. 609

$$\text{F)} \qquad f = \frac{K}{4\pi} P, \quad g = \frac{K}{4\pi} Q, \quad h = \frac{K}{4\pi} R$$

und, weil in dem Medium keine Bewegung vorhanden ist, nach dem Gleichungssystem B) in Art. 598

B) $$P = -\frac{\partial F}{\partial t}, \quad Q = -\frac{\partial G}{\partial t}, \quad R = -\frac{\partial H}{\partial t},$$

also wird

J_1) $$u = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad v = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad w = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2},$$

und durch Vergleichung mit E)

1) $$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = K\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = K\mu\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad 0 = K\mu\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}.$$

Die erste und zweite dieser drei Gleichungen sind die Gleichungen für die Fortpflanzung einer ebenen Welle, ihre Lösungen haben die wolbekannte Form

2_1) $$F = f_1(z - Vt) + f_2(z + Vt), \quad G = f_3(z - Vt) + f_4(z + Vt).$$

Die f bezeichnen vier willkürliche Functionen und ausserdem ist wie früher

3) $$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}$$

gesetzt.

Die dritte Gleichung ergiebt

2_2) $$H = A + Bt.$$

A und B sind Functionen von z. H ist also entweder eine von t ganz unabhängige Grösse, oder sie variirt direct wie die Zeit, in keinem Falle vermag also diese Componente des Vector-Potentials auf die Fortpflanzung der Wellen einen Einfluss auszuüben.

Die magnetischen sowol wie die electrischen Störungen gehen in der Wellenebene vor sich, hiernach stimmt die electromagnetische Störung mit der optischen darin überein, dass sie auch transversal zur Fortpflanzungsrichtung geschieht.

791. Planpolarisirte Wellen. Macht man $G = 0$, so entspricht die electromagnetische Störung einem ebenen planpolarisirten Lichtstrahl.

Die magnetische Kraft wirkt in diesem Falle in Richtung der y Axe, ihre Grösse ist

$$\beta = \frac{1}{\mu}\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Die electromotorische Kraft wirkt in Richtung der x Axe und hat die Grösse

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t}.$$

Die magnetische Kraft wirkt also in einer Ebene, die die Ebene, welche die Richtung der electrischen Kraft enthält, senkrecht schneidet.

Die Fig. 66 stellt die relativen Werte und Richtungen der an verschiedenen Stellen eines polarisirten Strahles zu einer bestimmten Zeit t

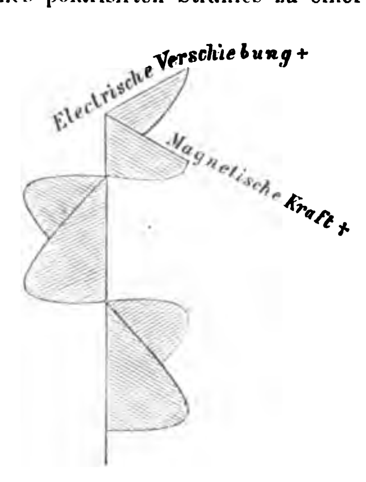


Fig. 66.

wirkenden magnetischen und electromotorischen Kraft. Sie entspricht auch einem Strahle plan-polarisirten Lichtes, doch steht die Entscheidung, ob die Polarisationsebene in die Ebene der magnetischen oder in die der electrischen Störung fällt, noch aus.

Energie und Druck der Strahlung.

792. Die auf Volumeinheit bezogene electrostatische Energie ist an einer Stelle der Welle in einem nichtleitenden Medium nach Art. 631

$$1)\qquad W = \frac{1}{2} f P = \frac{K}{8\pi} P^2 = \frac{K}{8\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2.$$

Für die ebenfalls auf Volumeinheit bezogene electrokinetische Energie hat man an derselben Stelle nach Art. 635

$$2)\qquad T = \frac{1}{8\pi} b\beta = \frac{1}{8\pi\mu} b^2 = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2.$$

Da nun nach den Gleichungen 2_1) und 3) des Art. 790 für eine einzelne Welle $W = T$ wird, so folgt, dass bei einer solchen Welle die ganze

innere Energie des Mediums in jedem Punkte zur Hälfte electrostatisch und zur Hälfte electrokinetisch ist.

Sei p der numerische Betrag jeder dieser Hälften der Energie, also einerseits der der electrostatischen und andererseits der der electrokinetischen.

Infolge der Existenz der electrostatischen Energie wirkt an der gedachten Stelle nach Art. 107, und weil von der electrischen Kraft nur die x Componente vorhanden ist, parallel zur x Axe eine Spannung von der Grösse p und senkrecht zu derselben in Richtung der y und z Axe ein Druck von derselben Grösse p.

Infolge der Existenz der electrokinetischen Energie wirkt nach Art. 643, und weil von der magnetischen Induction nur die y Componente vorhanden ist, parallel zur y Axe eine Spannung von der Grösse p und senkrecht dazu in Richtung der x und z Axe ein Druck von derselben Grösse p.

Der Gesammteffect des electrostatischen und des electromagnetischen Zwanges besteht also in einem Druck von der Grösse $2p$, der in Richtung der Fortbewegung der Welle wirkt.

Nun bedeutet aber $2p$ die ganze, auf Volumeinheit bezogene, an der betreffenden Stelle vorhandene Energie, daher wirkt in einem Medium, in welchem eine Welle sich fortpflanzt, in Richtung der Fortpflanzung ein Druck, der an jeder Stelle numerisch ebenso gross ist wie die daselbst vorhandene, auf Volumeinheit bezogene, ganze Energie.

793. Nimmt man an, dass kräftiges Sonnenlicht an einem Quadratmeter in der Secunde 124,1 Kilogrammeter Energie entwickelt, so würden in einem Kubikmeter Sonnenstrahlen $\frac{124}{300000000}$ oder 0,00000041 Kilogrammeter Energie enthalten sein. Hiernach würde der mittlere Druck, den eine zur Fortpflanzungsrichtung der Sonnenstrahlen senkrechte Fläche pro Quadratmeter erleidet, 0,00000041 Kilogrammeter betragen. Da dieser Druck nur auf der von der Sonne beleuchteten Seite des Körpers vorhanden ist, so würde dieser scheinbar von den Sonnenstrahlen in Richtung ihrer Fortpflanzung fortgestossen werden. Concentrirtes electrisches Licht wird wahrscheinlich einen noch stärkern Druck ausüben, und es ist nicht unmöglich, dass die Strahlen eines solchen Lichtes, wenn sie auf ein dünnes metallisches Plättchen, das in einem Vacuum fein aufgehängt ist, fallen, an diesem einen beobachtbaren mechanischen Effect hervorbringen werden.

Die Energie, von der wir bisher gesprochen haben, ist die mittlere Energie. Bei Störungen, die in ihrer mathematischen Darstellung Sinusse und Cosinusse enthalten, ist diese mittlere Energie halb so gross, wie der Maximalbetrag, den die Energie überhaupt erreicht. Bezeichnet also P_m den grössten Wert, den die electromotorische Kraft, und β_m den grössten Wert, den die magnetische Kraft während der Fortpflanzung der Störung erlangt, so hat man die

$$\text{Mittlere Energie in einer Volumeinheit} = \frac{K}{8\pi} P_m^2 = \frac{\mu}{8\pi} \beta_m^2.$$

Unter Benutzung der von Pouillet für die Energie des Sonnenlichts gegebenen und von Thomson in den *Trans. R. S. E.* 1854 bearbeiteten Daten findet man

$$P = 60000000, \text{ oder } 600 \text{ Daniells per Meter,}$$

$\beta = 0.193$, oder mehr als der zehnte Teil der bei uns jetzt herrschenden erdmagnetischen Horizontalintensität.

Ebene Lichtwellen in krystallinischen Medien.

794. Wir haben unsere Theorie, indem wir die Daten, die durch gewöhnliche electromagnetische Experimente zu erlangen sind, benutzten, durch die Berechnung der Erscheinungen, welche periodische electromagnetische Störungen bieten, wenn sie in der Secunde millionenmalmillionenmal vorfallen, für Luft oder für ein Vacuum einer ziemlich strengen Prüfung unterworfen. So wie wir sie aber auf die dichten Medien auszudehnen versuchen, werden wir nicht blos in alle Schwierigkeiten, mit denen moleculare Theorien gewöhnlich zu kämpfen haben, verwickelt, sondern auch tief in die Geheimnisse, welche die Beziehungen zwischen den ponderabeln Molekeln und denen des electromagnetischen Mediums umgeben, hineingezogen.

Um den signalisirten Schwierigkeiten zu entgehen, nehme ich an, dass in gewissen Medien die specifische Capacität für electrostatische Induction in verschiedenen Richtungen von verschiedenem Betrage ist. Mit andern Worten, die electrische Verschiebung soll nicht in Richtung der Wirkung der electromotorischen Kraft vor sich gehen, und auch nicht dieser proportional variiren, sondern geneigt zu ihr verlaufen und durch ein System linearer Gleichungen von dem Bau der in Art. 297 angeführten mit ihr verknüpft sein. Doch wird dieses System von Gleichungen nicht in seiner allgemeinsten Form stehen bleiben dürfen, denn man kann, wie es tatsächlich in Art. 436 geschehen ist, nachweisen, dass seine Coefficienten ein symmetrisches System zusammensetzen. Indem man dann noch die Coordinatenaxen gehörig richtet, erhält man

$$f = \frac{1}{4\pi} K_1 P, \quad g = \frac{1}{4\pi} K_2 Q, \quad h = \frac{1}{4\pi} K_3 R.$$

K_1, K_2, K_3 sind die Hauptcapacitäten der electrostatischen Induction des Mediums.

Hiernach nehmen die Gleichungen für die Fortpflanzung electromagnetischer Störungen die Gestalt an

$$\text{1a)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial x} &= K_1 \mu \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial t} \right), \\ \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= K_2 \mu \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial t} \right), \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} &= K_3 \mu \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial t} \right). \end{aligned}$$

795. Sind l, m, n die Richtungscosinusse der in der Front der Welle gezogenen Normale, wird

$$lx + my + nz - Vt = w \tag{2}$$

gesetzt, benutzen wir die Abkürzungen F'', G'', H'', Ψ'' für die zweiten Derivirten von F, G, H, Ψ nach w und machen endlich

$$K_1\mu = \frac{1}{a^2}, \quad K_2\mu = \frac{1}{b^2}, \quad K_3\mu = \frac{1}{c^2}, \tag{3}$$

so geben a, b, c die drei Hauptgeschwindigkeiten der Fortpflanzung der Störung an, und die Gleichungen unter 1a) gehen über in

$$\begin{aligned}
&\left(m^2 + n^2 - \frac{V^2}{a^2}\right)F'' - lm\,G'' - nl\,H'' - V\Psi''\frac{l}{a^2} = 0,\\
&- lm\,F'' + \left(n^2 + l^2 - \frac{V^2}{b^2}\right)G'' - nm\,H'' - V\Psi''\frac{m}{b^2} = 0,\\
&- nl\,F'' - mn\,G'' + \left(l^2 + m^2 - \frac{V^2}{c^2}\right)H'' - V\Psi''\frac{n}{c^2} = 0.
\end{aligned} \tag{1b}$$

796. Das sind drei Gleichungen für F'', G'', H'', man erhält aus ihnen, wenn

$$\frac{l^2}{V^2 - a^2} + \frac{m^2}{V^2 - b^2} + \frac{n^2}{V^2 - c^2} = U \tag{4'}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
VU(VF'' - l\Psi'') &= 0,\\
VU(VG'' - m\Psi'') &= 0,\\
VU(VH'' - n\Psi'') &= 0.
\end{aligned} \tag{1c}$$

Daher ist entweder $V = 0$, oder $U = 0$, oder es verschwindet jeder der Klammerausdrücke.

Wenn $V = 0$ ist, wird die Welle überhaupt nicht fortgepflanzt.

Wenn $U = 0$ ist, gelangt man für V zu der von Fresnel schon gegebenen Gleichung.

Wenn die Klammerausdrücke verschwinden, so steht der Vector, dessen Componenten F'', G'', H'' sind, senkrecht zur Wellenfront und ist der Raumdichte der freien Electricität proportional. Da nun unser Medium ein Nichtleiter sein sollte, so wird die Raumdichte seiner Electricität an keinem Punkte mit der Zeit variiren können, das bedeutet, dass die Störung, welche die drei Gleichungen

$$VF'' - l\Psi'' = 0, \quad VG'' - m\Psi'' = 0, \quad VH'' - n\Psi'' = 0$$

beschreiben, nicht periodisch ist, also auch keine Welle constituirt.

Bei periodischen Störungen darf man hiernach $\Psi'' = 0$ setzen.

797. Für uns hat nur der zweite Fall Bedeutung. Aus $U=0$ folgt aber

$$4)\qquad \frac{l^2}{V^2-a^2}+\frac{m^2}{V^2-b^2}+\frac{n^2}{V^2-c^2}=0,$$

und diese Gleichung sagt aus, dass jeder Richtung der Wellennormale zwei, und nur zwei, Werte von V^2 entsprechen.

Für die Stromcomponenten u, v, w gilt das unter E_1) in Art. 616 gegebene Gleichungssystem, und da

$$\nabla^2 F=-F'',\ \nabla^2 G=-G'',\ \nabla^2 H=-H'';$$

$$\frac{\partial J}{\partial x}=F''\,ll+G''\,lm+H''\,ln,\qquad \frac{\partial J}{\partial y}=F''\,ml+G''\,mm+H''\,mn,$$

$$\frac{\partial J}{\partial z}=F''\,nl+G''\,nm+H''\,nn$$

ist, so haben wir

$$5a)\qquad \begin{aligned} 4\pi\mu u &= -F''(m^2+n^2)+G''lm+H''ln,\\ 4\pi\mu v &= +F''ml-G''(n^2+l^2)+H''mn,\\ 4\pi\mu w &= +F''nm+G''nl-H''(l^2+m^2), \end{aligned}$$

oder zufolge der Gleichungen unter 1b) des vorigen Artikels

$$5b)\qquad \begin{aligned} 4\pi\mu u &= -\frac{V}{a^2}(VF''+l\,\Psi''),\\ 4\pi\mu v &= -\frac{V}{b^2}(VG''+m\Psi''),\\ 4\pi\mu w &= -\frac{V}{c^2}(VH''+n\,\Psi''). \end{aligned}$$

Bei periodischen Störungen in einem nichtleitenden Medium darf aber $\Psi''=0$ gesetzt werden, wir haben also

$$5_1)\qquad \begin{aligned} 4\pi\mu u &= -\frac{V^2}{a^2}F'',\\ 4\pi\mu v &= -\frac{V^2}{b^2}G'',\\ 4\pi\mu w &= -\frac{V^2}{c^2}H'', \end{aligned}$$

und wenn λ, μ, ν die Richtungscosinusse der electrischen Strömung angeben,

$$6)\qquad \lambda:\mu:\nu=\frac{F''}{a^2}:\frac{G''}{b^2}:\frac{H''}{c^2}.$$

Ferner folgt aus 5_1)

$$4\pi\mu\mathfrak{C}(l\lambda+m\mu+n\nu)=-V^2\left(\frac{F''l}{a^2}+\frac{G''m}{b^2}+\frac{H''n}{c^2}\right).$$

Setzt man in dem Gleichungssystem 1b) das $\Psi'' = 0$, multiplicirt die drei Gleichungen desselben der Reihe nach mit l, m, n und addirt die Resultate, so zeigt sich, dass

$$\text{7)} \qquad \frac{F''l}{a^2} + \frac{G''m}{b^2} + \frac{H''n}{c^2} = 0$$

wird. Daher ist auch

$$\text{8)} \qquad l\lambda + m\mu + n\nu = 0,$$

d. h. die electrische Strömung geht auf der Wellenfront vor sich.

Ihre Richtung in der Wellenebene bestimmt sich, wie aus den Gleichungen 6), 7) und 8) erhellt, aus der Bezeichnung

$$\text{9)} \qquad \frac{l}{\lambda}(b^2 - c^2) + \frac{m}{\mu}(c^2 - a^2) + \frac{n}{\nu}(a^2 - b^2) = 0.$$

Die Gleichungen 4) und 9) fallen aber mit den von Fresnel gegebenen zusammen, wenn man als Polarisationsebene diejenige Ebene definirt, welche durch den Strahl hindurchgeht und zur electrischen Strömung senkrecht steht.

Nach dieser electromagnetischen Theorie der Doppelbrechung existirt eine zur Wellenebene senkrechte Störung — die bekanntlich eine der Hauptschwierigkeiten der Undulationstheorie bildet — nicht, man braucht also keine besondere Annahme zu machen, um zu erklären, weshalb ein Strahl, der in dem Hauptschnitt eines Krystalls polarisirt ist, in der ordinären Weise gebrochen wird.*)

Beziehung zwischen der electrischen Leitungsfähigkeit und der Durchsichtigkeit eines Mediums.

798. Unsere bisherigen Ableitungen beruhten auf der Annahme, dass der Körper, in dem die Störung sich verbreitet, ein vollkommener Isolator ist. Ich setze jetzt voraus, dass er auch zu leiten vermag. die Grösse C, die auf Volumeinheit bezogene Leitungsfähigkeit, wird dann einen von Null verschiedenen Werth besitzen. und das Medium wird eine Strömung nicht blos durch Variation der Verschiebung, sondern auch durch wirkliche Leitung fortpflanzen können. Die electrische Leitung geht nun immer unter Wärmeentwickelung vor sich, ein Teil der electrischen Energie wird sich also in Wärme verwandeln. daher müssen die Undulationen in dem Medium allmälig absorbirt werden.

Ich betrachte den einfachen Fall, wo die Störung so vor sich geht. dass

$$G = H = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

*) Man sehe Stokes, *Report on Double Refraction*, Brit. Assoc. Rep. 1862, p. 255.

ist. Das Gleichungssystem 1) in Art. 783 reducirt sich dann auf die einzige Relation

$$\text{1)} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \mu K \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 4\pi\mu C \frac{\partial F}{\partial t},$$

aus der dann folgt

$$\text{2)} \qquad F = e^{-pz} \cos(nt - qz),$$

wo

$$\text{a)} \qquad q^2 - p^2 = \mu K n^2,$$

$$\text{b)} \qquad 2pq = 4\pi\mu Cn$$

zu setzen ist.

Hiernach wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser besondern Störung

$$\text{3)} \qquad V = \frac{n}{q}$$

und der Coefficient der Absorption

$$\text{4)} \qquad p = 2\pi\mu CV.$$

Speciell soll sich die Störung durch eine zur z Axe senkrechte Platte fortpflanzen. Sei R der electromagnetisch gemessene Widerstand der Platte, l die Länge, b die Breite, z_1 die Dicke derselben, dann ist

$$\text{c}_1) \qquad R = \frac{l}{b z_1 C},$$

also

$$p = 2\pi\mu \frac{l}{b z_1} \frac{V}{R}.$$

Wenn die Störung aus der Platte heraustritt, ist $z = z_1$ geworden, von dem einfallenden Licht geht daher durch die Platte die Portion

$$e^{-2pz_1} = e^{-4\pi\mu \frac{l}{b} \frac{V}{R}}$$

hindurch.

799. Die meisten durchsichtigen Körper sind gute Isolatoren, und alle guten Leiter sind opak. Doch giebt es Ausnahmefälle von der Regel, dass ein Körper um so weniger durchsichtig ist, je besser er die Electricität leitet. So gestatten die Electrolyte dem electrischen Strome den Durchgang, und sind doch oft durchsichtig. Um die Schwierigkeit zu umgehen, kann man aber die Annahme machen, dass in dem Falle der Lichtverbreitung, wo also die Kräfte fortwährend und ausserordentlich schnell ihre Richtung wechseln, die ins Spiel gerufene electromotorische Kraft nach einer und derselben Richtung nur während einer so kurzen Dauer wirksam sein kann, dass sie die combinirten Molekel nicht vollständig von einander zu

trennen vermag. Kehrt sich dann während der zweiten Hälfte der Vibration ihre Richtung um, so hebt sie selbst den Effect, den sie während der ersten Hälfte schon hervorgebracht hatte, wieder auf. Daher findet in der Fortpflanzung solcher Störungen, wie sie das Licht constituiren, auch bei Electrolyten keine eigentliche Leitung, also auch kein Verlust electrischer Energie statt, das Licht wird demzufolge, ohne absorbirt zu werden, durchgelassen.

800. Gold, Silber und Platin sind gute Leiter, sie lassen aber in sehr dünnen Lagen das Licht noch durch. Aus Versuchen, die ich an einem Goldblättchen, dessen Widerstand von Hockin bestimmt worden war, angestellt habe, scheint hervorzugehen, dass die Durchsichtigkeit des Goldes viel grösser ist, als sie unserer Theorie zufolge sein dürfte, wenn man nicht annehmen will, dass im Falle, wo die electromotorischen Kräfte von halber zu halber Schwingung ihre Wirkungsrichtung umkehren, der Verlust an Energie relativ geringer ist, als wenn sie längere Zeit nach derselben Richtung wirken.

Störungen in einem Medium von sehr grosser Leitungsfähigkeit.

801. Wir beschäftigen uns nunmehr mit der Verbreitung von Wellen in Medien, deren Leitungsfähigkeit C sehr gross gegen ihre inductive Capacität K ist. In den Gleichungen 1) des Art. 783 fallen dann die mit K multiplicirten Glieder fort und man hat

$$4\pi\mu C\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla^2 F+4\pi\mu C\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial J}{\partial x}=0,$$

$$4\pi\mu C\frac{\partial G}{\partial t}+\nabla^2 G+4\pi\mu C\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial J}{\partial y}=0,$$

$$4\pi\mu C\frac{\partial H}{\partial t}+\nabla^2 H+4\pi\mu C\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\frac{\partial J}{\partial z}=0;$$

$$\frac{\partial J}{\partial t}-\nabla^2\Psi=0.$$

Da nun in dem Innern eines vollkommenen Leiters freie Electricität nicht vorhanden ist, wird aus der letzten Gleichung

$$\frac{\partial J}{\partial t}=0.$$

J ist also eine lineare Function von t und muss hier, wo es sich um periodische Störungen handelt, fortgelassen werden. Ferner ist auch

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{\partial\Psi}{\partial y}=\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0.$$

weil im Innern des Körpers Ψ sehr nahe constant sein muss. Daher wird

$$
1)\qquad
\begin{aligned}
4\pi\mu C\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla^2 F&=0,\\
4\pi\mu C\frac{\partial G}{\partial t}+\nabla^2 G&=0,\\
4\pi\mu C\frac{\partial H}{\partial t}+\nabla^2 H&=0.
\end{aligned}
$$

Jede dieser drei Gleichungen hat genau dieselbe Form, wie die von Fourier in seiner *Théorie de la Chaleur* für die Verbreitung der Wärme aufgestellte.

802. Nimmt man die erste derselben als Beispiel, so wird also die Componente F des Vector-Potentials nach Zeit und Ort ebenso variiren, wie die Temperatur eines homogenen starren Körpers variirt, wenn man die Anfangs- und Grenzbedingungen beider Fälle sich entsprechen lässt, und wenn die Grösse $4\pi\mu C$ numerisch gleich dem Reciproken der thermischen Leitungsfähigkeit der Substanz genommen wird. Unter ‚thermischer Leitungsfähigkeit' einer Substanz ist dabei zu verstehen die Anzahl von Volumeinheiten der Substanz, welche durch die Wärme, die durch einen Einheitswürfel derselben, von dem zwei einander gegenüberstehende Flächen die Temperaturdifferenz Ein Grad haben und dessen andere Flächen für Wärme undurchgängig sind, hindurchgeht, um einen Grad erwärmt werden*).

Hiernach lassen sich die verschiedenen Probleme, welche Fourier für die Verbreitung von Wärme bearbeitet hat, sofort in solche für die Verbreitung electromagnetischer Quantitäten transformiren. Doch hat man zu beachten, dass F, G, H Componenten eines Vectors darstellen, während die Temperatur eine scalare Grösse ist.

Von den vielen von Fourier behandelten Fällen wähle ich den, wo die electromagnetische Störung sich in einem unendlich ausgedehnten Medium abspielt, dessen Zustand zu einer bestimmten Zeit, der Anfangszeit für unsere Rechnung, völlig gegeben ist.

Die vollständige Lösung lautet nach Fourier**):

$$
2)\qquad v=\iiint\frac{d\alpha\,d\beta\,d\gamma}{2^3\sqrt{k^3\pi^3t^3}}\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}{4kt}}\,f(\alpha,\beta,\gamma).
$$

Darin ist in der Uebertragung auf unsern Fall v eine der drei Grössen F, G, H; k bezeichnet bei Fourier die thermische Leitungsfähigkeit, ist also bei uns gleich $1/4\pi\mu C$; $f(\alpha,\beta,\gamma)$ giebt bei Fourier die Temperatur, bei uns den Wert einer der Grössen F, G, H an der Stelle (α,β,γ) des Mediums zu einem der betrachteten Zeit um t voraufgehenden Moment.

*) Maxwell, *Theory of Heat*, erste Ausgabe p. 235, vierte p. 255.
**) *Traité de la chaleur*, Art. 384.

Sieht man

$$e^{-\frac{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}{4kt}} = e^{-\frac{\pi\mu C r^2}{t}}$$

als das Gewicht, welches der Function $f(\alpha, \beta, \gamma)$ an der Stelle α, β, γ zur Zeit t zukommt, an, so kann man auch sagen, dass v zu einer bestimmten Zeit t für jede Stelle des Körpers durch den mittlern Zustand des Körpers, genommen zu der um t voraufgegangenen Zeit, zu dieser Zeit bestimmt wird.

803. Ich bemerke zunächst, dass k, die thermische Leitungsfähigkeit des von Fourier betrachteten Mediums, der electrischen C des von uns angenommenen umgekehrt proportional ist. Die Zeit, die dazu gehört, damit in einem Medium der electromagnetische Zustand auf eine vorgeschriebene Stufe der Entwickelung gelangt, ist also um so grösser, je grösser die electrische Leitungsfähigkeit unseres Mediums ist. Das könnte auf den ersten Blick paradox erscheinen, ist es aber tatsächlich nicht, wenn man das Ergebnis des Art. 655, dem zufolge ein Medium von unendlich grosser electrischer Leitungsfähigkeit der Weiterverbreitung magnetischer Kraftwirkung ein unüberwindliches Hindernis entgegensetzt, mit in Betracht zieht.

Ferner steht die Zeit, die verfliesst, bis in der Verbreitung der electromagnetischen Störung eine bestimmte Stufe erreicht ist, in directer Proportion zu dem Quadrate der linearen Dimensionen des Leiters.

Eine Grösse, die man bestimmt als Geschwindigkeit der Ausbreitung bezeichnen könnte, existirt hier nicht. Versucht man jedoch diese Geschwindigkeit durch die Zeitdauer zu messen, die verfliesst, ehe die Störung an einer in bestimmter Entfernung vom Ursprung derselben befindlichen Stelle des Mediums sich um einen vorgeschriebenen Betrag ändert, so findet sich die Geschwindigkeit um so grösser, einen je geringern Betrag man für die Aenderung der Störung vorschreibt, denn wie weit man auch die betrachtete Stelle von dem Herde der Störung entfernt hält, und wie klein auch die Zeitdauer, während deren man die Veränderung der Störung an dieser Stelle verfolgt, ausfällt, der Betrag der Veränderung wird sich immer von dem mathematischen wirklichen Nichts unterscheiden.

Diese Eigentümlichkeit, dass man von einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht recht zu sprechen vermag, unterscheidet die Verbreitung electromagnetischer Störungen in vollkommenen Leitern scharf von der welligen Verbreitung solcher Störungen in Isolatoren. Hier hat die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine ganz bestimmte Bedeutung, die Störung beginnt an keiner Stelle eher, als bis die Welle sie erreicht hat, und wenn die Welle die Stelle verlassen hat, ist die Störung daselbst ein für allemal verschwunden.

Erscheinungen in der Umgebung eines linearen Leiters.

804. Weiter untersuchen wir die Vorgänge, welche eintreten, wenn ein Strom durch einen linearen Leiter zu fliessen beginnt und fortfährt,

und das den Leiter umgebende Medium eine nur begrenzte Leitungsfähigkeit besitzt.

Der erste Effect. den der Strom, wenn er einsetzt, hervorbringt, besteht darin, dass er in den seinem Leiter unmittelbar angrenzenden Teilen des Mediums eine Induction wachruft. Die inducirte Strömung verläuft in der dem inducirenden Strome entgegengesetzten Richtung und für den ersten Augenblick ist die ganze Electricitätsmenge, die sie mit sich führt, genau gleich der des inducirenden Stromes. Demzufolge macht sich denn auch in den entfernteren Teilen des Mediums im Moment des Einsetzens des Stromes keine electromagnetische Kraftwirkung bemerkbar. Eine solche Kraftwirkung tritt vielmehr etwas später ein und wächst allmälig bis zu dem ihr zukommenden Endbetrage an. Gleichzeitig nimmt die inducirte Strömung in Folge des Widerstandes des Mediums ab und verschwindet gänzlich.

Indem aber dieser in unmittelbarer Umgebung des Stromleiters inducirte Strom verschwindet, ruft er seinerseits in den seiner Bahn benachbarten Teilen des Mediums einen Strom hervor, der ebenfalls mit der Zeit verschwindet, und dann wiederum in den seiner Bahn benachbarten Teilen des Feldes einen Strom inducirt. So schreitet die Induction durch das Medium fort, das Gebiet des inducirten Stromes dehnt sich mehr und mehr aus, seine Stärke nimmt aber fortwährend ab.

Man sieht, diese Ausbreitung des Inductionsstromes und dieser Abfall in seiner Stärke, je weiter sein Gebiet wird, bildet ein Phänomen, das in der Ausbreitung der Wärme von einer im Medium vorhandenen wärmern oder kältern Stelle sein vollständiges Analogon hat. Doch darf man nicht ausser Acht lassen, dass einerseits ein Strom Richtung hat, und dass andererseits der Strom an gegenüberstehenden Stellen seiner Bahn nach entgegengesetzten Richtungen fliesst. Das Problem der Berechnung einer Componente des inducirten Stromes hat man also mit dem zu vergleichen, wo gleiche Quantitäten von Wärme und Kälte sich von benachbarten Stellen ausbreiten. Die Wirkung auf abstehende Stellen wird also geringer sein, als wenn man es nur mit der Ausbreitung von Wärme oder von Kälte zu tun hätte.

805. Erhält man den Strom, nachdem er einmal zu fliessen begonnen hat, constant auf gleicher Höhe, so breiten sich also die durch das Einsetzen des Stromes hervorgebrachten inducirten Ströme durch das Medium aus und sterben dahin. Das Medium lassen sie in seinem permanenten Zustande zurück, und dieser Zustand entspricht dem, wenn Wärme sich stationär durch dasselbe ausbreitet.

Offenbar haben wir für diesen stationären Zustand des Mediums

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

also nach 1) in Art. 801

$$1_1) \qquad \nabla^2 F = \nabla^2 G = \nabla^2 H = 0.$$

Die Gleichungen gelten für alle Punkte des Mediums, sie gelten aber nicht für die Punkte der Strombahn, für diese ist vielmehr

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 F &= 4\pi\mu u, \\
\nabla^2 G &= 4\pi\mu v, \qquad (1_2) \\
\nabla^2 H &= 4\pi\mu w.
\end{aligned}
$$

Zusammen sagen die sechs unter 1_1) und 1_2) gegebenen Gleichungen aus, dass wenn der Strom in seinem Leiter mit constanter Stärke seit hinreichend langer Zeit fliesst, in dem den Leiter umgebenden Medium keine Störungen anzutreffen sind; eine Strömung existirt dann eben nur in seinem Leiter und demzufolge ist auch die electromagnetische Kraftwirkung im ganzen Medium lediglich auf Rechnung des im Leiter fliessenden Stromes zu setzen und nach der gewöhnlichen Theorie zu berechnen.

Die Schnelligkeit, mit der dieser endgültige Zustand in dem Medium eintritt, ist übrigens so gross, dass wir sie mit unsern jetzigen Hilfsmitteln, vielleicht mit Ausnahme des Falles, wo die Strombahn in einer grossen Masse eines ganz besonders gut leitenden Metalles, etwa in Kupfer, eingebettet ist, nicht zu messen im Stande sind.

In einer in *Poggendorffs Annalen* im Juni 1867 veröffentlichten Abhandlung hat Lorenz aus Kirchhoffs*) Gleichungen für die Bewegung electrischer Ströme, in dem er gewisse für experimentelle Resultate bedeutungslose Glieder hinzufügte, einen Satz neuer Gleichungen abgeleitet, aus denen sich ergiebt, dass die Kraftverteilung in einem electromagnetischen Felde wie von der gegenseitigen Einwirkung benachbarter Teilchen desselben hervorgebracht angesehen zu werden vermag. Wellen von transversal gerichteten electrischen Strömungen könnten darnach mit einer Geschwindigkeit fortgepflanzt werden, die von derselben Grössenordnung ist wie die Geschwindigkeit, mit der das Licht sich in nichtleitenden Medien ausbreitet. Lorenz betrachtet also die Störung, welche das Licht constituirt, als identisch mit solchen transversalen electrischen Strömungen, er zeigt auch, dass leitende Medien für solche Strahlungen sich opak verhalten müssen.

Die Schlüsse, zu denen Lorenz auf einem ganz andern Wege gelangt ist, sind den von mir gezogenen ähnlich. Die in diesem Capitel niedergelegte Theorie habe ich zuerst in dem Jahrgang 1865 der *Phil. Trans.* veröffentlicht.

*) *Pogg. Ann.* Bd. 102 (1856).

Cap. XXI.

Wirkung des Magnetismus auf das Licht.

Leitende Gesichtspunkte für Entdeckungen.

806. Die wichtigste Vorbedingung zur Aufstellung einer Beziehung zwischen electromagnetischen und optischen Phänomenen bildet die Entdeckung der Verhältnisse, unter denen die eine Erscheinungsclasse durch die andere beeinflusst wird. Sucht man aber nach solchen Beeinflussungen zweier distincter Erscheinungsclassen, so muss man sich von den mathematischen und geometrischen Kenntnissen, die man sich hinsichtlich jeder derselben für sich schon erworben hat, leiten lassen. So sollte man sich, wenn man, wie es Mrs. Sommerville tat, eine Nadel durch Licht magnetisiren wollte, daran erinnern, dass die Unterscheidung, die wir zwischen magnetisch Nord und magnetisch Süd machen, sich namentlich auf Richtungen bezieht und sich sofort umkehrt, sowie man die Bedeutung gewisser rein conventionell eingeführter mathematischer Zeichen umkehrt. Bei der Electricität giebt uns die Electrolyse durch die Tatsache, dass wenn Wasser unter dem Einfluss eines Stromes zersetzt wird, an dem einen Pol stets Sauerstoff, an dem andern stets Wasserstoff sich ablagert, eine bestimmte physikalisch begründete Regel zur Unterscheidung positiver Electricität von negativer, bei dem Magnetismus existirt aber eine solche besondere Erscheinung nicht. Man darf also nicht erwarten, dass wenn man Licht auf ein Ende einer Nadel fallen lässt, dieses Ende einen bestimmten magnetischen Pol bekommen wird, denn die beiden Pole eines Magnets stehen zu einander nicht in der Beziehung wie Licht zu Lichtabwesenheit.

Eher würde man ein Resultat zu erwarten haben, wenn man sich des circular-polarisirten Lichtes bediente, und das eine Ende der Nadel von rechts gedrehtem, das andere von links gedrehtem bescheinen liesse, denn in gewisser Hinsicht stehen sich circular-rechts-polarisirtes und circular-links-polarisirtes Licht wirklich so wie Nord- und Südpol eines Magnets gegenüber. Doch ist die Analogie auch hier eine verfehlte, weil die beiden Lichtarten in ihrer Zusammensetzung zu einer sich nicht wie Nord- und Süd-

magnetismus vernichten, sondern einen geradlinig polarisirten Strahl hervorbringen.

Faraday, dem die Methoden zum Studium des Zwanges, welchen polarisirtes Licht in durchsichtigen Körpern verursacht, wohl bekannt gewesen sind, hat viele Versuche mit der speciellen Erwartung angestellt, dass er einen polarisirten Lichtstrahl bei seinem Durchgang durch ein Mittel, in welchem gerade electrolytische Leitung oder dielectrische Induction vor sich geht, verändert finden würde.*) Trotzdem er nun seine Versuche in der zur Auffindung von Spannungswirkungen vorteilhaftesten Weise anordnete — er liess die electrische Kraft oder den electrischen Strom senkrecht gegen die Richtung des Strahls und unter einem Winkel von 45° gegen die Ebene der Polarisation verlaufen — war er doch nicht im Stande, irgend eine solche Veränderung des Strahles zu constatiren. Er hat die Verhältnisse, unter denen er seine Experimente anstellte, vielfach variirt, aber keine Wirkung electrolytischer Ströme oder statischer Induction auf das Licht finden können.

Was ihm aber hier misslungen war, das glückte ihm beim Magnetismus, er entdeckte zwischen Licht und Magnetismus eine ganz bestimmte Beziehung. Seine diesbezüglichen Versuche sind in der neunzehnten Reihe**) seiner *Researches* beschrieben.

Faradays Entdeckung soll uns als Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen über die Natur des Magnetismus dienen, ich werde daher zunächst das von ihm beobachtete Phänomen beschreiben.

Wirkung des Magnetismus auf einen polarisirten Lichtstrahl.

807. Erscheinung. Man lässt einen in einer Ebene polarisirten Lichtstrahl durch ein durchsichtiges diamagnetisches Medium hindurchgehen und versichert sich dadurch, dass man einen hinter dem Medium befindlichen Analysator so lange dreht, bis der Strahl für den durch den Analysator schauenden Beobachter verschwindet, von der Lage, die seine Polarisationsebene einnimmt, wenn er aus dem Medium heraustritt. Dann führt man eine magnetische Kraft so ins Feld, dass sie innerhalb des Mediums nach der Richtung, die der Strahl einschlägt, wirkt. Sieht man jetzt durch den Analysator, so erscheint das Gesichtsfeld plötzlich wieder erhellt, dreht man den Analysator, so wird es nach einer gewissen Drehung wiederum dunkel. Daraus ergiebt sich, dass die magnetische Kraft die Natur des Strahls nicht geändert, dass sie aber seine Polarisationsebene um seine Fortpflanzungsrichtung als Axe durch einen gewissen Winkel gedreht hat, der so gross ist wie der, um welchen man den Analysator hat drehen müssen, um das Gesichtsfeld wieder zu verdunkeln.

---

*) *Exp. Res.* 951—954, 2216—2220.

**) *Pogg. Ann.* Bd. 68.

808. Regeln. Der Winkel, um welchen die magnetische Kraft die Polarisationsebene eines Strahles dreht, ist proportional

1) Der Länge des Weges, den der Strahl in dem betreffenden Medium zurücklegt. Die Polarisationsebene erleidet also ihre Verstellung nicht plötzlich, sondern allmälig, sie wird continuirlich von ihrem Eintritt in das Medium bis zu ihrem Austritt aus demselben gedreht.

2) Der Intensität des Teiles der magnetischen Kraft, welcher in Richtung des Strahles wirkt.

3) Endlich hängt der Betrag der Drehung von der Natur des Mediums, welches der Strahl durchsetzt, ab.

Diese drei besondern Regeln lassen sich zu einer allgemeinen Regel zusammenfassen, nämlich:

Die angulare Rotation der Polarisationsebene ist numerisch gleich dem Betrage, um welchen das magnetische Potential von dem Punkte, wo der Strahl in das Medium eintritt, bis zu dem, wo er dasselbe verlässt, anwächst, multiplicirt mit einem Coefficienten, der für diamagnetische Media gewöhnlich positiv ist.

809. Bei diamagnetischen Medien fällt die Richtung, in der die Polarisationsebene des Strahls gedreht wird, in die, welche ein rings um den Strahl circulirender Strom einschlagen muss, wenn er magnetisch in dem Medium nach derselben Richtung, wie die den Strom drehende magnetische Kraft wirken soll.

Doch hat Verdet gefunden, dass bei einigen ferromagnetischen Medien, wie beispielsweise bei einer Lösung von Eisen-Perchlorid in Holzgeist oder Aether, die Drehung nach der entgegengesetzten Richtung, wie die des gedachten Stromes geschieht.

Es würde diese Tatsache darauf hinweisen, dass der Unterschied, den man zwischen ferromagnetischen und diamagnetischen Substanzen macht, physikalisch wirklich begründet ist, und nicht blos davon herrührt, dass jene eine grössere, diese eine geringere magnetische Permeabilität als die Luft besitzen.

Unter gleichen Verhältnissen ist die Kraft, welche dazu gehört, die Polarisationsebene eines Lichtstrahls zu drehen, der diamagnetischen oder ferromagnetischen Magnetisirbarkeit nicht genau proportional. In der Tat giebt es auch Ausnahmen von der Regel, dass in diamagnetischen Substanzen die Drehung nach der positiven, in ferromagnetischen nach der negativen Seite vor sich geht. Beispielsweise ist neutrales Natriumchromat diamagnetisch, die Polarisationsebene eines dasselbe durchsetzenden Lichtstrahls wird aber von einer in seiner Richtung wirkenden Kraft nach der negativen Seite gedreht.

810. Unterschied gegen das specifische Drehungsvermögen gewisser Substanzen. Es giebt Substanzen, die auch ganz unabhängig von der Existenz einer magnetischen Kraft die Polarisationsebene eines durch sie hindurchgeschickten Lichtstrahls nach rechts oder nach links drehen.

Bei einigen derselben, so beim Quarz, steht dieses Drehungsvermögen in Beziehung zu einer bestimmten Axe. Bei andern, so bei Terpentin, Zuckerlösung u. a. m., ist es von der Richtung, die der Strahl einschlägt, unabhängig. Doch gilt für alle diese Substanzen die Regel, dass wenn in ihnen die Polarisationsebene eines Strahles wie eine rechtsdrehende Schraube gedreht wird, sie auch wie eine rechtsdrehende Schraube gedreht wird, wenn der Strahl durch das betreffende Medium nach der entgegengesetzten Richtung hindurchgeht. Der am Analysator sitzende Beobachter hat also, um das Gesichtsfeld nach Einführung des Mediums dunkel zu erhalten, den Analysator in Bezug auf sich selbst stets nach derselben Richtung zu drehen, sei es, dass der Strahl das Medium von Norden nach Süden oder von Süden nach Norden durchsetzt. In Bezug auf den Raum geschieht die Drehung natürlich in dem einen Falle entgegengesetzt wie in dem andern. Wenn dagegen die Polarisationsebene des ein Medium durchziehenden Strahles infolge einer magnetischen Kraftwirkung gedreht wird, so geschieht das, von welcher Seite auch, ob von Norden oder von Süden, der Strahl das Medium durchsetzt, in Bezug auf den Raum immer nach derselben Richtung. Immer ist bei einer, der positiven, Classe von Medien die Richtung dieselbe, bei der andern, der negativen, die entgegengesetzte, wie die eines den Strahl umschlingenden Stromes, der magnetisch nach derselben Richtung, wie die drehende magnetische Kraft, wirken würde.

Wird also ein Strahl, nachdem er ein Medium durchsetzt hat, von einem Spiegel in das Medium nach der Richtung, woher er gekommen, zurückgeschickt, so verdoppelt sich die Drehung seiner Polarisationsebene, wenn sie durch eine magnetische Kraft hervorgebracht wird; dagegen verschwindet sie, wenn die Drehung ohne magnetische Kraftwirkung lediglich durch das Drehungsvermögen der Substanz selbst zu Stande kommt, denn hier geschieht die Drehung beim Rückgang des Strahles absolut nach der entgegengesetzten Richtung, wie beim Hergang.

Theorie.

811. Auflösung eines plan-polarisirten Strahls in zwei circular-polarisirte. Die physikalische Erklärung der beschriebenen Erscheinungen unterliegt bedeutenden Schwierigkeiten, und man kann nicht sagen, dass eine solche Erklärung, sei es für die durch Magnetismus, sei es für die durch specifisches Drehungsvermögen hervorgebrachte Drehung der Polarisationsebene bisher gelungen ist. Wir können aber wenigstens die Vorbereitungen zu einer Erklärung treffen, wenn wir die durch die Beobachtung gelieferten Tatsachen gehörig analysiren.

Man weiss, dass zwei in Kreisen gleichförmig vor sich gehende Bewegungen von derselben Amplitude, aber von entgegengesetzten Richtungen in ihrer Zusammensetzung einer geradlinigen Vibration äquivalent sind.

Zur Periode hat die letztgenannte Vibration die Periode der Circularbewegung, zur Amplitude die doppelte Amplitude dieser. Ihre Richtung wird durch die der Linie dargestellt, die die zwei Stellen verbindet, wo zwei auf einer der Kreisbahnen nach entgegengesetzten Richtungen und gleichförmig sich bewegende Punkte einander treffen. Daraus folgt, dass, wenn man die Phase einer der Kreisbewegungen beschleunigt, die Richtung der entsprechenden geradlinigen Vibration, nach der Richtung, nach welcher die Beschleunigung stattgefunden hat, verdreht wird, und zwar um einen Winkel, der gleich der Hälfte der Beschleunigung der Phase ist.

Auch durch directe optische Versuche lässt sich nachweisen, dass zwei nach entgegengesetzten Richtungen circular-polarisirte Lichtstrahlen von gleicher Intensität vereinigt einen plan-polarisirten Strahl geben, und dass, wenn bei einem der Strahlen die Phase eine Beschleunigung erleidet, die Polarisationsebene der Resultante der beiden Strahlen sich um den halben Winkel der Phasenbeschleunigung dreht.

812. Interpretation der Drehung der Polarisationsebene. Da auch umgekehrt ein plan-polarisirter Lichtstrahl sich in zwei nach entgegengesetzten Richtungen circular-polarisirte Strahlen auflösen lässt, so kann man das Phänomen, welches die Drehung der Polarisationsebene eines plan-polarisirten Lichtstrahls bietet, so ausdrücken:

Es falle ein plan-polarisirter Strahl auf ein Medium. Ein solcher Strahl ist äquivalent zwei circular-polarisirten Strahlen, wovon in dem einen die Oscillation (in Bezug auf den Beobachter) nach rechts, in dem andern nach links vor sich geht. Nachdem der Strahl das Medium passirt hat, sei er immer noch plan-polarisirt, aber seine Polarisationsebene sei (für den Beobachter), etwa nach rechts, gedreht. Daher muss von den beiden dem Strahle äquivalenten circular-polarisirten Strahlen der, dessen Oscillationen nach rechts vor sich gehen, beim Durchgang durch das Medium gegen den andern eine Beschleunigung seiner Phase erlangt haben.

Anders ausgedrückt: Der rechtshändige Strahl hat relativ zum linkshändigen in dem Medium eine grössere Anzahl von Vibrationen ausgeführt, er besass also dort eine kleinere Wellenlänge als der linkshändige, der dieselbe Schwingungsdauer aufweist.

Dieser Ausdruck für die Erscheinung der rotatorischen Polarisation hängt nicht etwa von einer besondern Theorie des Lichtes ab, denn wenn wir auch der Nomenclatur der Undulationstheorie folgen und von Wellenlänge, circular-polarisirten Strahlen u. s. f. sprechen, also unsere Vorstellungen der genannten Theorie anpassen, so ist doch unser Raisonnement von dieser Anpassung an eine specielle Theorie unabhängig. Es wird nur von beobachtbaren Tatsachen bestimmt.

813. Wir untersuchen nun die Form, die einer der beiden Strahlen aufweist. Man kann eine Undulation, bei welcher an jedem Punkte die Vibration in einer Kreisbahn vor sich geht, durch eine Schnecken- oder

Schraubenlinie versinnbildlichen. Lässt man nämlich eine Schraube um ihre Axe rotiren, ohne sie dabei longitudinal zu verschieben, so beschreibt jedes Partikel derselben einen Kreis, der die Vibrationsbahn der Undulation an der betreffenden Stelle darstellt. Die Fortpflanzung der Undulation findet dann in der longitudinalen Verschiebung, die auf dem Grat der Schraube ähnlich gelegene Partikel bei der Rotation der Schraube um ihre Axe scheinbar erleiden, ihre Repräsentation.

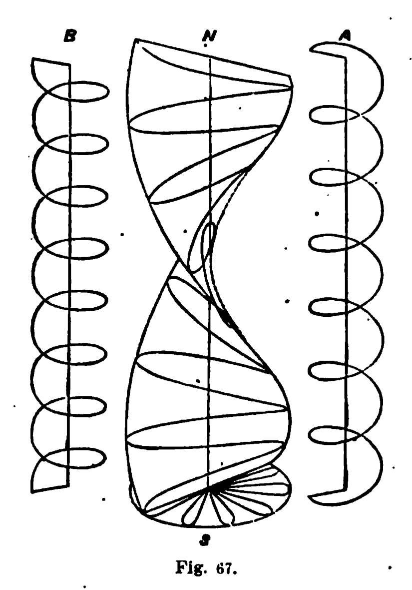


Fig. 67.

Man wird leicht erkennen, dass wenn die Schraube eine rechtsdrehende ist und der Beobachter sich an dem Ende befindet, nach dem die Undulation fortschreitet, die Bewegung der Schraube ihm linkshändig, also der Bewegungsrichtung der Zeiger einer Uhr entgegenlaufend erscheinen wird. Daher haben französische Schriftsteller eine solche Undulation eine linkshändig circularpolarisirte genannt.

Aehnlich wird man einen rechtshändig circular-polarisirten Strahl mit Hilfe einer linksdrehenden Schraube versinnbildlichen können.

In der beistehenden Fig. 67 repräsentirt die rechtsstehende rechtsdrehende Schraubenlinie A einen linkshändig, die linksstehende linksdrehende Schraubenlinie B einen rechtshändig circular-polarisirten Strahl.

814. Wir nehmen nun an, dass in einem Medium sich gleichzeitig zwei solche Strahlen, wie sie durch A und B repräsentirt werden, mit gleicher Wellenlänge fortpflanzen. Die beiden Strahlen sind einander in jeder Beziehung gleich, nur ist der eine die Perversion, gleichsam das Spiegelbild, des andern.

In einem von ihnen, in A, sei die Rotationsdauer der Partikel kürzer als in dem andern, das bedeutet, falls alle an dem Strahl wirkenden Kräfte nur den in demselben vor sich gehenden Verschiebungen ihre Entstehung verdanken, dass eine und dieselbe Verschiebung im Strahle mit der kürzern Rotationsdauer stärkere Kräfte als in dem mit der längern hervorbringt. Hiernach wird der linkshändige Strahl relativ zum rechtshändigen beschleunigt werden, gleichgiltig, ob die Strahlen die Richtung $N - S$ oder $S - N$ einhalten.

Darauf beruht die Erklärung der Erscheinungen, die in mit specifischem Drehungsvermögen ausgestatteten Medien, wie im Terpentin, auftreten. Bei diesen Medien ruft nämlich ein Strahl, der die Configuration A hat, grössere

Kräfte hervor, als wenn er die Configuration B besitzt, und die Kräfte hängen auch nur von der Configuration des betreffenden Strahles, nicht von seiner Richtung ab.

Wenn dagegen ein Medium, etwa ein diamagnetisches, für sich kein Drehungsvermögen hat, ein solches erst erlangt, wenn in ihm eine magnetische Kraft von S nach N wirkt, so rotirt von den beiden die Strahlen darstellenden Schrauben A und B allein diejenige mit der grössten Geschwindigkeit, dessen Bewegung einem von S nach N sehenden Auge in Richtung der Bewegung der Zeiger einer Uhr vor sich zu gehen scheint. Laufen beide Strahlen von S nach N, so wird hiernach der rechtshändige B die rascheste Bewegung aufweisen, laufen sie umgekehrt von N nach S, so wird es der linkshändige A tun.

815. Fassen wir einen Strahl für sich allein ins Auge, so wird die repräsentirende Schraube B, sei es, dass sie den Strahl, während er von S nach N oder während er von N nach S geht, darstellt, von immer derselben Configuration sein. Im erstern Falle bewegt sich der Strahl, wenn die magnetische Kraft von S nach N wirkt, rascher, die repräsentirende Schraube rotirt also auch schneller, als im zweiten. Es kommen demnach im ersten Falle auch stärkere Kräfte ins Spiel. Daher hängen hier die Kräfte nicht allein von der Configuration des Strahls, sondern auch von der Richtung, nach der seine einzelnen Teilchen sich bewegen, ab.

Diese Interpretation ist zunächst weiter nichts als eine neue Beschreibung der Erfahrungstatsachen, und dient zur mechanischen Versinnbildlichung der Vorgänge. Sie gewinnt aber an physikalischer Bedeutung durch die nachstehende Theorie der magnetischen Wirbel.

Existenz magnetischer molecularer Wirbel.

816. Welcher Art auch die Störung, die wir als Licht wahrnehmen, sein mag, sie ist jedenfalls eine gerichtete Grösse, ein Vector, und verläuft senkrecht zum Wege, den der Strahl verfolgt. Den Beweis dafür liefert die Combination der Tatsache, dass zwei Strahlen zu interferiren und unter gewissen Bedingungen Dunkelheit hervorzubringen vermögen, mit der, dass eine Interferenz unter keinen Umständen eintreten kann, wenn die Polarisationsebenen der beiden Strahlen zu einander senkrecht stehen. Da also die Interferenz zweier Strahlen von der Neigung ihrer Polarisationsebenen gegen einander abhängt, so muss zunächst die Störung notwendig eine gerichtete Grösse sein, und da ferner keine Interferenz stattfindet, wenn die Polarisationsebenen der beiden Strahlen einander senkrecht schneiden, so muss der Vector, der die Störung darstellt, gegen die Schnittlinie der beiden Polarisationsebenen, das heisst gegen den Strahl, senkrecht stehen.

817. Zieht man die z Axe in Richtung des Strahles, so kann dem obigen zufolge die Störung, die er fortpflanzt, in zwei nach den Axen der x und y

verlaufende Componenten zerlegt werden. Ich bezeichne die eine Componente mit ξ, die andere mit η. Für einen Strahl homogenen circularpolarisirten Lichtes ist dann

1) $$\xi = r\cos\vartheta, \quad \eta = r\sin\vartheta,$$

wenn

2) $$nt - qz + \alpha = \vartheta$$

gesetzt wird, und r die Grösse der Störung, ϑ den Winkel, den diese mit der Richtung der x Axe einschliesst, bezeichnet.

Für die Periode τ der Störung hat man die Gleichung

3) $$n\tau = 2\pi,$$

und für ihre Wellenlänge λ die

4) $$q\lambda = 2\pi.$$

Hiernach wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

5) $$V = \frac{n}{q}.$$

α bedeutet die Phase der Störung zur Zeit $t = 0$ und an der Stelle $x = y = z = 0$ des Strahles.

Ob der Strahl rechts- oder linkshändig polarisirt ist, hängt davon ab, ob die Grösse q negativ oder positiv ist.

Ferner gehen die circularen Vibrationen der Partikel des Strahls in der xy Ebene vor sich und geschehen nach der Richtung einer positiven Rotation, wenn n positiv, nach der einer negativen, wenn n negativ ist.

Die Fortpflanzungsrichtung des Strahles ist positiv, der Strahl bewegt sich in Richtung der positiven z Axe, wenn n und q beide dasselbe Zeichen haben, er geht in Richtung der negativen z Axe, wenn die genannten Grössen entgegengesetzte Zeichen aufweisen.

Bei allen Medien variiren n und q gleichzeitig, und bei allen Medien hat dn/dq stets dasselbe Zeichen wie n/q. Ist also für einen bestimmten numerischen Betrag von n der Wert von n/q grösser, wenn n positiv als wenn es negativ ist, so wird, wenn q nach Grösse und Zeichen gegeben ist, und jedem q bei vorgeschriebenem r zwei dem Sinne nach entgegengesetzte Werte des n entsprechen, der zugehörige positive Wert von n grösser als der negative sein.

Das ist es aber gerade, was man bei diamagnetischen Medien, wenn in ihnen in Richtung der z Axe eine magnetische Kraft γ wirkt, beobachtet. In der Tat, von den beiden circular-polarisirten Strahlen von gegebener Periode wird der beschleunigt, bei welchem die in der xy Ebene liegenden Vibrationsbahnen eine positive Richtung haben (dem also ein positives n zugehört). Von zwei circular-polarisirten Strahlen, die beide linkshändig sind und die innerhalb des Mediums gleiche Wellenlänge haben, wird also

der Strahl die kürzere Periode aufweisen, bei welchem die Vibrationen in der positiven Richtung vor sich gehen, also der Strahl, welcher der positiven Richtung der z Axe und damit der Richtung der magnetischen Kraftwirkung folgt.

Die Tatsachen lehren hiernach in der Tat, dass jedem q, r zwei Werte des n entsprechen, dass der eine Wert des n positiv, der andere negativ ist, und dass endlich der positive Wert des n numerisch grösser als der negative ist. Ich werde jetzt zeigen, welche Folgerungen sich daraus für die Vorgänge in dem Medium ergeben.

818. Wie immer sind die Bewegungsgleichungen aus den im Felde tätigen Energieen zu deduciren. Von den Energieen, die daselbst angetroffen werden, ist aber die eine potentieller, die andere kinetischer Natur.

Die potentielle Energie V des Systems hängt von der Configuration desselben, also von der Lage seiner Teilchen gegen einander ab, und da wir es hier mit einer Störung r zu tun haben, die circular-polarisirtes Licht constituirt, so wird V eine Function allein von der Amplitude r der Störung und dem Coefficienten q sein. Sie kann für numerisch gleiche, dem Zeichen nach aber entgegengesetzte Werte des q verschiedene Beträge haben, und sie wird sogar wahrscheinlich in den Medien, die für sich schon die Polarisationsebene eines Lichtstrahls zu drehen vermögen, solche besitzen.

Die kinetische Energie T des Systems ist eine homogene Function zweiten Grades der in dem System vorkommenden Geschwindigkeiten; die Coefficienten der Function werden von den Coordinaten der einzelnen Teilchen abhängen.

819. Nach den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen haben wir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Ich nehme an, dass der Strahl seine Intensität nicht ändert, r ist dann constant, und die obige Gleichung reducirt sich auf

$$-\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

Zu den Geschwindigkeiten, von denen T eine homogene Function zweiten Grades sein sollte, gehört offenbar auch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$, mit der ein Teilchen sich in seiner Kreisbahn bewegt, diese Winkelgeschwindigkeit ist aber nichts anderes als unsere Grösse n, daher wird T ein Glied $A'n^2$ enthalten.

Da T auch noch von andern Geschwindigkeiten abhängen kann, so muss auch ein Glied $B'n$ vertreten sein, wo B' eine lineare homogene Function dieser andern Geschwindigkeiten ist. Die potentielle Energie V ist natürlich von n unabhängig, wir haben also der letzten Gleichung zufolge

$$An^2 + Bn + C = 0.$$

Daraus folgt schon, dass n für jedes r und q zwei Werte besitzt. Die Erfahrung lehrt ferner, dass beide Werte reell sind; dass einer positiv, der andere negativ ist; dass endlich der positive den negativen numerisch überragt.

Nach bekannten Sätzen hat man nun, falls n_1, n_2 die Wurzeln der Gleichung in n angeben,

$$A(n_1 + n_2) + B = 0,$$
$$A n_1 n_2 - C = 0.$$

Ist also A positiv, so sind B und C beide negativ, daher verschwindet B, wenigstens wenn magnetische Kräfte das Medium angreifen, nicht; und die in der kinetischen Energie T vertretene Grösse $B\dot{n}$ ist als der angularen Geschwindigkeit der Störung proportional anzusehen.

820. Nun ist aber jedes Glied von T in Bezug auf Geschwindigkeit von der zweiten Dimension, die Glieder, welche n zum Factor haben, werden also noch von andern Geschwindigkeiten abhängen. Da wir r und q als in Bezug auf die Zeit constant anzusehen haben, können $\dot{r}$ und $\dot{q}$ nicht zu diesen andern Geschwindigkeiten gehören. Es muss also in dem Medium noch eine Geschwindigkeit vorhanden sein, die von der von uns als Licht aufgefassten Erscheinung nicht hervorgebracht wird. Weiter ist T eine scalare Grösse, daher muss die noch erforderliche Geschwindigkeit so beschaffen sein, dass ihr Product mit n eine scalare Grösse liefert, das heisst, diese Geschwindigkeit muss die directe oder die entgegengesetzte Richtung der Geschwindigkeit n haben, sie ist also eine Winkelgeschwindigkeit einer um die z Axe vor sich gehenden Rotation.

Dreht man ferner das Medium herum, so ändert sich, wie die Erfahrung lehrt, nichts an der Erscheinung der electromagnetischen Rotation der Polarisationsebene, die besagte Geschwindigkeit kann also nicht etwas dem Medium für sich zukommendes bilden, sie muss direct von der magnetischen Kraft abhängen.

Aus alledem ziehen wir den Schluss, dass diese Geschwindigkeit ein steter Begleiter der magnetischen Kraft ist, wenn sie in Medien wirkt, in denen sie die Polarisationsebene eines Lichtstrahls zu drehen vermag.

821. Ich habe mich bisher einer Ausdrucksweise bedient, die sich vielleicht zu eng an die in der Undulationstheorie gewöhnlich angenommenen Bewegungen anlehnt. Es ist aber leicht, das Resultat, zu dem wir gelangt sind, so zu formuliren, dass es von besondern Bewegungshypothesen befreit wird.

Was auch Licht sein mag, jedenfalls geht da, wo es auftritt, irgend etwas vor, sei es eine Verschiebung, oder eine Rotation oder etwas, wofür uns überhaupt eine geeignete Vorstellung fehlt. Ferner hat der Vorgang sicher Richtung und zwar eine zum Strahl senkrechte Richtung, wofür die Interferenzerscheinungen den unzweideutigen Beweis liefern.

Bei circular-polarisirtem Licht bleibt die Grösse des Vorganges immer dieselbe, seine Richtung rotirt aber um die des Strahles und vollführt

in einer Periode der Welle eine volle Umdrehung. Die Unentschiedenheit, die bei plan-polarisirtem Licht hinsichtlich der Richtung des Vorganges relativ zur Polarisationsebene herrscht — man weiss nur, dass der Vorgang zu dieser Ebene parallel oder senkrecht gerichtet ist — dehnt sich auf unsern Fall des circular-polarisirten Lichtes nicht aus. Richtung und angulare Geschwindigkeit des Vorganges sind völlig bekannt, wenngleich seine physikalische Natur und seine momentane absolute Richtung uns unbekannt bleiben.

Tritt nun ein in einem circular-polarisirten Strahl sich fortpflanzender derartiger Vorgang in ein Medium ein und findet er daselbst eine magnetische Kraft vor, so wird er von dieser, dadurch, dass die Richtung seiner Rotation zu der der magnetischen Kraft in Beziehung kommt, beinflusst. Daraus schliessen wir genau so wie in Art. 817, dass in dem Medium, wenn es von einer magnetischen Kraft angegriffen wird, eine gewisse — wir nennen sie magnetische — rotatorische Bewegung vor sich geht, deren Axe in die Richtung der magnetischen Kraftwirkung fällt; und weiter, dass, wenn circular-polarisirtes Licht das Medium so durchsetzt, dass die Rotationsrichtung seiner Vibrationen mit der der magnetischen zusammen fällt, es sich mit einer andern Geschwindigkeit fortpflanzt, wie wenn die Richtung seiner Vibrationen der der magnetischen entgegenläuft.

Man sieht, ein Medium, welches magnetische Kraftlinien fortleitet, ähnelt einem, durch welches ein circular-polarisirter Strahl hindurchgeht, da hier wie dort Vibrationen in Kreisen stattfinden. Weiter geht aber die Aehnlichkeit nicht, denn beim optischen Phänomen ist es der dasselbe constituirende Vorgang, welcher rotirt, die Rotation geht senkrecht zur Strahlrichtung vor sich und geschieht eine bekannte Anzahl Mal in der Secunde.

Was in magnetischen Phänomen rotirt, hat keine Eigenschaften, die geeignet wären, seine laterale Ausbildung erkennen zu lassen, man vermag also auch nicht zu entscheiden, wie oft es in der Secunde rotirt. Das magnetische Phänomen hat also auch nichts der Wellenlänge und der Wellenfortpflanzung Analoges. Ein Medium, in welchem eine constante magnetische Kraft wirkt, ist deshalb nicht, wie es beim Licht der Fall ist, infolge dieser Kraftwirkung mit nach einer Richtung sich fortpflanzenden Wellen angefüllt. Die einzige Aehnlichkeit zwischen dem optischen und magnetischen Phänomen besteht darin, dass bei beiden an jeder Stelle des Mediums etwas existirt, was von der Natur einer Winkelbewegung um eine in Richtung der magnetischen Kraft verlaufende Axe ist.

Hypothese der Molecular-Wirbel.

822. Die magnetischen Wirbel sind molecular. Die nähere Untersuchung der Wirkung des Magnetismus auf polarisirtes Licht führt, wie wir gesehen haben, zu dem Schluss, dass in einem Medium, welches unter dem Einfluss einer magnetischen Kraft steht, nebenbei noch etwas vorgeht,

was mathematisch derselben Classe wie eine Winkelgeschwindigkeit angehört, deren Axe in die Richtung der magnetischen Kraft fällt. Diese Winkelgeschwindigkeit kann nicht einem Teile des Mediums als Ganzes angehören. Es rotiren also im Medium nicht etwa Teile von endlichen Dimensionen, vielmehr muss man annehmen, dass die magnetische Rotation von den kleinsten Teilchen des Mediums dadurch, dass diese sich um ihre eigenen Axen drehen, ausgeführt wird. Diese Annahme bildet die Hypothese von den *Molecularen Wirbeln.*

Obgleich wir nun aus der in Art. 575 nachgewiesenen Nichtexistenz der electrokinetischen Energie T_{me} schliessen müssen, dass diese molecularen Wirbel die sichtbare Bewegung molarer Körper nicht zu beeinflussen vermögen, so ist es doch denkbar, dass sie die Vibrationsbewegungen, von denen nach der Undulationstheorie die Fortpflanzung des Lichtes abhängt, afficiren. In der Tat müssen die durch den Durchgang des Lichtes bedingten Verschiebungen des Mediums die molecularen Wirbel stören, und diese ihrerseits werden gegenwirkend die optischen Verschiebungen und damit die Fortpflanzung des Lichtes afficiren.

823. Störung der magnetischen Wirbel durch optische Verschiebungen. Da wir noch nichts über die Natur der gedachten Wirbel wissen, können wir auch nicht sagen, nach welchem Gesetz sie von den optischen Verschiebungen im Medium gestört werden. Ich werde daher annehmen, dass, wenn Verschiebungen im Medium die molecularen Wirbel stören, die Variation dieser unter den Bedingungen vor sich geht, welche Helmholtz in seiner bedeutenden Abhandlung über Wirbelbewegung*) für die Variation der Wirbel einer vollkommenen Flüssigkeit aufgestellt hat.

Das Helmholtzsche Gesetz lässt sich so aussprechen:

Zwei auf der Axe eines Wirbels gelegene, benachbarte Partikel P, Q mögen im Verlaufe der Bewegung der Flüssigkeit nach den bezüglichen Punkten P', Q' gelangen, dann repräsentirt die Linie P', Q' die neue Richtung der Axe des Wirbels und ferner verhält sich die frühere Stärke (eine Grösse, die proportional der resultirenden Rotationsgeschwindigkeit ist) des Wirbels zu der, die er jetzt besitzt, wie $P'Q'$ zu PQ.

Um den Satz analytisch auszudrücken, bezeichne ich mit α, β, γ die Componenten der Stärke eines Wirbels und mit ξ, η, ζ die der Verschiebung des Mediums zur Zeit t. Dann ist nach der Veränderung des Wirbels

$$\text{1)}\qquad \begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \alpha\frac{\partial\xi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\xi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\xi}{\partial z}, \\ \beta' &= \beta + \alpha\frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta\frac{\partial\eta}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\eta}{\partial z}, \\ \gamma' &= \gamma + \alpha\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \beta\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\zeta}{\partial z}. \end{aligned}$$

*) *Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.* Crelle, Bd. 55, p. 25 ff. (1858) oder Gesammelte Abhandlungen 101 ff.

Ich nehme an, dass ganz dieselben Bedingungen erfüllt bleiben, wenn α, β, γ nicht mehr die Componenten der Stärke eines gewöhnlichen Wirbels, sondern die einer im Medium wirkenden magnetischen Kraft darstellen.

824. Kinetische Energie dieser Störung. Die zweite Annahme, die ich mache, soll darin bestehen, dass wenn $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Componenten der durch die Lichtbewegung verursachten Winkelgeschwindigkeit eines Partikels des Mediums angeben, die kinetische Energie des Mediums auch ein Glied von der Form

$$\text{II}') \qquad dT_1 = 2\,C(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3)\,dx\,dy\,dz$$

enthält; das ist gleichbedeutend mit der Hypothese, dass die Winkelgeschwindigkeit, die ein Partikel des Mediums durch die Fortpflanzung des Lichtes erhält, mit der Bewegung, durch welche die magnetischen Erscheinungen erklärt werden, in Verbindung treten kann.

Die kinetische Energie des ganzen Mediums erhalten wir durch Integration über den Rauminhalt des Mediums, hiernach wird

$$1') \qquad T_1 = 2\,C\iiint(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3)\,dx\,dy\,dz.$$

Es ist aber

$$\text{a)} \qquad \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right), \end{aligned}$$

also

$$1) \quad T_1 = C\iint(\gamma\dot\eta - \beta\dot\zeta)\,dy\,dz + C\iint(\alpha\dot\zeta - \gamma\dot\xi)\,dz\,dx + C\iint(\beta\dot\xi - \alpha\dot\eta)\,dz\,dy$$
$$+ C\iiint\left\{\dot\xi\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + \dot\eta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \dot\zeta\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right\}dx\,dy\,dz$$

Die Doppelintegrale sind auf die Grenzfläche, die dreifachen Integrale auf den Rauminhalt des Mediums zu erstrecken. Da wir nun für unsere Betrachtungen die Grenzfläche des Mediums uns ins Unendliche entfernt vorstellen dürfen, so verschwinden die Doppelintegrale (Art. 635), und wir haben es bei der Untersuchung dessen, was im Innern des Mediums vorgeht, nur mit dem dreifachen Integral zu tun.

Es wird also

$$1\text{a}) \quad T_1 = C\iiint\left\{\dot\xi\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + \dot\eta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \dot\zeta\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right\}dx\,dy\,dz.$$

825. Ich bezeichne mit u, v, w die Componenten der electrischen Strömung an der Stelle x, y, z des Körpers; den fundamentalen Gleichungen E) zufolge wird dann

$$1\text{b)}\qquad T_1 = 4\pi C\iiint(\dot{\xi}u + \dot{\eta}v + \dot{\zeta}w)\,dx\,dy\,dz.$$

Daher ist unsere zweite Hypothese gleichbedeutend mit der Annahme, dass die Geschwindigkeit $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$ der das Licht constituirenden Verschiebung mit der electrischen Strömung (u, v, w) in Verbindung treten kann.

826. Wenn nun die molecularen Wirbelbewegungen durch die optischen Verschiebungen Variationen erleiden, so gehen die α, β, γ über in α', β', γ', und da unserer ersten Hypothese gemäss diese Variationen dem Helmholtzschen Gesetze folgen sollen, so werden wir in dem unter 1a) für T gegebenen Ausdruck α, β, γ durch die unter I) aufgestellten Ausdrücke für α', β', γ' zu ersetzen haben. Ich führe das schon bei andern Gelegenheiten verwendete Symbol

$$\frac{\partial}{\partial h} = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}$$

ein.

Der analytische Ausdruck unserer ersten Hypothese ist dann

$$\text{I)}\qquad \begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \frac{\partial\xi}{\partial h}, \\ \beta' &= \beta + \frac{\partial\eta}{\partial h}, \\ \gamma' &= \gamma + \frac{\partial\zeta}{\partial h}, \end{aligned}$$

daher der der zweiten

$$\text{II)}\qquad \begin{aligned} T_1' = T + C\iiint\Big\{&\dot{\xi}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial h} - \frac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial h}\right) + \dot{\eta}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial h} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial h}\right) \\ &+ \dot{\zeta}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial h} - \frac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial h}\right)\Big\}\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}$$

Störung durch ebene Wellen. Pflanzt der Strahl ebene Wellen fort, so sind die Verschiebungen Functionen allein von z und t, also

$$\frac{\partial}{\partial h} = \gamma\frac{\partial}{\partial z}$$

und

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0.$$

Für eine plane Welle wird also

$$T_1' = T + C\iiint\left\{-\dot{\xi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z} + \gamma\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right) + \dot{\eta}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \gamma\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)\right\}dx\,dy\,dz.$$

Für uns hat nur der Teil der Energie Interesse, der von der Veränderung der Wirbel herrührt; ich führe daher die weitere Specialisirung ein, dass das electromagnetische Feld im Medium gleichförmig sein soll; α, β, γ hängen dann nicht von x, y, z ab, und es wird

$$1_1)\qquad T_1 = C\iiint\left\{\dot\eta\,\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} - \dot\xi\,\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right\}\gamma\,dx\,dy\,dz.$$

Das ist der Teil der kinetischen Energie, welcher von der Einwirkung der optischen Verschiebung auf die magnetischen Wirbel herrührt. Die gesammte kinetische Energie bekommt man, wenn man dazu noch die kinetische Energie der Verschiebung selbst hinzufügt. Daher ist die ganze kinetische Energie, so weit sie durch die Existenz der optischen Verschiebung und deren Wirkung auf die molecularen Wirbel hervorgerufen wird,

$$2'a)\qquad T = \iiint\left\{\frac{1}{2}\rho\left(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2\right) + C\gamma\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\dot\eta - \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\dot\xi\right)\right\}dx\,dy\,dz,$$

wo ρ die Dichte des Mediums angiebt.

Man hat nun für ein unendlich ausgedehntes Medium, wie eine zweimal hinter einander ausgeführte partielle Integration lehrt,

$$\iiint\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\dot\eta\,dx\,dy\,dz = \iiint\xi\,\frac{\partial^3\eta}{\partial z^2\partial t}\,dx\,dy\,dz,$$

$$\iiint\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\dot\xi\,dx\,dy\,dz = \iiint\eta\,\frac{\partial^3\xi}{\partial z^2\partial t}\,dx\,dy\,dz,$$

also auch

$$2'b)\qquad T = \iiint\left\{\frac{1}{2}\rho\left(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2\right) + C\gamma\left(\xi\,\frac{\partial^3\eta}{\partial z^2\partial t} - \eta\,\frac{\partial^3\xi}{\partial z^2\partial t}\right)\right\}dx\,dy\,dz,$$

somit wird die auf Volumeinheit bezogene Energie des Mediums auch

$$2)\qquad \Theta = \frac{1}{2}\rho\left(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2\right) + C\gamma\left(\xi\,\frac{\partial^3\eta}{\partial z^2\partial t} - \eta\,\frac{\partial^3\xi}{\partial z^2\partial t}\right).$$

827. Bewegungsgleichungen des Lichtes in electromagnetisch drehenden Medien. Die auf Volumeinheit des Mediums bezogene, infolge der Existenz der optischen Verschiebung und deren Beeinflussung der molecularen Wirbel einwirkende Kraft hat nur zwei, zur z Axe senkrechte Componenten X, Y, die nach den Lagrangeschen Gleichungen zu berechnen sind. Aus dem für Θ gegebenen Ausdruck folgt aber

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\dot\xi} = \rho\dot\xi,\quad \frac{\partial\Theta}{\partial\dot\eta} = \rho\dot\eta;\quad \frac{\partial\Theta}{\partial\xi} = C\gamma\,\frac{\partial^3\eta}{\partial z^2\partial t},\quad \frac{\partial\Theta}{\partial\eta} = -\,C\gamma\,\frac{\partial^3\xi}{\partial z^2\partial t},$$

also wird

$$
3)\qquad
\begin{aligned}
X &= \rho\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\gamma C\,\frac{\partial^2\frac{d\eta}{dt}}{\partial z^2},\\
Y &= \rho\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2C\gamma\,\frac{\partial^2\frac{d\xi}{dt}}{\partial z^2}.
\end{aligned}
$$

Integriren lassen sich diese Gleichungen natürlich nicht eher, als bis man in ihnen auch für die linken Seiten bestimmte Ausdrücke in ξ und η einzusetzen vermag. Bei isotropen Medien hat man für diese linken Seiten die Cauchyschen Ausdrücke zu verwenden, also

$$
4)\qquad
\begin{aligned}
X &= A_0\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + A_1\frac{\partial^4\xi}{\partial z^4} + \dots\\
Y &= A_0\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} + A_1\frac{\partial^4\eta}{\partial z^4} + \dots
\end{aligned}
$$

zu machen.

Abhängigkeit der electromagnetischen Drehung der Polarisationsebene von der Farbe des Strahls.

828. Ableitung aus der Theorie molecularer Wirbel. Der Lichtstrahl war bis jetzt nur der Bedingung unterworfen worden, dass er eine ebene Welle in Richtung der z Axe fortpflanzte. Ich nehme jetzt specieller an, dass er circular-polarisirt ist, das heisst, dass

$$
a)\qquad \xi = r\cos(nt - qz),\quad \eta = r\sin(nt - qz)
$$

ist.

Die auf Volumeinheit bezogene kinetische Energie wird dann nach Gleichung 2) in Art. 826

$$
b)\qquad T = \frac{1}{2}\rho r^2 n^2 - C\gamma r^2 q^2 n,
$$

die potentielle ebenfalls auf Volumeinheit bezogene nach Cauchy

$$
c)\qquad V = r^2(A_0 q^2 - A_1 q^4 + \dots) = r^2 Q,
$$

wo Q eine Function von q^2 angiebt.

Nach der in Art. 819 aufgefundenen Bedingung für die freie (d. h. ohne Veränderung der Intensität vor sich gehende) Fortpflanzung des Strahles sollte

$$
\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r}
$$

sein. Daraus folgt die Gleichung

$$
1)\qquad \rho n^2 - 2C\gamma q^2 n = Q.
$$

829. Indem der Strahl durch das Medium hindurchgeht, wird seine Polarisationsebene gedreht, das heisst q erleidet durch die einwirkende magnetische Kraft eine Veränderung. Wie die Erfahrung lehrt, ist aber diese Veränderung äusserst gering gegen den Betrag von q selbst, man darf also

d) $$q = q_0 + \gamma \frac{\partial q}{\partial \gamma}$$

setzen und unter q_0 den Wert von q verstehen, den q besitzen würde, wenn die magnetische Kraft den Strahl nicht angriffe.

Der Winkel ϑ, um welchen die Polarisationsebene des Strahles beim Durchgang durch die Dicke c des Mediums gedreht wird, ist die negative (negativ wegen des Zeichens, mit dem q in die Ausdrücke für ξ und η eingeht) halbe Summe der Werte von qc an den Endflächen des Mediums, er wird demnach

2') $$\vartheta = -c\gamma \frac{\partial q}{\partial \gamma}.$$

Durch Differentiation der Gleichung 1) resultirt

$$(2\rho n - 2C\gamma q^2)\,\partial n - \left(\frac{dQ}{dq} + 4C\gamma q n\right)\partial q - 2Cq^2 n\,\partial\gamma = 0,$$

also

e) $$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = -\frac{Cq^2 n}{\rho n - C\gamma q^2}\frac{\partial q}{\partial n}.$$

Ferner ist, wenn λ die Wellenlänge des Strahles in Luft, i den zugehörigen Refractionsindex des Mediums angiebt, und v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bedeutet,

f) $$q\lambda = 2\pi i, \quad n\lambda = 2\pi v,$$

also

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{1}{\lambda}\left(2\pi\frac{\partial i}{\partial \lambda} - q\right)\frac{\partial \lambda}{\partial n} = \frac{2\pi}{\lambda^2}\left(\frac{\partial i}{\partial \lambda}\lambda - i\right)\frac{\partial \lambda}{\partial n}$$

oder

g) $$\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{2\pi}{n\lambda}\left(i - \lambda\frac{di}{d\lambda}\right).$$

Unter Benutzung dieser und der Gleichung e) geht die Gleichung 2') für die Drehung ϑ der Polarisationsebene über in

2) $$\vartheta = \frac{4\pi^2 C}{v\rho} c\gamma \frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda\frac{di}{d\lambda}\right)\frac{1}{1 - 2\pi C\gamma \frac{i^2}{v\rho\lambda}}.$$

Das im Nenner stehende Glied $2\pi C\gamma i^2/v\rho\lambda$ ist, wie man leicht bemerkt, von derselben Grössenordnung wie der Winkel, um welchen der Strahl

gedreht wird, wenn er in dem Medium einen der Hälfte seiner Wellenlänge gleichen Weg zurücklegt, es darf daher gegen die 1 fortgelassen werden. Schreibt man dann noch

$$\frac{4\pi^2 C}{v\rho} = m, \tag{3}$$

so wird

$$\vartheta = mc\gamma \frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda}\right). \tag{2$_1$}$$

m kann man als den *Magnetischen Rotationscoefficienten* des betreffenden Mediums bezeichnen. Sein Betrag muss durch die Beobachtung eruirt werden. Man weiss, dass er für die meisten diamagnetischen Medien positiv, für einige ferromagnetische negativ ist.

Die Gleichung unter 2_1) stellt das Schlussresultat unserer Theorie dar. Ich recapitulire deshalb die Bedeutung der in ihr vertretenen Grössen.

ϑ ist der Winkel, um welchen die Polarisationsebene des Strahls gedreht wird,

m ist eine von der Natur des Mediums abhängige, durch Beobachtungen zu eruirende Constante,

γ ist der Teil der magnetischen Kraft, der im Medium in Richtung des Strahles wirkt,

c ist die Länge des Weges, den der Strahl im Medium zurücklegt,

λ ist die Wellenlänge des Strahls in Luft,

i ist der der Wellenlänge λ zukommende Brechungsexponent des Mediums.

830. Vergleichung mit der Erfahrung. Die Richtigkeit der für ϑ abgeleiteten Formel ist bis jetzt nur dadurch geprüft worden, dass man durch ein und dasselbe Medium verschiedene Lichtarten hindurchgehen liess, und den Winkel ϑ, um welchen ihre Polarisationsebene durch eine im Medium wirkende Kraft gedreht wurde, in jedem Falle mass.

Die meisten der in der angedeuteten Weise angestellten Experimente rühren von Verdet*) her. Seine Resultate bestehen in Folgendem.

1. Die magnetischen Rotationen der Polarisationsebenen verschiedenfarbiger Lichtstrahlen verhalten sich gegen einander nahezu umgekehrt wie die Quadrate der Wellenlängen der bezüglichen Strahlen.

2. Die strenge Regel des Phänomens geht dahin, dass das Product aus der Drehung in das Quadrat der Wellenlänge von dem am wenigsten brechbaren zu dem brechbarsten Teile des Spectrums anwächst.

3. Das bezeichnete Anwachsen des Products aus Rotation und dem Quadrate der Wellenlänge tritt bei Körpern mit grosser Zerstreuungskraft am stärksten hervor.

*) *Recherches sur les propriétés optiques développées dans les corps transparents par l'action du magnétisme*, 4me partie. *Comptes Rendues* T. LVI p. 630 (April 1863).

Verdet hat auch gefunden, dass in einer Lösung von Weinsäure, die für sich schon Drehungsvermögen aufwies, die magnetische Rotation der specifischen nicht proportional verlief.

In einem spätern*) Zusatz zu seiner Abhandlung veröffentlichte er dann eine Reihe sorgfältiger an Schwefelkohlenstoff und Kreosot — Substanzen, bei denen die Abhängigkeit des Products aus Rotation und Quadrat der Wellenlänge von der Farbe des Lichtes sehr auffallend war — ausgeführter Versuche. Zur Darstellung seiner Zahlenergebnisse wählte er die folgenden drei Formeln

$$\text{(I)}\quad \vartheta = mc\gamma \frac{i^2}{\lambda^2}\left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda}\right),$$

$$\text{(II)}\quad \vartheta = mc\gamma \frac{1}{\lambda^2}\left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda}\right),$$

$$\text{(III)}\quad \vartheta = mc\gamma \left(i - \lambda \frac{di}{d\lambda}\right).$$

Die erste (I) ist dieselbe, zu der unsere Theorie uns geführt hat. Die zweite (II) würde sich ergeben, wenn man in unsern unter 3) in Art. 827 gegebenen Bewegungsgleichungen die Glieder $\partial^3\eta/\partial z^2\partial t$ und $-\partial^3\xi/\partial z^2\partial t$ durch $\partial^3\eta/\partial t^3$ und $-\partial^3\xi/\partial t^3$ ersetzte; ich weiss aber nicht ob irgend eine Theorie zu den Bewegungsgleichungen, die dann resultiren würden, geführt hat. Die dritte (III) resultirt aus Carl Neumanns physikalischer Theorie**), bei dem die Bewegungsgleichungen Glieder von der Form $\partial\eta/\partial t$ und $-\partial\xi/\partial t$ enthalten***).

Es ist klar, dass die mit (III) bezeichnete Interpolationsformel die Rotation auch nicht annähernd umgekehrt wie das Quadrat der Wellenlänge variiren lässt. Dagegen tun das die unter (II) und (I) aufgestellten, sie geben denn auch für ϑ Werte, die wenigstens bei Medien mit mässigem Zerstreuungsvermögen ziemlich gut mit der Erfahrung übereinstimmen.

Mit den am Schwefelkohlenstoff gemachten Erfahrungen stimmt die Formel (II) wenig, die Formel (I) besser überein, doch weicht die letztere

---

*) *Comptes Rendues* LVII. p. 670 (Oct. 1863).

**) *Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur. Halis Saxonum 1858.*

***) Die angeführten drei Formen für die Bewegungsgleichungen hat zuerst Airy (*Phil. Mag.* Juni 1846) zur Analysirung der damals noch neuen Entdeckung Faradays herangezogen. Vorher hatte jedoch schon Mac Cullagh zur Erklärung der specifischen Drehung beim Quarz Glieder von der Form $\partial^3/\partial z^3$ den Bewegungsgleichungen optischer Vibrationen hinzugefügt. Doch haben beide Forscher ihre Gleichungen nicht zur mechanischen Erklärung des Phänomens gegeben. Sie wollten nur zeigen, dass die beteffende Erscheinung sich analytisch durch Gleichungen ausdrücken liess, bei denen man vielleicht hoffen durfte sie einst aus einer mechanischen Hypothese ableiten zu können, wenngleich eine solche Hypothese noch nicht aufgestellt worden war.

beim Kreosot viel stärker von den Tatsachen ab, als sich durch Beobachtungsfehler erklären liesse.

Ich gebe eine kleine Zusammenstellung der Resultate, zu denen **Verdet** gelangt ist.

Magnetische Rotation der Polarisationsebene (nach Verdet).

Schwefelkohlenstoff bei 24°,9 C.

Spectrallinie		*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Beobachtete Rotation		592	768	1000	1234	1704
Berechnet nach	I.	589	760	1000	1234	1713
„	II.	606	772	1000	1216	1640
„	III.	943	967	1000	1034	1091

Rotation für die Linie *E*: 25°,88.

Kreosot bei 24°,3 C.

Spectrallinie		*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Beobachtete Rotation		573	758	1000	1241	1723
Berechnet nach	I.	617	780	1000	1210	1603
„	II.	623	789	1000	1200	1565
„	III.	976	993	1000	1017	1041

Rotation für die Linie *E*: 21°,58.

Die Einheiten beziehen sich auf die Rotation des Strahles von der Farbe der Linie *E*.

Unsere Kenntnisse von der innern molecularen Structur der Körper sind einstweilen noch so mangelhaft, dass wir eine wirklich zufriedenstellende Theorie einer so besondern Erscheinung, wie es die magnetische Rotation der Polarisationsebene von Lichtstrahlen bildet, sobald nicht erwarten können. Man wird sich so lange gedulden müssen, bis eine genügende Anzahl von verschiedenen Erscheinungen bekannt ist, die alle von Wirkungen, die sich auf die **Molekel** der Körper beziehen, abhängen, um erst einiges bestimmte über die Eigenschaften, die man den Molekeln zur Erklärung der Erscheinungen zuzuschreiben hat, zu erfahren.

Daher trägt denn auch die Theorie, die ich auf den voraufgehenden Seiten entwickelt habe, einen provisorischen Charakter. Sie beruht auf Hypothesen über die Natur der molecularen Wirbel, für deren Richtigkeit noch kein Beweis existirt, und supponirt für die Störung dieser durch optische Verschiebungen Gesetze, über deren Giltigkeit sich nichts Gewisses aussagen lässt. Findet man dennoch, dass die Resultate dieser Theorie mit der Erfahrung einigermassen übereinstimmen, so hat das nicht sowohl für die besondere Theorie über die magnetische Rotation der Polarisationsebene von Lichtstrahlen, als vielmehr für die electromagnetische Theorie des Lichtes wissenschaftlichen Wert, denn diese macht zwar besondere Annahmen über die electrischen Eigenschaften der Körper, sie beruht aber nicht auf einer Speculation über die Natur ihrer Molekel.

831. Thomsons Theorie. Die ganze in diesem Capitel auseinandergesetzte Theorie muss als die weitere Ausführung einer hochbedeutenden Bemerkung angesehen werden, die Sir William Thomson in den *Proc. R. S.* vom Juni 1856 gemacht hat. Er sagt: Der magnetische Einfluss auf das Licht hängt von der Richtung der Bewegung sich verschiebender Partikel ab. Denkt man sich z. B. in einem Medium, das die von Faraday entdeckte Eigenschaft besitzt, Teilchen, die ursprünglich längs einer den magnetischen Kraftlinien parallelen Geraden lagen, nach einer Schraubenlinie verschoben, deren Axe mit dieser Geraden zusammenfällt, erteilt man ihnen Bewegungen längs der Schraubenlinie und projicirt sie auf zur Axe senkrechten Ebenen, so dass sie in diesen Kreise beschreiben, so werden sie eine andere Geschwindigkeit besitzen, wenn sie von rechts nach links, als wenn sie von links nach rechts rotiren. Die elastische Gegenwirkung des Mediums für gleiche Verschiebungen muss aber, wie auch Geschwindigkeit und Richtung der Partikel sein mag, dieselbe Grösse haben, das heisst die Kräfte, welche den Centrifugalkräften der Circularbewegung der Partikel das Gleichgewicht halten, müssen in beiden genannten Fällen von demselben Betrage sein, während doch die lichttragenden Bewegungen ungleich ausfallen. Da also die absoluten Kreisbewegungen entweder ganz gleich sind, oder doch gleiche Centrifugalkräfte den Partikeln mitteilen, so folgt daraus, dass die lichttragenden Bewegungen nur Componenten der Gesammtbewegung sein können. Eine nach der einen Richtung vor sich gehende lichttragende Circularbewegung wird daher mit der Bewegung, die in dem Medium, wenn es kein Licht beherbergt, vorhanden ist, eine ebenso grosse resultirende Bewegung liefern, wie eine grössere, aber nach der andern Richtung vor sich gehende lichttragende Bewegung mit derselben von der Lichtexistenz unabhängigen Bewegung in dem Medium. Die Tatsache, dass ein circular-polarisirter Lichtstrahl, wenn er durch magnetisirtes Glas einmal in Richtung der Kraftlinien der magnetisirenden Kraft, ein andermal in der diesen entgegengesetzten Richtung hindurchgeht, trotzdem er in beiden Fällen genau dieselben Eigenschaften aufweist (er ist in beiden Fällen nach derselben Richtung polarisirt und hat in beiden Fällen dieselbe Intensität), doch in dem einen Falle sich mit einer grössern Geschwindigkeit als in dem andern fortpflanzt, lässt sich nur durch diese dynamische Erklärung verstehen. Ich glaube sogar beweisen zu können, dass eine andere Erklärung der beregten Tatsache ausgeschlossen ist. Hiernach scheint Faradays Entdeckung einen Beweis dafür zu liefern, dass Ampères Erklärung des letzten Grundes des Magnetismus nicht blos eine Annahme ist, dass sie vielmehr auf Realität beruht.

Ferner giebt sie eine aus der dynamischen (Bewegungs)-Theorie der Wärme hergeholte Definition für Magnetisiren. Führt man nämlich in die mechanische Entwickelung von Rankines Hypothese der „Molecularwirbel" das Princip der Erhaltung der Flächen ein, so scheint eine Linie angezeigt zu werden, welche zur Ebene des resultirenden Rotationsmoments (zu der

„unveränderlichen Ebene“) der thermischen Bewegungen senkrecht steht. Die Linie würde der Axe eines magnetisirten Körpers entsprechen, für welchen dann das resultirende Moment der Momente aller thermischen Bewegungen das bestimmte Maass des „magnetischen Moments“ geben würde. Darnach würden alle Phänomene der electromagnetischen Attraction und Repulsion ebenso wie der electromagnetischen Induction einfach in der Trägheit und dem Druck der Materie, deren Bewegung sich als „Wärme“ bemerkbar macht, ihre Erklärung finden.

Ob diese Materie Electricität ist oder nicht ist, ob sie ein continuirliches Molekel als Nuclei einschliessendes Fluidum ist, ob sie endlich selbst moleculare Structur besitzt, das lässt sich eben so wenig, wie die Frage, ob alle Materie continuirlich ist, und die von uns bemerkte moleculare Heterogeneität nur durch die Existenz einer endlichen Anzahl von Wirbeln oder andern relativen Bewegungen an einander grenzender Teile hervorgerufen wird, entscheiden; vielleicht ist auch bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft jede weitere Speculation ganz vergeblich.“

So weit Thomson. Ich glaube, wir haben jetzt allen Grund anzunehmen, dass in einem magnetischen Felde etwas wie eine Rotation vor sich geht, dass diese Rotation von einer sehr grossen Anzahl sehr kleiner Teilchen des das Feld ausfüllenden Mediums ausgeführt wird. Jedes Molekel würde um seine eigene Axe rotiren, und diese Axe würde der Richtung der magnetischen Kraft parallel laufen. Die Rotationen der einzelnen Molekel, die molecularen Wirbel, würden mit einander durch irgend einen Mechanismus in Verbindung stehen.*)

Die Wirkungsweise dieses verbindenden Mechanismus habe ich an einem Modell klar zu machen versucht, doch darf dieses Modell natürlich nur als das angesehen werden, was es ist, nämlich als Demonstrationsstück dafür, dass man sich wirklich einen Mechanismus herstellen kann, der eine Verbindung einzelner Teile schafft, die der wirklichen Verbindung der Teilchen eines electromagnetischen Feldes äquivalent ist. In der Tat lässt ja auch das Problem der Bestimmung des Mechanismus, durch den bestimmte Bewegungen bestimmter Teile eines Feldes zu einander in bestimmte Beziehung treten, eine unendliche Anzahl von Lösungen zu. Von diesen Lösungen werden einige mehr, einige weniger complicirt sein, alle werden sie aber den allgemein gestellten Bedingungen zu genügen haben.

Resultate der Theorie der molecularen Wirbel. Doch sind die folgenden Resultate der Theorie von höherer Bedeutung und dauernderem Wert.

1) Magnetische Kraft ist die Wirkung der von den Molecularwirbeln entwickelten Centrifugalkraft.

*) In den *Phil. Mag.* vom März, April, Mai 1861 und Januar, Februar 1862 habe ich eine ausgedehnte Theorie der Molecularwirbel veröffentlicht.

2) Electromagnetische Induction der Ströme ist ein Effect der Kräfte, welche ins Spiel kommen, wenn die Geschwindigkeit der Wirbel sich verändert.

3) Electromotorische Kraft entsteht durch den Zwang auf den die Wirbel mit einander verbindenden Mechanismus.

4) Electrische Verschiebung entsteht durch das elastische Nachgeben des verbindenden Mechanismus.

Cap. XXII.

Erklärung des Ferromagnetismus und des Diamagnetismus durch moleculare Ströme.

— ·⁎· —

Electromagnetische Theorie des Magnetismus.

832. Die Poisson-Webersche Hypothese von der Constitution der Magnete. Wir haben gesehen, dass die Wirkung, welche Magnete auf einander ausüben, vollständig durch die Attractionen und Repulsionen einer supponirten Substanz, die als „magnetische Materie“ bezeichnet worden ist, dargestellt werden kann. Ferner haben wir Gründe kennen gelernt, die uns zu der Annahme führten, dass diese magnetische Materie nicht, wie es wol, wenn man einen Stab magnetisirt, den Anschein hat, von einem Teile eines Magnets zu einem andern von ihm in messbarer Entfernung befindlichen überzugehen vermag. Dadurch sind wir zu Poissons Hypothese geführt worden, dass die magnetische Materie strict an die einzelnen Molekel der magnetischen Substanz gebunden ist, woraus folgen würde, dass ein magnetisirtes Molekel ein Molekel ist, in welchem zwar die entgegengesetzten Arten der magnetischen Materie von einander mehr oder weniger getrennt sind, dass aber kein Teil einer der Materien je wirklich vom Molekel abgetrennt zu werden vermag. (Art. 430).

Diese Annahmen, die uns durch die Tatsachen aufgedrängt worden sind, zeigen unmittelbar, dass das Magnetisiren eines Eisenstückes nicht eine das Stück, sondern seine Molekeln, das heisst, die Teilchen, die durch keine Kraft mehr so zerlegt werden können, dass ihre eine Hälfte nur einen Nordpol, ihre andere nur einen Südpol aufweist, betreffende Erscheinung bildet. Doch ist durch diese Erkenntnis der Orte, wo die Vorgänge beim Magnetisiren sich abspielen, noch nichts über die Natur der Orte selbst, über die der magnetischen Molekel, gewonnen. Wir haben weiter (Art. 442) eine Reihe von zwingenden Gründen dafür kennen gelernt, dass der Act des Magnetisirens von Eisen oder Stahl nicht darauf beruht, dass man den Molekeln des betreffenden Körpers die Magnetisirung erst mitteilt. Vielmehr

sind diese Molekel schon von vornherein, selbst im unmagnetischen Zustande des Körpers magnetisch, ihre Axen folgen aber, wenn der Körper noch nicht magnetisirt ist, ohne Unterschied allen möglichen Richtungen, und das Magnetisiren besteht darin, dass diese Axen alle einer Richtung entweder ganz parallel gelegt oder wenigstens zugedreht werden.

Aber auch durch die letzte Erkenntnis haben wir noch nichts über die Beschaffenheit der magnetischen Molekel erfahren, womit ich sagen will, dass sie uns nichts kennen gelehrt hat, wodurch wir ein magnetisches Molekel mit einem andern unserer Vorstellung geläufigen Gegenstande vergleichen könnten.

Daher haben wir uns auch noch mit Ampères Hypothese von der Constitution der Magnete zu beschäftigen.

833. Die Ampèresche Hypothese von der Constitution der Magnete Ampère nimmt bekanntlich an, dass die Molekel ihren Magnetismus Strömen verdanken, die in ihrem Innern in geschlossenen Bahnen fliessen. Handelt es sich um die Wirkung eines Magnets auf ausserhalb seiner Substanz gelegene Punkte, so kann man in der Tat durch eine Schicht electrischer Ströme, die auf seiner Oberfläche in geeigneter Weise verteilt sind, diese Wirkung vollständig nachahmen. Allein die Wirkung, die ein Magnet auf in seinem Innern gelegene Punkte ausübt, ist völlig verschieden von der, welche die substituirten Ströme ebendaselbst hervorbringen. Daraus schloss Ampère, dass wenn man den Magnetismus durch electrische Ströme erklären will, man diese Ströme nicht von Molekel zu Molekel fliessen lassen darf, sondern als innerhalb der einzelnen Molekel fliessend ansehen muss. Da wir in dem Innern eines Molekels die magnetische Kraftwirkung nicht zu messen vermögen, können wir diese Hypothese nicht in derselben Weise als unrichtig nachweisen, wie wir es bei der, dass Magnete durch endlich ausgedehnte Ströme in jeder Hinsicht sollten ersetzt werden können, zu tun im Stande waren.

Ferner weiss man, dass wo ein Strom von einem Teile eines Leiters zu einem andern übergeht, er mit einem Widerstand zu kämpfen hat und infolgedessen Wärme entwickelt. Flössen also gewöhnliche Ströme um ausgedehnte Stücke eines Magnets, so müsste fortwährend Arbeit verbraucht werden, um sie zu unterhalten, und der Magnet würde seinerseits eine nie versiegende Energiequelle sein. Wenn dagegen die Strombahnen in die Molekel selbst hinein verlegt werden, so hat man den Vorteil, dass man eben von einem Widerstande der Substanz eines Molekels nichts weiss, man darf, ohne einen Widerspruch befürchten zu müssen, behaupten, dass ein Strom, wenn er in dem Innern eines Molekels circulirt, keinen Widerstand zu überwinden hat.

Nach Ampères Theorie rühren also alle Phänomene des Magnetismus von electrischen Strömen her, deren jeder in dem Innern eines Molekels in geschlossener Bahn fliesst. Könnte man in dem Innern eines magnetischen Molekels die magnetische Kraft messen, so würde man sie daselbst denselben

Gesetzen unterworfen finden, denen die magnetische Kraft sonst in einem von einem Strom umflossenen Gebiete gehorcht.

834. Als wir daran gingen, Ausdrücke für die in dem Innern eines Magnets von diesem ausgeübten Kräfte aufzustellen, mussten wir an dem Orte, wo die Kraftwirkung gemessen werden sollte, uns eine kleine Höhlung hergestellt denken. Dadurch sind wir zur Conception zweier distincter Grössen gelangt, der magnetischen Kraft und der magnetischen Induction, die beide an Stellen gemessen werden sollten, von denen die magnetische Materie entfernt ist. In ein magnetisches Molekel aber einzudringen und die daselbst ausgeübte Kraft zu messen, waren wir nicht im Stande.

Nach Ampères Theorie des Magnetismus haben wir nun einen Magnet nicht als eine continuirliche Substanz, bei der die Magnetisirung von Punkt zu Punkt nach einem leicht zu verstehenden Gesetze variirt, anzusehen, wir müssen ihn vielmehr als ein Aggregat einer grossen Menge von Molekeln betrachten, von denen jedes ein in ihm circulirendes Stromsystem trägt, und so für sich eine höchst complicirte Verteilung der magnetischen Kraft hervorbringt. Innerhalb eines Molekels würde dann die magnetische Kraft im allgemeinen der mittlern in seiner Umgebung vorhandenen magnetischen Kraft entgegen wirken. Das magnetische Potential des Magnets wäre, wo es existirt, von so vielen Mannigfaltigkeitsgraden, als Molekel in dem Magnete enthalten sind.

835. Vereinfachung der mathematischen Behandlung durch Ampères Hypothese. Obgleich aber die Ampèresche Hypothese, namentlich deshalb, weil sie die Coexistenz einer Menge einfacher Teilchen annimmt, zu äusserst complicirten Ausdrücken leiten zu müssen scheint, so gewinnt man doch eine bedeutende Vereinfachung der Theorie des Magnetismus, wenn man sie acceptirt und damit den mathematischen Calcul gewissermassen auch in das Innere der magnetischen Molekel einführt.

Zunächst reduciren sich die beiden Definitionen für magnetische Kraft, von denen die eine ausserhalb, die andere innerhalb der Substanz eines Magnets gelten sollte, zu einer Festsetzung, die sowohl für das Innere des Magnets, als für den Aussenraum Verwendung findet.

Ferner genügen die Componenten der magnetischen Kraft überall der Bedingung, der sonst nur die der Induction gehorchen, dass nämlich

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}=0$$

ist. Die magnetische Kraft ist also nach dieser Theorie überall so verteilt, wie die Geschwindigkeit in einer incompressibeln Flüssigkeit, oder, wie wir uns unter Benutzung eines in Art. 25 eingeführten Begriffs ausdrücken können, die magnetische Kraft ist überall ein Vector ohne Convergenz.

Endlich treten die drei Vectoren — das electrokinetische Moment, die magnetische Kraft und die electrische Strömung — in einfachere Beziehung

zu einander, als es die alte Theorie zulässt. Jede dieser drei Grössen ist ein Vector ohne Convergenz, und die eine resultirt aus der andern, wenn man an dieser die in Art. 25 definirte Hamiltonsche Operation ∇ ausführt.

836. Die molecularen Ströme haben bei ferromagnetischen Medien eine Präexistenz. Wir wollen aber jetzt den Magnetismus nicht von seiner mathematischen, sondern von seiner physikalischen Seite behandeln, und müssen daher in die Eigenschaften der molecularen Ströme einzudringen suchen.

Ich nehme also an, dass in einem vorliegenden Molekel ein Strom circulirt, und dass dieser mit keinem Widerstande zu kämpfen hat. Sei L der Coefficient der Selbstinduction des molecularen Stromes, M der Coefficient seiner Induction gegen irgend einen andern Strom, bezeichne γ die Stärke, mit der er, und γ' die, mit der ein anderer mit ihm in Wechselwirkung tretender Strom in seiner Bahn fliesst. Nach Art. 581 haben wir dann

$$\frac{d}{dt}(L\gamma + M\gamma') + R\gamma = 0,$$

und da nach Ampères Hypothese $R = 0$ ist, so folgt durch Integration der vorstehenden Gleichung

$$1') \qquad L\gamma + M\gamma' = \text{Const.} = L\gamma_0.$$

Die Ströme, von denen unser Molecularstrom beeinflusst wird, sind nun die andern Molecularströme des Magnets. Bringen diese zusammen eine magnetische Kraft von der Grösse X hervor, welche längs einer Linie wirkt, die mit der Axe des betrachteten Molecularstroms den Winkel ϑ einschliesst, so wird, wenn wir unter $M\gamma'$ jetzt die Induction **aller** andern Molecularströme auf unsern Molecularstrom verstehen,

$$2) \qquad M\gamma' = XA\cos\vartheta$$

zu setzen und unter A der Flächeninhalt der Projection der vom Melecularstrom umflossenen Fläche auf eine zur Axe des Molekels senkrechte Ebene zu verstehen sein. Als Axe haben wir dabei die Linie anzusehen, welche zu der Ebene senkrecht steht, auf welcher die genannte Projection A den grössten Wert aufweist.

Hiernach wird

$$1) \qquad L\gamma + XA\cos\vartheta = L\gamma_0,$$

γ_0 bezeichnet den Wert von γ, der für $X = 0$ stattfindet.

Die Stärke des Molecularstromes hängt also lediglich von seiner Stärke im ursprünglichen Zustande des Körpers und von der Intensität der magnetischen Kraft, die die übrigen Molecularströme dieses Körpers in dem betrachteten Zustande hervorbringen, ab.

837. Setzt man voraus, dass der Körper, wenn er noch nicht magnetisch ist, keine Molecularströme besitzt, so wird $\gamma_0 = 0$ und

$$1_1) \qquad \gamma = -\frac{XA}{L}\cos\vartheta.$$

Der Molecularstrom verdankt dann seine Existenz lediglich der Induction. Ferner zeigt das Zeichen des auf der rechten Seite stehenden Ausdrucks, dass er entgegengesetzt wie der inducirende Strom verläuft, und dass die magnetische Kraft, die er in dem Innern seines Trägers hervorruft, der in seiner Umgebung herrschenden entgegenwirkt. Mit andern Worten: der Molecularstrom wirkt magnetisch so, wie es ein kleiner Magnet tun würde, wenn seine bezüglichen Pole den gleichnamigen Polen des inducirenden Magnets gegenüber ständen. Das ist aber gerade das entgegengesetzte von dem, was man an einer magnetischen Kraft unterworfenen Eisenmolekeln bemerkt, daher können die Molecularströme in ferromagnetischen Substanzen nicht durch Induction allein hervorgerufen sein. Bei diamagnetischen Substanzen tritt dagegen genau die beschriebene Erscheinung ein, hier werden also die Molecularströme durch Induction entstehen, und wirklich hat Weber die diamagnetische Polarität so zu erklären versucht.

Webers Theorie des Diamagnetismus.

838. Die Molekel besitzen nur bestimmte widerstandslose Strombahnen. Weber nimmt in seiner Theorie des Diamagnetismus an, dass in den Molekeln diamagnetischer Substanzen gewisse Canäle vorhanden sind, innerhalb deren ein electrischer Strom, ohne Widerstand zu finden, zu circuliren vermag. Fügt man noch die weitere Hypothese hinzu, dass diese Canäle jedes Molekel nach allen möglichen Richtungen durchziehen, so ist Webers Annahme gleichbedeutend mit der, dass die Molekel diamagnetischer Substanzen vollkommene Leiter sind.

Beschränken wir uns aber zunächst auf lineare Ströme. Nach der Schlussbemerkung des voraufgehenden Artikels haben wir dann für die Stärke des unter dem Einfluss der magnetisirenden Kraft X inducirten Molecularstromes

$$1) \qquad \gamma = -\frac{XA}{L}\cos\vartheta.$$

Das magnetische Moment dieses Molecularstromes ist gleich γA, und der Teil m_ϑ seines Moments, mit dem er in Richtung der magnetisirenden Kraft wirkt, $\gamma A \cos\vartheta$, also wird

$$2') \qquad m_\vartheta = -\frac{XA^2}{L}\cos^2\vartheta.$$

Enthält die Volumeinheit des betrachteten Körpers n solche Molecularströme, und sind die Axen dieser nach allen möglichen Richtungen des Raumes ganz gleichmässig verteilt, so wird, weil der Mittelwerth von $\cos^2\vartheta$ dann gleich 1/3 ist, das auf Volumeinheit bezogene Moment des Körpers, also die Stärke seiner Magnetisirung

$$m = -\frac{1}{3}\frac{nXA^2}{L}. \tag{2}$$

Der **Neumann**sche Coefficient $\varkappa$ wird demnach

$$\varkappa = -\frac{1}{3}\frac{nA^2}{L}. \tag{3}$$

n, A^2, L sind positive Grössen, $\varkappa$ ist daher eine negative Grösse, das heisst, die Substanz magnetisirt sich nach der der magnetisirenden Kraft entgegenlaufenden Richtung. Ferner variirt die Stärke ihrer Magnetisirung genau proportional der Stärke der magnetisirenden Kraft, sie strebt also mit wachsender magnetisirender Kraft nicht — wie es (Artt. 442 ff.) bei der magnetischen Induction immer geschieht — einer bestimmten Grenze zu.

839. Die Ableitung der Gleichung 3) beruhte auf der Supposition, dass die Axen der inducirten Molecularströme, also auch die Canäle, innerhalb deren diese fliessen, alle möglichen Richtungen ganz gleichmässig einschlagen. Findet das nicht statt, so hat man

$$\varkappa = -\sum \frac{A^2}{L}\cos^2\vartheta.$$

Die Summation erstreckt sich auf alle in einer Volumeinheit der Substanz enthaltenen Molekel. $\varkappa$ wird dann je nach der Richtung der Linie, von der aus die Winkel ϑ gezählt werden, verschiedene Werte besitzen. Die Verteilung dieser verschiedenen Werte ist ähnlich der Verteilung der Werte für das Trägheitsmoment eines Körpers, wenn man die Axe, auf welche dasselbe bezogen wird, um einen festen Punkt herumdreht.

Eine solche Verteilung würde die magnetischen Phänomene zu erklären im Stande sein, welche in Beziehung zu einer Axe stehen, also die von **Plücker** beschriebenen und von **Faraday** als Magnekrystallische bezeichneten (Art. 425, 435).

840. Die electromagnetische Kraft, welche den Winkel ϑ, den die Axe eines Molecularstromes gegen die Richtung der Kraft X bildet, zu vergrössern strebt, ist nach Art. 583

$$\Theta = \gamma\gamma'\frac{\partial M}{\partial\vartheta} = -\gamma XA\sin\vartheta, \tag{4a}$$

also zufolge der Gleichung 1) in Art. 838

$$\Theta = -\frac{X^2A^2}{L}\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{4b}$$

Je nachdem also θ kleiner oder grösser als ein rechter Winkel ist, fällt diese Kraft positiv oder negativ aus. Daraus folgt, dass die auf den Canal, in welchem der Strom γ fliesst, wirkende magnetische Kraft ihn so zu drehen sucht, dass seine Axe die Richtung der magnetischen Kraft, ihre Kraftlinie, senkrecht schneidet, seine Ebene demnach der betreffenden Kraftlinie sich parallel legt. Die durch die magnetisirende Kraft inducirten Molecularströme werden also die Ebenen der molecularen Canäle der Wirkungslinie der Kraft parallel zu richten suchen.

Eine ähnliche Erscheinung kann man bemerken, wenn man einen Kupferpfennig oder einen Kupferring zwischen die Pole eines Electromagnets bringt. So wie der Electromagnet erregt wird, dreht der Pfennig seine Ebene der axialen Richtung zu. Die Kraft, die die Drehung bewirkt, verschwindet aber, wenn die im Pfennig inducirten Ströme im Kampfe gegen den Widerstand des Kupfers ihre Energie verloren haben.

841. Die Molekel sind vollkommene Leiter. Wir wollen nun zusehen, zu welchen Resultaten wir gelangen, wenn wir die Beschränkung, dass die Molecularströme auf bestimmte Canäle angewiesen sind, fallen lassen und dafür annehmen, dass jedes Molekel der Substanz für sich ein vollkommener Leiter ist.

Ich betrachte erst den Fall, wo ein Körper, der ein einfach zusammenhängendes Gebiet in sich begreift (der also nicht ringförmig oder durchbohrt ist) von einer dünnen Lage einer vollkommen leitenden Substanz bedeckt ist.

In Art. 655 ist bewiesen worden, dass eine geschlossene Schale vollkommen leitender Substanz, wenn sie von vornherein keine electrischen Ströme besitzt, unter dem Einfluss einer äussern magnetischen Kraft so inducirt wird, dass ihre magnetische Wirkung die der äussern magnetischen Kraft in allen von ihr eingeschlossenen Punkten vollständig aufhebt. Wie das zugeht, wird man vielleicht verstehen können, wenn man beachtet, dass die magnetische Kraft in der Umgebung einer solchen Schale sich ähnlich verteilt wie die Geschwindigkeit in einer incompressibeln Flüssigkeit in der Umgebung eines starren, der Schale gleich geformten Körpers. Bringt man daher in den Hohlraum einer solchen Schale andere leitende Schalen, so werden diese trotz der Existenz der ausserhalb der Schale wirkenden magnetischen Kraft stromlos bleiben. Daraus schliessen wir, dass, wenn eine magnetische Kraft auf einen Körper von vollkommen leitender Substanz wirkt, sie nur auf seiner Oberfläche, nicht aber in seinem Innern electrische Ströme zu induciren im Stande ist.

842. Hat dieser Körper die Form einer Kugel vom Radius r, so ist das magnetische Moment, das er unter dem Einfluss der gleichmässig magnetisirenden Kraft X annimmt, wie man sich leicht überzeugt,

$$m' = -\frac{1}{2} r^3 X.$$

Liegen in einem Medium in der Volumeinheit n solcher Kugeln eingebettet, so haben wir für das Moment der Volumeinheit

$$m = -\frac{1}{2} n r^3 X.$$

$\frac{4}{3}\pi n r^3$ ist aber das Volumen, welches diese Kugeln in der Volumeinheit zusammen einnehmen, daher wird, wenn wir das Verhältnis des Volumens der leitenden Kugeln zu der Volumeinheit mit k' bezeichnen, der in Art. 430b definirte Poissonsche magnetische Coefficient

$$k = -\frac{1}{2} k'.$$

Für den Neumannschen Coefficienten erhalten wir nach Gleichung 5) in Art. 430b

$$\varkappa = -\frac{3}{4\pi} \frac{k'}{2 + k'},$$

und für den Maxwell-Faradayschen

$$\mu = \frac{2 - 2k'}{2 + k'}.$$

Verbindung von Webers Hypothese drehbarer Molecularmagnete mit der Ampèreschen Theorie.

843. Ich habe bisher nur die Erscheinungen betrachtet, welche die allein durch äussere Kräfte erweckten molecularen Ströme aufweisen, und will nun untersuchen, welchen Einfluss die Webersche Theorie von der magnetoelectrischen Induction molecularer Ströme auf Ampères Theorie des gewöhnlich so genannten Magnetismus ausübt. Nach Ampère und Weber sind die in magnetischen Substanzen cursirenden molecularen Ströme nicht erst durch Induction der äussern magnetisirenden Kraft entstanden. Sie sind vielmehr seit jeher in denselben vorhanden, und die Wirkung der äussern magnetisirenden Kraft besteht darin, dass sie diese Ströme electromagnetisch angreift und dadurch mittelbar die Molekel der betreffenden Substanz dreht und richtet. Als Ampère seine Hypothese bildete, wusste man noch nichts von der magneto-electrischen Induction, dieser Forscher hat daher weder für die Existenz der molecularen Ströme eine plausible Erklärung zu geben, noch die Stärken derselben zu bestimmen versuchen können.

Wir dagegen sind in der Lage, auf diese Ströme in magnetischen Substanzen die Gesetze, die Weber auf die Ströme in diamagnetischen Substanzen angewendet hat, ebenfalls in Anwendung zu bringen. In der Tat besteht der einzige Unterschied zwischen der Theorie der magnetischen

Substanzen und der der diamagnetischen darin, dass bei diesen die in Art. 836 eingeführte Grösse γ_0 gleich Null zu setzen war, bei jenen dagegen einen von Null verschiedenen Wert erhalten muss.

Demnach haben wir für die Stärke eines bestimmten Molecularstromes, der eine Fläche von Inhalt A umfliesst und von einer gegen seine Axe um ϑ geneigten magnetischen Kraft X angegriffen wird,

1) $$\gamma = \gamma_0 - \frac{XA}{L}\cos\vartheta.$$

Das Moment Θ des Kräftepaares, welches den Strom so zu drehen sucht, dass die Neigung ϑ seiner Axe gegen die Richtung der magnetischen Kraft vergrössert wird, ist wie in Art. 840 gleich $\gamma\gamma'\partial M/\partial\vartheta$, also zufolge der Gleichung 1)

2) $$\Theta = -\gamma_0 XA\sin\vartheta + \frac{X^2A^2}{2L}\sin 2\vartheta.$$

Wenn die Drehung des Stromes den ihr zukommenden Betrag erreicht hat, tritt Gleichgewicht ein. Dann ist aber nach Art. 443 dasselbe Moment auch gleich $-mD\sin(\alpha-\vartheta)$. Für m, das magnetische Moment des molecularen Stromes, haben wir nach Ampère $A\gamma_0$ zu setzen, wir bekommen also zur Bestimmung des Winkels, um den die Axe des Stromes gegen die Richtung der magnetischen Kraft X schliesslich geneigt ist, die Gleichung

3) $$D\sin(\alpha-\vartheta) = X\sin\vartheta - BX^2\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

wo also

$$A\gamma_0 = m, \quad \frac{A}{L\gamma_0} = B$$

gesetzt ist.

Die Gleichung dient zur Bestimmung des Winkels ϑ.

Ferner haben wir für das magnetische Moment, das der Strom in seinem neuen Zustande aufweist, nach Ampère $A\gamma$, also für den Teil dieses Moments, der sich in Richtung der magnetisirenden Kraft X fühlbar macht, $\gamma A\cos\vartheta$ oder nach Einsetzung des Wertes von γ

4a) $$m' = \gamma A\cos\vartheta = \gamma_0 A\cos\vartheta - \frac{XA^2}{L}\cos^2\vartheta,$$

oder

4b) $$m' = m\cos\vartheta\,(1 - BX\cos\vartheta).$$

844. Die alte Webersche Theorie lieferte für die beiden Gleichungen 3) und 4b) nach Art. 443 die

3') $$D\sin(\alpha-\vartheta) = X\sin\vartheta,$$

4'b) $$m' = m\cos\vartheta.$$

Unsere jetzigen Gleichungen sind also durch neueingetretene mit B multiplicirte Glieder von diesen Weberschen verschieden.

Wenn BX ein Verhältnis zu Eins klein ausfällt, werden sie näherungsweise dieselben Werte für θ und m', wie die Weberschen für den Magnetismus geltenden ergeben, wenn für BX dagegen ein grosser Betrag gegeben ist, werden sie für die genannten Grössen dieselben Werte wie die Weberschen auf den Diamagnetismus bezogenen finden lassen.

Je grösser nun γ_0, die Stärke des molecularen Stromes, im ursprünglichen Zustande des Körpers ist, desto kleiner fällt B aus. Doch hängt der Betrag, den B zu erreichen vermag, auch noch von L, dem Coefficienten der Selbstinduction seiner Bahn, ab. Für einen Strom, der in einem ringförmigen Canal fliesst, ist aber L eine Function von $\log(R/r)$, wo $2R$ die mittlere Weite der Mittellinie und r der Radius eines Querschnitts des Canals ist. L wird also um so grösser, d. h. B um so kleiner sein, je kleiner das Verhältnis des Querschnitts des Canals zu der von ihm umgebenen Fläche ist. Man kann also die Formeln, die unsere Theorie liefert, auch beim Magnetismus den Weberschen nahe bringen, wenn man annimmt, dass erstens die molecularen Ströme von je her mit grosser Stärke fliessen, und zweitens die Canäle, die ihnen den widerstandslosen Weg anweisen, im Verhältnis zu ihrer Weite sehr eng sind. Doch kommt eine völlige Uebereinstimmung nicht zu Stande, weil die unsere Formeln von den Weberschen unterscheidenden Glieder auch noch mit X multiplicirt sind, also an Bedeutung gewinnen, je grössere magnetisirende Kräfte man anwendet.

Aus unsern Formeln würde sich noch das Resultat ergeben, dass die temporäre Magnetisirung eines Körpers mit wachsender magnetisirender Kraft erst zunimmt, dass die Zunahme immer geringer wird, sich auf Null reducirt und dann, wenn die magnetisirende Kraft noch weiter ansteigt, in eine Abnahme übergeht. Sollte je durch diesbezügliche Experimente eine derartige Veränderung der temporären Magnetisirung mit ansteigender magnetisirender Kraft nachgewiesen werden, sollte also auch die Erfahrung lehren, dass von einer gewissen Grenze ab einem Zuwachs der magnetisirenden Kraft eine Abnahme des temporären Magnetismus entspricht, so glaube ich wol, dass damit die Existenz der molecularen Ströme fast zur Evidenz erwiesen sein würde.

845. Ferner lehrt unsere Theorie, dass, wenn auch bei diamagnetischen Substanzen die molecularen Ströme in bestimmten Canälen zu fliessen gezwungen sind, und die zugehörigen Molekel gleich denen der magnetischen Substanzen durch eine magnetische Kraft gedreht zu werden vermögen, dass dann die diamagnetische Polarität mit wachsender magnetisirender Kraft ansteigen würde. Hat die magnetisirende Kraft schon eine gewisse Höhe erreicht, so geschieht bei noch weiterer Vergrösserung derselben das Ansteigen der diamagnetischen Polarität nicht mehr so rasch.

Doch zeigen die durchweg geringen Beträge, die sich bis jetzt für diamagnetische Coefficienten gefunden haben, dass die Ablenkung, die ein

diamagnetisches Molekel erleidet, sehr klein gegen die, die einem magnetischen Molekel im allgemeinen widerfährt, ist. Die durch diese Ablenkung verursachten Erscheinungen werden also bei diamagnetischen Substanzen lange nicht so markirt sein, wie bei den magnetischen.

Wenn andererseits die molecularen Ströme sich frei durch die ganze Substanz der bezüglichen Molekel zu bewegen vermögen, so wird die diamagnetische Polarität der magnetisirenden Kraft streng proportional wachsen. Ihr Betrag würde zur Bestimmung des ganzen, von den leitenden Molekeln eingenommenen Raumes, und damit, wenn man die Anzahl aller in einer Volumeinheit vorhandenen Molekel wüsste, zur Kenntnis der Grösse der einzelnen Molekel führen.

Cap. XXIII.

Theorieen einer Wirkung in die Ferne.

Gauss' und Webers Interpretation des Ampèreschen Fundamentalgesetzes.

846. Die Ampèresche Formel. Nach Ampères Formel ist die Attraction zweier Stromelemente, die von den bezüglichen Strömen i und i' durchzogen werden (Art. 526),

$$R = \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(2\cos\varepsilon + 3\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right) \tag{1a}$$

oder

$$R = -\frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} - \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right), \tag{1b}$$

wobei die Stromstärken i, i' in electromagnetischen Einheiten auszudrücken sind.

Wir haben daher die Bedeutung der folgenden drei Grössen

$$\cos\varepsilon,\quad \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}$$

auseinanderzusetzen. Da nun diese drei Grössen nur von der Configuration und Lage der Stromelemente abhängen, so werden wir, um zu einer Interpretation derselben zu gelangen, die relative Geschwindigkeit, mit der die bezüglichen Ströme in den Elementen fliessen, heranzuziehen haben.

847. Ableitung des Gaussischen und Weberschen Punktgesetzes. Wir nehmen also an, dass sich auf den bezüglichen Stromelementen zwei Punkte mit den bezüglichen Geschwindigkeiten v, v' bewegen. Das Quadrat ihrer relativen Geschwindigkeit ist dann

$$u^2 = v^2 - 2vv'\cos\varepsilon + v'^2. \tag{a}$$

Bezeichnet man aber mit r die Entfernung, in der die beiden Punkte zur Zeit t sich von einander befinden, so wird

$$\text{b)} \qquad \frac{dr}{dt} = v\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\text{c)} \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = v^2\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + 2vv'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + v'^2\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2,$$

$$\text{d)} \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = v^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + 2vv'\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + v'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}.$$

Die drei Gleichungen unter a), c), d) enthalten die drei fraglichen Grössen als Coefficienten von $2vv'$. Sie enthalten aber noch mehr als diese drei Grössen, und deshalb kann man ohne eine weitere Hypothese die Grössen, auf welche es uns ankommt, nicht als Functionen von u^2, $(dr/dt)^2$, d^2r/dt^2 allein darstellen. Man kann also den electrischen Strom nicht als eine Fortführung von Electricität nach einer Richtung erklären, man muss vielmehr annehmen, dass jeder electrische Strom die Combination zweier einander entgegengerichteter electrischer Ströme bildet.

Indem man dann über die Geschwindigkeiten und Intensitäten dieser einen Strom constituirenden zwei Ströme geeignete Annahmen macht, kann man die mit v^2, v'^2 multiplicirten Glieder zum Fortfall bringen.

848. Wir setzen also voraus, dass in dem ersten Stromelement, in ds, ein electrisches Partikel e sich mit der Geschwindigkeit v und ein anderes e_1 mit der v_1 bewegt, dass ferner in dem zweiten Stromelement, in ds', ein electrisches Partikel e' sich mit der Geschwindigkeit v' und ein anderes e_1' mit der v_1' bewegt.

Alle vier Partikel wirken auf einander ein, die die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten enthaltenden Glieder sind daher

$$\Sigma(v^2 ee') = (v^2 e + v_1^2 e_1)(e' + e_1'),$$
$$\Sigma(v'^2 ee') = (v'^2 e' + v_1'^2 e_1')(e + e_1),$$
$$\Sigma(vv' ee') = (ve + v_1 e_1)(v'e' + v_1'e_1').$$

Sollen die beiden ersten Summen verschwinden, so müssen wir

$$2_1) \qquad e' + e_1' = 0,$$

oder

$$2_2) \qquad v^2 e' + v_1^2 e_1' = 0.$$

haben.

Nach Fechners Hypothese besteht ein electrischer Strom aus einer Strömung positiver Electricität nach der positiven Richtung und negativer Electricität nach der dieser entgegengesetzten negativen Richtung. Die beiden Strömungen sollen mit numerisch genau gleicher Stärke vor sich gehen, sie sollen also in gleichen Zeiten gleiche Electricitätsmengen und mit gleichen Geschwindigkeiten fortbewegen. Nach dieser Hypothese sind demnach beide unter 2) aufgestellten Bedingungen erfüllt.

Für unsere Zwecke ist aber eine so specialisirende Hypothese wie die Fechnersche nicht nötig. Wir nehmen an, dass

entweder die Menge positiver Electricität in jedem Elemente eines Stromkreises zu jeder Zeit genau der Menge negativer daselbst zu derselben Zeit vertretenen Electricität gleich ist,

oder die Quantitäten der beiden Electricitätsarten sich jederzeit umgekehrt wie die Quadrate ihrer bezüglichen Geschwindigkeiten verhalten.

Nun kann man einen jeden Draht so mit positiver und negativer Electricität laden, dass $e' + e_1'$ für ihn positiv oder negativ, aber jedenfalls von Null verschieden ausfällt. Daher würde ein solcher geladener Draht, selbst wenn er von keinem Strome durchzogen wäre, auf einen andern Draht, der einem Strome, für welchen $v^2 e + v_1^2 e_1$ sich nicht auf Null reducirt, zur Bahn dient, eine bestimmte Kraft ausüben. Eine solche Kraftwirkung statischer ruhender Electricität auf strömende Electricität ist aber noch nie beobachtet worden.*)

Da man also einerseits experimentell immer $e' + e_1'$ von Null verschieden machen kann, und andererseits $v^2 e + v_1^2 e_1$ der experimentellen Willkür nicht unterworfen ist, so wird es für die weitern Untersuchungen besser sein, anzunehmen, dass die letztere Grösse, also $v^2 e + v_1^2 e_1$, für jeden Strom und zu jeder Zeit verschwindet.

849. Von welcher Annahme man aber auch ausgehen mag, daran ist kein Zweifel, dass der gesammte Transport an Electricität, algebraisch gerechnet, für jeden Strom durch

$$v e + v_1 e_1 = c i ds$$

dargestellt wird, wenn c die Anzahl statischer Electricitätseinheiten bedeutet, die der Strom in der Zeiteinheit fortführt. Wir haben daher

$$\Sigma (v v' e e') = c^2 i i' ds ds'.$$

Da wir es bei zwei Stromelementen mit vier Partikeln zu tun haben, so werden die in den Gleichungen a), c), d) linker Hand vertretenen Grössen auch viermal zu nehmen sein. Daher wird, weil für jeden Strom unserer Hypothese gemäss

$$3) \qquad v^2 e + v_1^2 e_1 = 0$$

sein soll,

$$a_1) \qquad \Sigma (e e' u^2) = -2 c^2 i i' ds ds' \cos \varepsilon,$$

$$c_1) \qquad \Sigma \left(e e' \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) = 2 c^2 i i' ds ds' \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$d_1) \qquad \Sigma \left(e e' r \frac{d^2 r}{dt^2} \right) = 2 c^2 i i' ds ds' r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'}.$$

*) S. Clausius, *Ableitung eines neuen electrodynamischen Grundgesetzes.* Mechanische Wärmetheorie II., 227 ff. § 3.

Indem man die durch diese Gleichungen gegebenen Werte von $\cos \varepsilon$, $\partial r/\partial s \,.\, \partial r/\partial s'$, $r \partial^2 r/\partial s \partial s'$ in die in Art. 846 für die Kraftwirkung der Stromelemente auf einander gegebene Ampèresche Formel 1a) oder 1b) einsetzt, bekommt man

1c) $$R = -\frac{1}{c^2} \Sigma \left\{ \frac{ee'}{r^2} \left[u^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \right\},$$

oder

1d) $$R = -\frac{1}{c^2} \Sigma \left\{ \frac{ee'}{r^2} \left[r \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \right\}.$$

Die Differentiation von r nach t ist so zu verstehen, dass man erst r als Function der Coordinaten der zwei zugehörigen Partikel darstellt, dann diese Coordinaten durch ihre Ausdrücke als Functionen der Zeit ersetzt und hernach die Differentiation ausführt.

850. Nun giebt die Electrostatik für die Abstossung zweier Electricitätspartikel e, e' den Ausdruck ee'/r^2 und für die zweier mit den bezüglichen Electricitätsmengen $e + e_1$, $e' + e_1'$ geladener Elemente $\Sigma(ee'/r^2) = (e + e_1)(e' + e_1')/r^2$.

Nimmt man also an, dass zwei Electricitätspartikel, wenn sie sich in Bewegung befinden, auf einander eine Repulsion von der Grösse

1_1) $$R_1 = \frac{ee'}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[u^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \right\}$$

oder

1_2) $$R_1 = \frac{ee'}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[r \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \right\}$$

ausüben, so lassen sich daraus sowol die Coulombschen Gesetze der electrostatischen, als die Ampèreschen der electrodynamischen Kraftwirkungen ableiten.

851. Der unter 1_1) gegebene Ausdruck für R_1 ist von Gauss*) im Juli 1835 gefunden und als fundamentales Gesetz der electrischen Wirkungen aufgefasst worden. Nach ihm ziehen sich zwei Partikel Electricität, wenn sie sich in relativer Bewegung befinden, ebenfalls an oder stossen sich ab, sie tun es aber nach einem andern Gesetz, als wenn sie in relativer Ruhe verharren. So viel ich weiss, ist Gauss' Grundgesetz bei seinen Lebzeiten nicht veröffentlicht worden, der zweite Ausdruck, den Wilhelm Weber unabhängig von Gauss entdeckt und im ersten Teil seiner berühmten *Electrodynamischen Maassbestimmungen* publicirt hat, ist daher das der wissenschaftlichen Welt zuerst bekannt gewordene derartige Resultat.

---

*) Werke (1867) vol. V. p. 616.

852. Das Gaussische und Webersche Punktgesetz und das Princip der Erhaltung der Energie. Die beiden Gesetze führen in ihrer Anwendung auf geschlossene Ströme zu denselben Resultaten, und ihre Ergebnisse stimmen in diesem Fall vollkommen mit denen der Ampèreschen Formel überein.

Insoweit man es nur mit geschlossenen Strömen zu tun hat, wird man das Gaussische, das Webersche und das Ampèresche Gesetz als gleich gut der Erfahrung entsprechend finden.

Handelt es sich aber um die Anwendung der beiden ersten (das Ampèresche Gesetz ist auf Stromelemente berechnet) auf die Wirkung zweier electrischer Partikel auf einander, so wird man zunächst zu untersuchen haben, ob sie auch dann noch mit andern bekannten physikalischen Tatsachen sich in Einklang befinden.

Beide Gesetze stellen die Kraftwirkung zweier sich bewegender Partikel als von ihrer relativen Bewegung gegen einander abhängig dar. Wenn man aber das wohlbegründete Princip der Erhaltung der Energie analytisch ausdrückt, nimmt man im allgemeinen an, dass die Kraftwirkung zwischen zwei Partikeln eine Function nur der Entfernung beider von einander ist; man geht auch gewöhnlich von der Ansicht aus, dass, wenn diese Kraftwirkung auch noch von etwas anderem, etwa von der Zeit oder von der Geschwindigkeit, mit der die Partikel sich eventuell bewegen, abhängt, ihr der Eintritt in den analytischen Ausdruck für das genannte Princip verwehrt ist.

Daher hat man angenommen, dass ein electrisches Gesetz, welches die Kraftwirkung zweier Partikel auch von ihrer Geschwindigkeit abhängig macht, mit dem Principe der Erhaltung der Energie sich nicht vereinbaren lässt.

853. Die Gaussische Formel steht nun in der Tat mit dem gedachten Princip in Widerspruch, denn nach ihr würde sich in einem endlichen System durch rein physikalische Mittel eine unendlich grosse Energie in endlicher Zeit entwickeln können. Sie muss daher aufgegeben werden.

Der Weberschen Formel kann ein solcher Vorwurf nicht gemacht werden, denn Weber hat schon selbst bewiesen*), dass die nach seiner Formel berechnete Kraft ein Potential hat.

In der Tat, setzt man

$$4)\qquad \Psi = \frac{ee'}{r}\left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

so findet sich für die Repulsionswirkung zweier Partikel auf einander

$$R_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{ee'}{r^2}\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left[r\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]\right\}.$$

---

*) *Pogg. Ann.* LXXIII. p. 229 (1848).

Ψ ist also das Potential der Kraft R_1. Die Arbeit, welche an einem beweglichen Partikel durch die Abstossung eines festen geleistet wird, hat daher den Wert $\Psi_0 - \Psi_1$, wenn Ψ_0 und Ψ_1 sich auf die Endpunkte der Bahn des Partikels beziehen. Ψ hängt allein von r, der Entfernung des sich bewegenden Partikels von dem festen, und von dr/dt, der Geschwindigkeit seiner relativen Bewegung gegen dieses ab. Beschreibt das Partikel einen geschlossenen Weg, so dass am Ende des Processes seine Lage, seine Geschwindigkeit und die Richtung seiner Bewegung genau so sind wie am Anfang derselben, so wird $\Psi_1 = \Psi_0$, der Kreisprocess wird also von keinem Arbeitsaufwand begleitet sein.

Daher kann, wenn ein Punkt sich unter dem Einflusse einer nach dem Weberschen Grundgesetze variirenden Kraft in periodischer Weise bewegt, kein unbestimmter Betrag von Arbeit erzeugt werden.

854. Indessen hat Helmholtz in seiner wirklich bedeutenden Abhandlung: „*Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität für ruhende leitende Körper*“ *) nachgewiesen, dass Webers Grundgesetz mit dem Princip der Erhaltung der Energie zwar insofern nicht unvereinbar ist, als es keinen Kreisprocess ermöglicht, bei welchem eine Arbeit verbraucht wird, dass es jedoch zu dem Schlusse führt, dass zwei electrisirte Partikel, welche sich unter seinem Einfluss bewegen und mit einer endlichen Anfangsgeschwindigkeit beginnen, unter Umständen schon in endlicher Entfernung von einander eine unendlich grosse kinetische Energie anzunehmen und eine unendlich hohe Arbeit zu leisten vermögen.

Dagegen hat Weber **) erwidert, dass die von Helmholtz supponirte Anfangsgeschwindigkeit, wenn sie zu einer unendlich grossen Endgeschwindigkeit Veranlassung geben soll, grösser als die Geschwindigkeit des Lichtes sein müsse, und dass weiter die Entfernung der Partikel von einander, in der die unendlich grosse Endgeschwindigkeit auftritt, zwar endlich ist, aber eine kleinere Distanz darstellt, als wir sie je zu bemerken im Stande sein würden, so dass es physikalisch unmöglich sein dürfte, zwei Molekel einander so nahe zu bringen. Helmholtz' Beispiel könnte also durch kein experimentelles Arrangement verwirklicht werden.

Deshalb hat Helmholtz zur experimentellen Untersuchung einen Fall erdacht, wo die Distanzen nicht zu klein und die Geschwindigkeiten nicht zu gross sind. Man ladet eine fixirte, nicht leitende Kugelfläche vom Radius a gleichmässig mit Electricität zur Dichte σ. Innerhalb der Kugelfläche lässt man ein Partikel m, das die Electricitätsmenge e in sich birgt, sich mit der Geschwindigkeit v bewegen. Das nach der Formel 4) berechnete Electrodynamische Potential ist dann

$$4\pi a\sigma e\left(1 - \frac{v^2}{6c^2}\right)$$

*) Dieser und die folgenden hierher gehörigen Aufsätze sind in den *Gesammelten Abhandlungen* oder *Pogg. Ann.* 102 p. 59 nachzulesen.

**) *Electrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie.*

und hängt nicht von der Lage, die der Punkt m innerhalb der Kugelfläche einnimmt, ab. Addirt man dazu die von der Wirkung anderer Kräfte herrührende potentielle Energie V und fügt noch $\frac{1}{2}mv^2$, die kinetische Energie des Partikels, hinzu, so folgt aus dem Princip der Erhaltung der Energie

$$\frac{1}{2}\left(m - \frac{4}{3}\frac{\pi a e \sigma}{c^2}\right)v^2 + 4\pi a \sigma e + V = \text{const.}$$

Da man nun durch Vergrösserung des Radius a der geladenen Kugelfläche das in der Klammer stehende zweite Glied beliebig, sogar unendlich gross, zu machen vermag, ohne dass sich dabei die Dichte σ ihrer Belegung auf Null zu reduciren braucht, so kann also der Coefficient von v^2 negativ gemacht werden. Eine Beschleunigung in der Bewegung des Partikels m würde dann aber eine Verringerung seiner kinetischen Energie nach sich ziehen; und wenn das Partikel sich in geschlossener Bahn in einem widerstehenden Mittel bewegte, das wie etwa Reibung seiner Verschiebung entgegenarbeitet, so würde seine Geschwindigkeit fortwährend und unbegrenzt zunehmen.

Zu diesem ganz undenkbaren Resultat gelangt man also notwendig, wenn man für das Potential eine Formel in Anwendung bringt, die in die Gleichung der Erhaltung der Energie negative Coefficienten in den mit v^2 multiplicirten Term einführt.*)

855. Anwendung der Weberschen Formel auf geschlossene Ströme. Wie die Webersche Formel bei der Kraftwirkung von Stromelementen auf einander zu den Ampèreschen Ausdrücken führt, habe ich schon gezeigt.

Das Potential ergiebt sich, wenn man den Ausdruck 4) auf alle vier Punktcombinationen anwendet. Daher ist

$$dM = \sum \frac{ee'}{r}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}.$$

Wir haben aber nach c_1) in Art. 849

$$\sum\left(\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right) = -\, i i' ds ds' \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Daher wird das Potential zweier geschlossener Ströme auf einander

$$ii' M = -\, ii' \int\!\!\int \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} ds ds'$$

oder

$$M = \int\!\!\int \frac{\cos\varepsilon}{r} ds ds',$$

*) Die Frage wegen der Zulässigkeit des Weberschen Gesetzes ist noch nicht entschieden, die nach 1873 geschriebenen diesbezüglichen Abhandlungen findet man meist in Poggendorffs, bez. Wiedemanns Annalen und in den Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften.

ganz so wie wir es aus andern Betrachtungen (in den Artt. 423, 524, ...) abgeleitet haben. Bei geschlossenen Strömen führt also Webers Grundgesetz zu einem durch die Erfahrung hinlänglich bestätigten Potential.*)

Webers Theorie der Induction.

856. Nachdem Weber seine Formel für die Wirkung electrischer Partikel auf einander aus der Ampèreschen für die Wirkung zwischen Stromelementen abgeleitet hatte, versuchte er sie zur Erklärung der electromagnetischen Induction anzuwenden. Seine Bemühungen wurden vom schönsten Erfolge gekrönt, er war im Stande aus seiner Formel alle Gesetze, welche die Induction regeln, zu entwickeln. Ich gebe im folgenden eine Analyse seines Verfahrens, kann jedoch die Bemerkung nicht unterdrücken, dass der Umstand, dass eine Formel, trotzdem sie aus den von Ampère entdeckten Erscheinungen abgeleitet ist, doch auch von dem von Faraday später gefundenen Phänomen der Induction Rechenschaft giebt, die Wahrscheinlichkeit für die physikalische Realität derselben nicht so stark vermehrt, als es bei der ersten Ueberlegung vielleicht scheinen möchte.

Helmholtz und Thomson haben nämlich dargethan (Art. 543), dass wenn die Ampèreschen Erscheinungen tatsächlich vorhanden sind, und wenn sie dem Principe der Erhaltung der Energie gehorchen, dass dann die von Faraday entdeckten Inductionserscheinungen eine notwendige Folge sein müssen. Nun führt das Webersche Gesetz mit seinen verschiedenen, hinsichtlich der Natur electrischer Ströme gemachten Annahmen durch einfache mathematische Transformationen zur Ampèreschen Gleichung. Ferner steht es auch insofern mit dem Princip der Erhaltung der Energie im Einklange, als es für die electrischen Kräfte ein Potential anzeigt, und das ist alles, was nach Helmholtz und Thomson zur Anwendbarkeit des genannten Princips nötig ist. Wir dürfen also, auch ehe wir eine diesbezügliche Rechnung unternehmen, versichert sein, dass das Webersche Gesetz auch die Induction zu erklären im Stande sein wird. Daher bleibt die Wahrscheinlickkeit für die Realität dieses Weberschen Gesetzes, trotz der Tatsache, dass sich aus ihm die Gesetze der Induction ableiten lassen, auf dem Punkte stehen, wo sie war.

Andererseits freilich vermag auch die Gaussische Formel die Ampèreschen Erscheinungen völlig zu erklären, allein sie ist, wie ich schon bemerkt habe, mit dem Princip der Erhaltung der Kraft unvereinbar, und in der Tat kann sie, wie wir bald (Art. 859) sehen werden, nicht alle Phänomene der Induction entwickeln.

*) Weber benutzt in seiner diesbezüglichen Untersuchung überall das electrodynamische Einheitssystem, wir haben dagegen durchweg vom electromagnetischen Gebrauch gemacht. Doch steht die electromagnetische Einheit der Stromstärke zu der electrodynamischen im Verhältnis von $\sqrt{2}$ zu 1. Art. 526.

857. Wir haben also, um die Inductionsgesetze abzuleiten, die electromotorische Kraft zu untersuchen, die in einem Strombahnelement ds' dadurch inducirt wird, dass das Stromelement ds sich im Raume bewegt und zudem Schwankungen in seiner Stärke unterworfen ist.

Nach Weber ist die Wirkung auf die Substanz des Leiters, von welchem ds' ein Element bildet, gleich der Summe aller Wirkungen auf die in ihm sich bewegenden Electricitäten. Da aber ds' positive und negative Electricität enthält, so wird die in diesem Element wirkende electromotorische Kraft gleich der Differenz der Kraftwirkung auf ihre beiden Electricitätsarten sein. Die einzelnen Kraftwirkungen geschehen aber nach Weber in Richtung der die Elemente ds und ds' verbindenden Geraden, die electromotorische in ds' wachgerufene Kraft wird also auch in Richtung dieser verbindenden Geraden tätig sein. Wir haben daher, um die in Richtung des Elements ds' selbst wirkende electromotorische Kraft zu erhalten, die ganze wachgerufene electromotorische Kraft von der die Elemente verbindenden Geraden auf das Element ds' zu projiciren.

Es sind nun in der Weberschen Formel alle Glieder unter der Voraussetzung zu berechnen, dass ds sich relativ gegen ds' bewegt, und dass in ds sowohl als in ds' die Stromstärke mit der Zeit variirt. Die Ausdrücke, die wir so finden, sind alle mit ee' multiplicirt, und es treten in ihnen Terme, die von v^2, vv', v'^2, v, v' und solche, die weder von v, noch von v' abhängen, auf. Combinirt man dann die vier Werte, die jeder Term je nach der Gruppirung der vier in beiden Stromelementen zusammengenommen enthaltenen electrischen Partikel zu je zwei besitzen muss, so bemerkt man, dass in dem Ausdruck für die Kraft, welche aus der vierfachen Anwendung des Weberschen Gesetzes resultirt, das einzige in Rechnung zu ziehende Glied das mit $vv'ee'$ multiplicirte ist.

Geht man dann weiter zu der Kraft über, welche in dem zweiten Element ds' dadurch einen Strom hervorzubringen sucht, dass ds auf die positive Electricität von ds' anders, als auf die negative wirkt, so findet sich, dass das einzige zu untersuchende Glied dasjenige ist, welches mit $vv'e'$ multiplicirt ist. Dieses Glied hat natürlich vier Werte, die wir darstellen können durch

$$v'(ve + v_1 e_1) \text{ und } v_1'(ve + v_1 e_1).$$

Nun ist nach Weber $e' + e_1' = 0$, für die mechanische Kraftwirkung sind also diese vier Werte bedeutungslos, dagegen ist die auf die positive Electricität e' wirkende electromotorische Kraft gleich $ve + v_1 e_1$ und die auf die negative Electricität e_1' wirkende gleich $-(ve + v_1 e_1)$ und jener entgegengerichtet.

858. Wir lassen jetzt das Element ds sich im Raume relativ zu ds' nach einer gewissen Richtung mit der Geschwindigkeit V bewegen. Ich bezeichne mit (Vds), (Vds') die Winkel, die die Bewegungsrichtung von ds mit den Rich-

tungen der bezüglichen Stromelemente ds, ds' einschliesst. Das Quadrat der relativen Geschwindigkeit zweier Electricitätspartikel ist dann

a') $u^2 = v^2 + v'^2 + V^2 - 2vv' \cos\varepsilon - 2Vv \cos(Vds) - 2Vv' \cos(Vds')$.

Das von vv' abhängige Glied fällt hier genau so aus, wie früher [Art. 847, a)], als beide Elemente im Raume ruhen und nur die in ihnen befindlichen electrischen Partikel sich bewegen sollten.

Die electromotorische Kraft hängt von dem Gliede $2Vv\cos(Vds)$ ab.

Ferner ist

b') $$\frac{dr}{dt} = v\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial r}{\partial t},$$

wobei $\partial r/\partial t$ nur durch die räumliche Translation der Elemente gegen einander sich berechnet.

Also wird

c') $$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = v^2\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + v'^2\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + 2vv'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + 2v\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t} + 2v'\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial t}.$$

Von dem Gliede $2vv'\partial r/\partial s\,.\,\partial r/\partial s'$ hängt, wie wir wissen, die mechanische, von dem $2v\partial r/\partial s\,.\,\partial r/\partial t$, die electromotorische Kraftwirkung ab.

Die zweite Differentiation ergiebt

d') $$\frac{d^2r}{dt^2} = v^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + 2vv'\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} + v'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s'}$$
$$+ v\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial v'}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}.$$

Das Glied, von welchem die mechanische Kraftwirkung abhängt, ist $2vv'\partial^2 r/\partial s\partial s'$, und das, welches die electromotorische Wirkung verursacht, $\partial v/\partial t\,.\,\partial r/\partial s$.

Hiernach sind die bei der Berechnung der **mechanischen** Kraftwirkung zu berücksichtigenden Glieder

$$2vv'\cos\varepsilon,\quad 2vv'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'},\quad 2vv'\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'},$$

also genau dieselben, die wir schon früher in Art. 849 gefunden haben; die bei der Berechnung der **electromotorischen** Kraftwirkung zu benutzenden

$$2Vv\cos(Vds),\quad 2v\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t},\quad \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}.$$

Soweit gelten alle Ableitungen für die Gaussische Formel nicht minder wie für die Webersche.

859. In der Gaussischen Formel finden nur die beiden ersten Glieder Anwendung, daher wird die in Richtung des zweiten Elements ds' wirkende resultirende Kraft, also die electromotorische Kraft längs ds', wie die Ersetzung

in 1c) Art. 849 von u^2 durch $2Vv\cos(Vds)$, von $(dr/dt)^2$ durch $2v\partial r/\partial s\,.\,\partial r/\partial t = 2Vv\cos(Vr)\cos(rds)$ lehrt.

$$1)\qquad dE = \frac{1}{r^2}\,ds\,ds'\,iV\left[2\cos(Vds) - 3\cos(Vr)\cos(rds)\right]\cos(r\,ds').$$

Der Ausdruck enthält kein Glied, welches der Variation der Stromstärke i Rechnung trüge, und da man weiss, dass nicht blos Locomotionen von Strömen, sondern auch Stromschwankungen Ströme induciren, so genügt die Gaussische Formel der Erfahrung über Induction in einem principiellen Punkte nicht, sie kann daher auch nicht als wahrer Ausdruck für das Gesetz, das die Wirkung zwischen electrischen Partikeln beherrscht, angesehen werden.

860. Wendet man dagegen die Webersche Formel an, so hat man die beiden letzten der drei genannten Glieder zu benützen und in 1d) Art. 849 das d^2r/dt^2 durch $\partial v/\partial t\,.\,\partial r/\partial s$, $(dr/dt)^2$ durch $2v\partial r/\partial s\,.\,\partial r/\partial t$ zu ersetzen. Man bekommt dann, wie leicht zu übersehen,

$$2_1)\qquad dE = \frac{1}{r^2}\,ds\,ds'\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial i}{\partial t} - i\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t}\right)\frac{\partial r}{\partial s'},$$

oder

$$2_2)\qquad dE = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i}{r}\right)ds\,ds'.$$

Die electromotorische Kraft, welche ein endliches Stück des Stromes s in einem endlichen Stück der Strombahn s' wachruft, ist daher

$$3)\qquad E = \frac{\partial}{\partial t}\,i\int\!\!\int\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds\,ds'.$$

Wenn die Strombahn s geschlossen ist, darf man, weil dann

$$\int\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\,ds = 0$$

wird, unbeschadet der Richtigkeit der Formel 3) unter den Integralzeichen noch das Glied $\partial^2 r/\partial s\,\partial s'$ hinzufügen.

Da aber nach Art. 512

$$\int\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds = \int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right)ds = -\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds$$

war, und, wie schon oft bemerkt,

$$\int\!\!\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds' = M$$

ist, so hat man als eine Folgerung des Weberschen Gesetzes

$$3_1)\qquad E = -\frac{\partial}{\partial t}\left(iM\right).$$

und das stimmt mit dem in Art. 539 als eine Folge beobachteter Tatsachen bezeichneten Inductionsgesetze.

Ableitung der Weberschen Formel aus der Annahme eines gleichförmigen Transports der Wirkung von Partikel zu Partikel.

861. Gauss' Ansichten von den Grundlagen einer Theorie der Electrodynamik. In einem höchst interessanten, vom 19. März 1845 datirten Brief an Weber wirft Gauss*) einen Rückblick auf die electrodynamischen Speculationen, mit denen er sich vor langer Zeit beschäftigt hatte. Er bemerkt, dass er seine Untersuchungen veröffentlicht haben würde, wenn er damals den wahren Schlussstein einer Theorie der Electrodynamik, nämlich die Ableitung der Kraft, die zwischen in Bewegung begriffenen electrischen Partikeln in die Ferne wirkt, aus Actionen, die in dem sie trennenden Raume vor sich gehen und nicht instantane, sondern wie das Licht allmälige Verbreitung finden, hätte einfügen können. Als er seine electrodynamischen Untersuchungen wieder aufgab, war ihm diese Ableitung nicht gelungen, und er hatte seinerseits die feste Ueberzeugung, dass es vor allen Dingen erst darauf ankäme, eine bestimmte Vorstellung von der Art, wie die Verbreitung der Wirkung vor sich geht, zu bilden.

Nach ihm haben dann drei hervorragende Mathematiker an der Einfügung des von Gauss bezeichneten Schlusssteines gearbeitet.

862. Riemanns Theorie. Bernhard Riemann leitet in einer der Göttinger gelehrten Gesellschaft 1858 überreichten, dann zurückgezogenen und später, erst nach seinem Tode, 1867 in *Poggendorffs Annalen* veröffentlichten Abhandlung die Phänomene der electrischen Induction aus einer modificirten Form der Poissonschen Gleichung ab.

Er giebt dieser Gleichung die Gestalt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi\rho = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

und versteht unter V das electrische Potential, unter a eine Geschwindigkeit.

Offenbar stimmt sie dann mit den Gleichungen, die zur Darstellung der Fortpflanzung von Wellen und andern Störungen in elastischen Medien dienen, überein. Doch scheint der Autor die besondere Erwähnung des Mediums, durch welches die Fortpflanzung vor sich gehen sollte, zu vermeiden.

Später hat Clausius*) die diesbezüglichen Riemannschen Rechnungen einer Discussion unterzogen und sie als nicht ganz einwurfsfrei gefunden, er bemerkt auch, dass die Annahme, das Potential werde ähnlich wie das Licht weiter verbreitet, weder zu Webers Grundgesetz noch zu andern bekannten Gesetzen der Electrodynamik zu leiten im Stande ist.

---

*) Werke (1867) Bd. V. p. 629.

*) *Pogg. Ann.* Bd. 135, p. 612.

863. C. Neumanns Theorie. Viel durchgearbeiteter ist die von C. Neumann veröffentlichte Untersuchung über die Principien der Electrodynamik.*) Auch dieser Forscher geht davon aus, dass das Potential von einem electrischen Partikel zum andern fortgepflanzt wird, er hebt aber hervor, dass die von ihm supponirte Fortpflanzungsweise gänzlich verschieden sei von der Gauss und Riemann unterstellten und von Clausius kritisirten. Ganz im Gegenteil bestehe zwischen der von ihm angenommenen Fortpflanzungsweise des Potentials und der allgemein acceptirten Theorie der Fortpflanzung des Lichtes die denkbar grösste Differenz.

Ein leuchtender Körper strahlt nach allen Richtungen aus und die Intensität des Lichtes hängt allein von dem leuchtenden Körper, gar nicht dagegen von dem erleuchteten ab.

Ein electrisches Partikel sendet das Potential ebenfalls nach allen Richtungen, aber da dieses Potential sich durch ee'/r darstellt, so hängt es nicht blos von dem emittirenden Partikel, sondern auch von dem das Potential empfangenden e' und ebenso von der Entfernung r, welche die Partikel im Augenblicke der Emission trennte, ab.

Beim Licht verringert sich die Intensität, mit der es einen Körper beleuchtet, je weiter es sich fortzupflanzen hat; dagegen bewegt sich das Potential zu dem Körper, ohne auch nur den geringsten Verlust an seinem Ausgangswert zu erleiden.

Das Licht, welches ein Körper aufnimmt, bildet gewöhnlich nur einen geringen Bruchteil von dem, welches auf ihn fällt; das Potential, welches ein Körper empfängt, ist identisch mit dem oder gleich dem Potential, welches zu ihm hingelangt.

Ferner ist die Geschwindigkeit, mit der das Potential transportirt wird, nicht wie beim Licht constant gegen den Aether oder den Raum, sie verhält sich vielmehr eher wie die eines Projectils, ist constant im Verhältnis zur Geschwindigkeit, die das emittirende Partikel zur Zeit der Emission hatte.

Zum Verständnis der Neumannschen Theorie muss man sich hiernach von dem Process des Transportes des Potentials eine Vorstellung machen, die gänzlich verschieden ist von der, an welche wir durch die Betrachtung der Lichtverbreitung gewöhnt sind. Ob aber die Neumannsche Ansicht von der Transmission des Potentials wirklich die von Gauss verlangte ‚construirbare Vorstellung‘ giebt, vermag ich nicht zu entscheiden, doch habe ich für meinen Teil mir von dieser Transmission keinen wirklichen Begriff machen können.

864. Theorie von Betti. Auf anderem Wege hat Betti**) vorzudringen versucht. Nach ihm sollen geschlossene Bahnen, in welchen Electricität fliesst, aus Elementen bestehen, deren jedes in periodisch wieder-

*) Tübingen 1868.
**) Nuovo Cimento XXVII. (1868).

kehrenden gleichen Zeitintervallen polarisirt wird (381). Diese polarisirten Partikel sollen dann auf einander, wie kleine Magnete, deren bezügliche Axen den Tangenten der Strombahn folgen, wirken. Die Periode der Polarisation ist bei allen Strömen von der nämlichen Grösse.

Betti nimmt auch an, dass die Wirkung eines der polarisirten Molekel auf ein anderes von ihm entferntes nicht plötzlich eintritt, sondern erst nach einer mit wachsender Entfernung proportional zu nehmenden Zeitdauer sich bemerkbar macht.

Unter diesen Annahmen erhält er für die Kraftwirkung von Strömen auf einander die bisher stets als richtig befundenen Darstellungen. Doch hat Clausius auch bei dieser Theorie einzelne Schritte der mathematischen Entwickelung beanstandet, worauf ich jedoch hier nicht einzugehen vermag.*)

865. Es scheint, als ob diese hervorragenden Männer ein gewisses Vorurteil, oder einen Einwurf *a priori*, gegen die Hypothese eines Mediums haben, innerhalb dessen die Licht- und Wärmestrahlung stattfinden und die electrischen Fernewirkungen sich abspielen sollen. Freilich ist es richtig, dass zu einer gewissen Zeit viele von denen, welche den Gründen der physikalischen Erscheinungen nachforschten, für jede Art einer Wirkung in die Ferne ein besonderes ätherisches Fluidum einführen wollten, dessen Eigenschaft und Function eben die Hervorbringung der speciellen Erscheinung sein sollte. Man hat so den Raum drei- oder vierfach mit verschiedenartigen Aethern gefüllt, hat diesen Eigenschaften zugeschrieben, die auf die betreffenden Erscheinungen besonders zugeschnitten waren, und dieses Verfahren hat die gründlichern Forscher so abgeschreckt, dass sie lieber Newtons bestimmtes Gesetz der Fernewirkung acceptirten, ja, dass sie sogar dem von Cotes aufgestellten Dogma, wonach die Wirkung in die Ferne eine der Grundeigenschaften der Materie und verständlicher als sonst eine Annahme sein sollte, huldigten. In der Tat hat denn auch die Undulationstheorie des Lichtes nicht etwa weil sie von den Erscheinungen keine Rechenschaft abzulegen vermochte, sondern weil sie die Existenz eines Mediums, in welchem das Licht sich fortpflanzte, zur Voraussetzung hatte, soviel Widerspruch gefunden.

866. Wir haben nun gesehen, dass die mathematischen Ausdrücke für die electrodynamischen Kraftwirkungen Gauss zu der Ueberzeugung geführt haben, dass die Fortpflanzung der electrischen Wirkungen mit der Zeit die wahre Grundlage einer Theorie der Electrodynamik bilden müsse.

Man kann aber eine Fortpflanzung sich nur so vorstellen, dass entweder etwas wie ein materielles Projectil durch den Raum fliegt, oder dass der Vorgang in der Ausbreitung eines Bewegungs- oder Zwangzustandes durch ein im Raume vorhandenes Medium besteht.

---

*) Es ist noch die lediglich auf Erfahrungstatsachen aufgebaute Claususssche Theorie zu erwähnen, die ein von den absoluten Geschwindigkeiten abhängiges Grundgesetz ergiebt. *Mechanische Wärmetheorie*, Bd. II. p. 227 ff.

In der Neumannschen Theorie wird angenommen, dass der mathematische Begriff ‚Potential', das wir in keiner Weise als etwas Materielles aufzufassen im Stande sind, von einem Partikel zu einem andern hinübergeworfen wird, und zwar in einer Weise, die den Vorgang ganz unabhängig von der Existenz eines Mediums macht, und die ihn, wie Neumann selbst bemerkt, in directen Gegensatz zu dem Vorgange bei der Lichtausbreitung bringt. Riemann und Betti scheinen sich die Fortpflanzung etwas mehr der des Lichtes ähnlich gedacht zu haben.

Bei allen diesen Theorien stösst einem aber naturgemäss die Frage auf: — Wenn etwas von einem Partikel zu einem andern durch einen Zwischenraum transportirt wird, in welchem Zustande befindet sich dann dieses Etwas, nachdem es das eine Partikel verlassen und bevor es das andere erreicht hat? Ist dieses Etwas, wie Neumann annimmt, die potentielle Energie zweier Partikel, wie sollen wir dann die Existenz dieser Energie an einer Stelle des Raumes, wo weder das eine noch das andere Partikel vorhanden ist, begreifen können?

In der Tat, wird überhaupt Energie in endlicher Zeit, d. h. nicht instantan, von einem Körper zu einem andern übergeführt, so muss es ein Medium geben, in welchem sie, nachdem sie den einen Körper verlassen, und bevor sie andere erreicht hat, sich mittlerweile aufhält, denn wie Torricelli schon bemerkt hat, ist Energie eine Quintessenz so subtiler Natur, dass sie in kein Gefäss geschlossen zu werden vermag, ausser in der innersten Substanz der materiellen Dinge. Daher müssen auch diese Theorieen alle zu der Conception eines Mediums führen, in welchem die Fortpflanzung vor sich geht. Stimmt man einmal der Hypothese von der Existenz eines Mediums zu, so glaube ich, dass demselben bei unsern Untersuchungen ein hervorragender Platz anzuweisen ist, und dass wir mit allen Mitteln uns eine begriffliche Vorstellung von allen Details seiner Wirkungsweise zu verschaffen suchen sollten. Das war aber stets mein Hauptbestreben, als ich dieses Werk ausarbeitete.

Tabelle

zur

Berechnung des Potentials zweier Kreisströme auf einander.

Art. 696, 1, b)

arcsin c	$\mathrm{Log}\,\frac{10\,M}{4\pi\sqrt{Aa}}$	arcsin c	$\mathrm{Log}\,\frac{10\,M}{4\pi\sqrt{Aa}}$	arcsin c	$\mathrm{Log}\,\frac{10\,M}{4\pi\sqrt{Aa}}$
60° 0′	0,4994783	63° 0′	0,5825973	66° 0′	0,6651732
6′	0,5022651	6′	0,5853546	6′	0,6679250
12′	0,5050505	12′	0,5881113	12′	0,6706772
18′	0,5078345	18′	0,5908675	18′	0,6734296
24′	0,5106173	24′	0,5936231	24′	0,6761824
30′	0,5133989	30′	0,5963782	30′	0,6789356
36′	0,5161791	36′	0,5991329	36′	0,6816891
42′	0,5189582	42′	0,6018871	42′	0,6844431
48′	0,5217361	48′	0,6046408	48′	0,6871976
54′	0,5245128	54′	0,6073942	54′	0,6899526
61° 0′	0,5272883	64° 0′	0,6101472	67° 0′	0,6927081
6′	0,5300628	6′	0,6128998	6′	0,6954642
12′	0,5328361	12′	0,6156522	12′	0,6982209
18′	0,5356084	18′	0,6184042	18′	0,7009782
24′	0,5383796	24′	0,6211560	24′	0,7037362
30′	0,5411498	30′	0,6239076	30′	0,7064949
36′	0,5439190	36′	0,6266589	36′	0,7092544
42′	0,5466872	42′	0,6294101	42′	0,7120146
48′	0,5494545	48′	0,6321612	48′	0,7147756
54′	0,5522209	54′	0,6349121	54′	0,7175375
62° 0′	0,5549864	65° 0′	0,6376629	68° 0′	0,7203003
6′	0,5577510	6′	0,6404137	6′	0,7230640
12′	0,5605147	12′	0,6431645	12′	0,7258286
18′	0,5632776	18′	0,6459153	18′	0,7285942
24′	0,5660398	24′	0,6486660	24′	0,7313609
30′	0,5688011	30′	0,6514169	30′	0,7341287
36′	0,5715618	36′	0,6541678	36′	0,7368975
42′	0,5743217	42′	0,6569189	42′	0,7396675
48′	0,5770809	48′	0,6596701	48′	0,7424387
54′	0,5798394	54′	0,6624215	54′	0,7452111

arcsin c	$\text{Log}\,\frac{10\,M}{4\pi\sqrt{Aa}}$	arcsin c	$\text{Log}\,\frac{10\,M}{4\pi\sqrt{Aa}}$	arcsin c	$\text{Log}\,\frac{10\,M}{4\pi\sqrt{Aa}}$
69° 0′	0,7479848	73° 0′	0,8604785	77° 0′	0,9785079
6′	0,7507597	6′	0,8633440	6′	0,9815731
12′	0,7535361	12′	0,8662129	12′	0,9846454
18′	0,7563138	18′	0,8690852	18′	0,9877249
24′	0,7590929	24′	0,8719611	24′	0,9908118
30′	0,7618735	30′	0,8748406	30′	0,9939062
36′	0,7646556	36′	0,8777237	36′	0,9970082
42′	0,7674392	42′	0,8806106	42′	1,0001181
48′	0,7702245	48′	0,8835013	48′	1,0032359
54′	0,7730114	54′	0,8863958	54′	1,0063618
70° 0′	0,7758000	74° 0′	0,8892943	78° 0′	1,0094959
6′	0,7785903	6′	0,8921969	6′	1,0126385
12′	0,7813823	12′	0,8951036	12′	1,0157896
18′	0,7841762	18′	0,8980144	18′	1,0189494
24′	0,7869720	24′	0,9009295	24′	1,0221181
30′	0,7897696	30′	0,9038489	30′	1,0252959
36′	0,7925692	36′	0,9067728	36′	1,0284830
42′	0,7953709	42′	0,9097012	42′	1,0316794
48′	0,7981745	48′	0,9126341	48′	1,0348855
54′	0,8009803	54′	0,9155717	54′	1,0381014
71° 0′	0,8037882	75° 0′	0,9185141	79° 0′	1,0413273
6′	0,8065983	6′	0,9214613	6′	1,0445633
12′	0,8094107	12′	0,9244135	12′	1,0478098
18′	0,8122253	18′	0,9273707	18′	1,0510668
24′	0,8150423	24′	0,9303330	24′	1,0543347
30′	0,8178617	30′	0,9333005	30′	1.0576136
36′	0,8206836	36′	0,9362733	36′	1,0609037
42′	0,8235080	42′	0,9392515	42′	1,0642054
48′	0,8263349	48′	0,9422352	48′	1,0675187
54′	0,8291645	54′	0,9452246	54′	1,0708441
72° 0′	0,8319967	76° 0′	0,9482196	80° 0′	1,0741816
6′	0,8348316	6′	0,9512205	6′	1,0775316
12′	0,8376693	12′	0,9542272	12′	1,0808944
18′	0,8405099	18′	0,9572400	18′	1,0842702
24′	0,8433534	24′	0,9602590	24′	1,0876592
30′	0,8461998	30′	0,9632841	30′	1,0910619
36′	0,8490493	36′	0,9663157	36′	1,0944784
42′	0,8519018	42′	0,9693537	42′	1,0979091
48′	0,8547575	48′	0,9723983	48′	1,1013542
54′	0,8576164	54′	0,9754497	54′	1,1048142

arcsin c	$\text{Log}\,\frac{10\,M}{4\pi\sqrt{Aa}}$	arcsin c	$\text{Log}\,\frac{10\,M}{4\pi\sqrt{Aa}}$	arcsin c	$\text{Log}\,\frac{10\,M}{4\pi\sqrt{Aa}}$
81° 0′	1,1082893	84° 0′	1,2217823	87° 0′	1,3698153
6′	1,1117799	6′	1,2259728	6′	1,3759777
12′	1,1152863	12′	1,2301983	12′	1,3822700
18′	1,1188089	18′	1,2344600	18′	1,3887006
24′	1,1223481	24′	1,2387591	24′	1,3952792
30′	1,1259043	30′	1,2430970	30′	1,4020162
36′	1,1294778	36′	1,2474748	36′	1,4089234
42′	1,1330691	42′	1,2518940	42′	1,4160138
48′	1,1366786	48′	1,2563561	48′	1,4233022
54′	1,1403067	54′	1,2608626	54′	1,4308053
82° 0′	1,1439539	85° 0′	1,2654152	88° 0′	1,4385420
6′	1,1476207	6′	1,2700156	6′	1,4465341
12′	1,1513075	12′	1,2746655	12′	1,4548064
18′	1,1550149	18′	1,2793670	18′	1,4633880
24′	1,1587434	24′	1,2841221	24′	1,4723127
30′	1,1624935	30′	1,2889329	30′	1,4816206
36′	1,1662658	36′	1,2938018	36′	1,4913595
42′	1,1700609	42′	1,2987312	42′	1,5015870
48′	1,1738794	48′	1,3037238	48′	1,5123738
54′	1,1777219	54′	1,3087823	54′	1,5238079
83° 0′	1,1815890	86° 0′	1,3139097	89° 0′	1,5360007
6′	1,1854815	6′	1,3191092	6′	1,5490969
12′	1,1894001	12′	1,3243843	12′	1,5632886
18′	1,1933455	18′	1,3297387	18′	1,5788406
24′	1,1973184	24′	1,3351762	24′	1,5961320
30′	1,2013197	30′	1,3407012	30′	1,6157370
36′	1,2053502	36′	1,3463184	36′	1,6385907
42′	1,2094108	42′	1,3520327	42′	1,6663883
48′	1,2135026	48′	1,3578495	48′	1,7027765
54′	1,2176259	54′	1,3637749	54′	1,7586941

Alphabetisches Namen- und Sachregister
zu den beiden Bänden.

Die angegebenen Zahlen beziehen sich auf die Artikel.

Band I: Art. 1 bis 370,
Band II: Art. 371 bis 866.

D.

E.

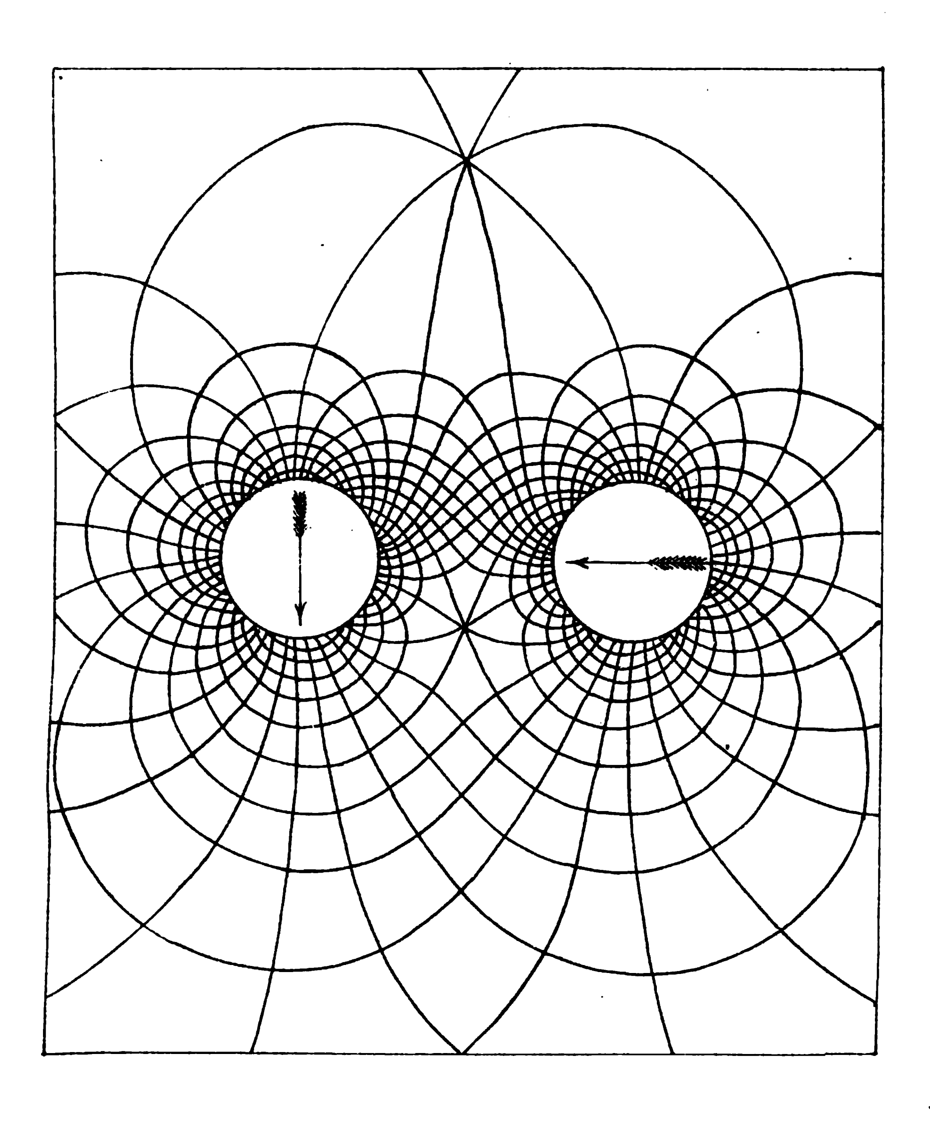
F.

L.

T.

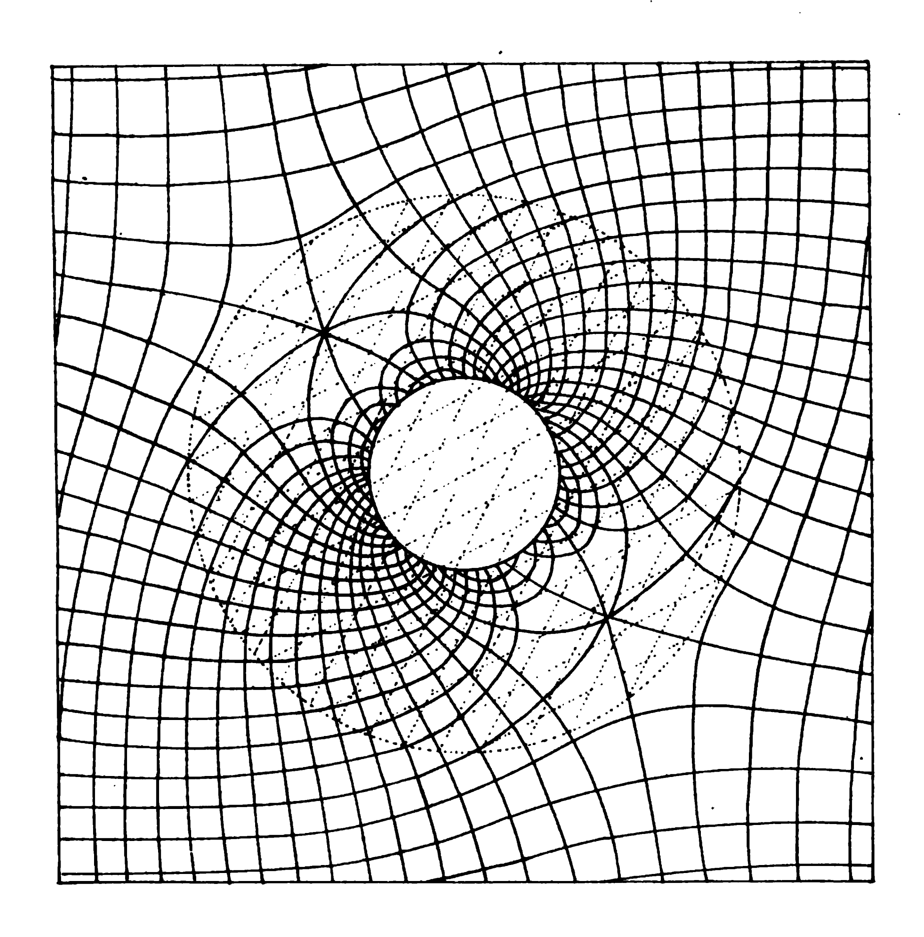
U.

V.

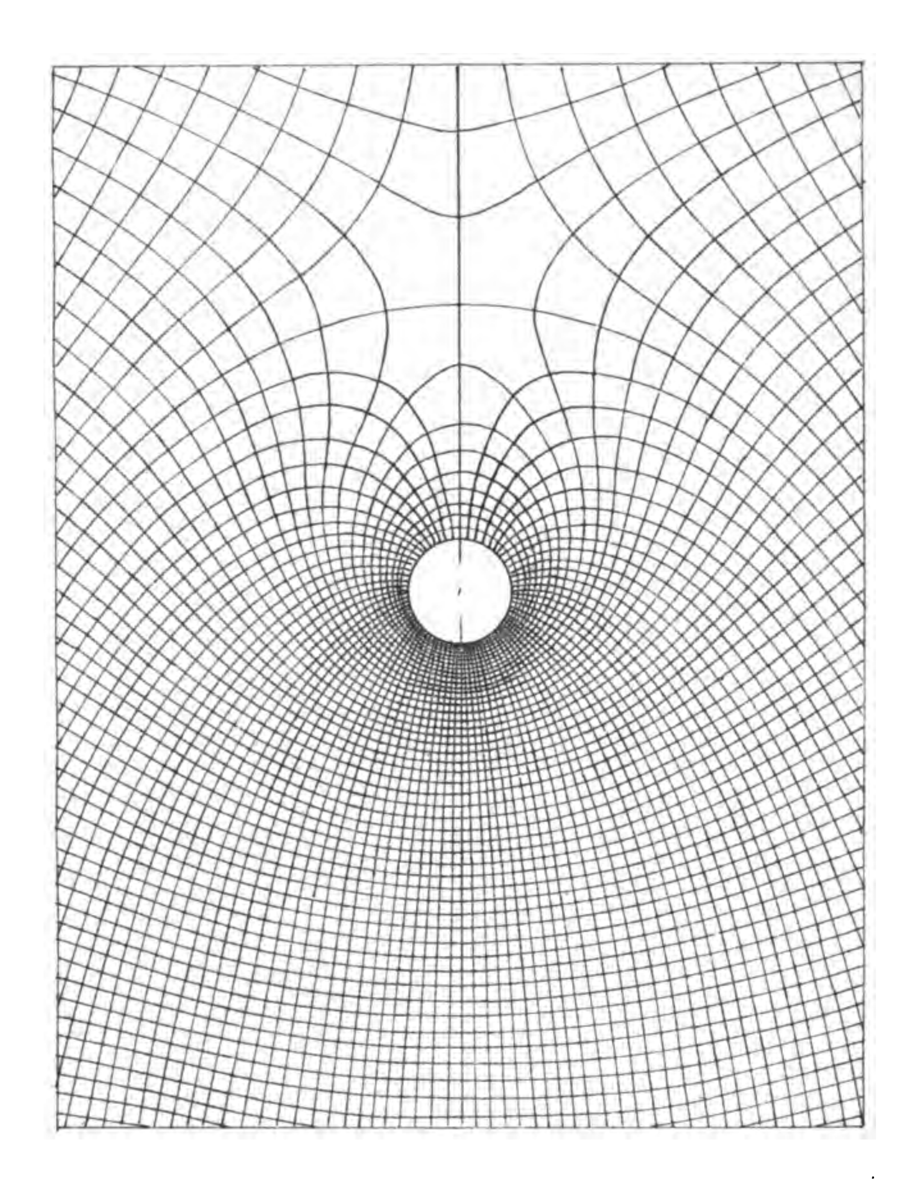


Zwei transversal magnetisirte Cylinder.

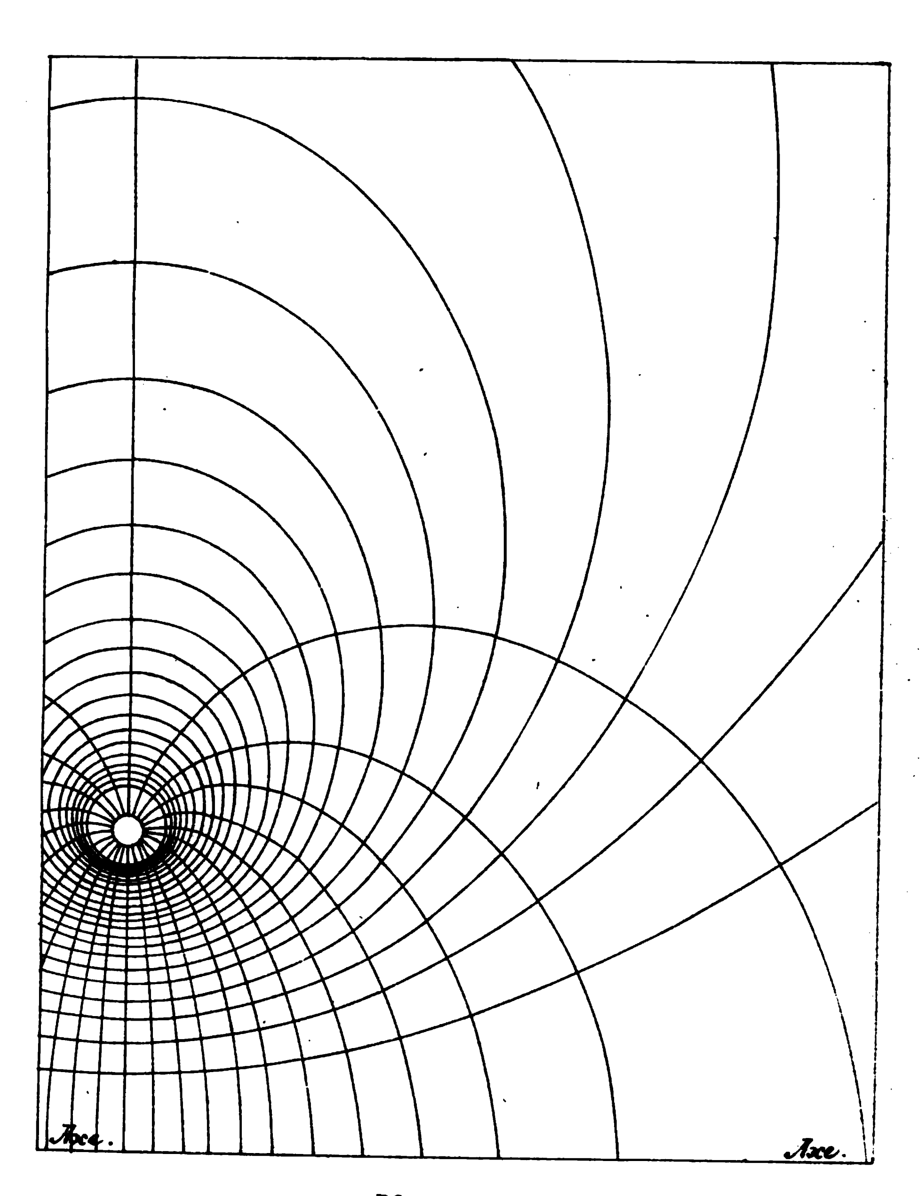




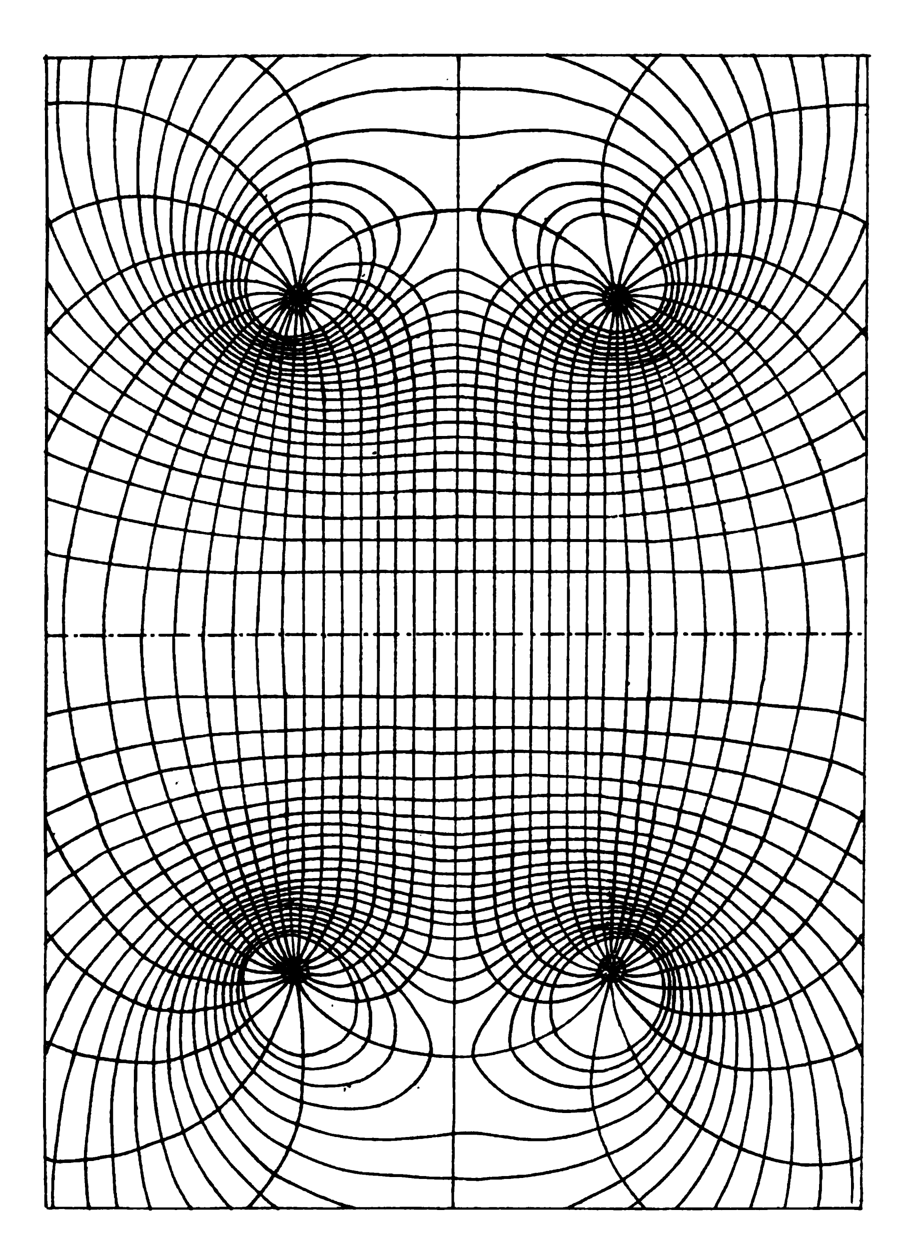
Transversal magnetisirter Cylinder Ost-West in einem gleichmässigen magnetischen Felde gelegen.



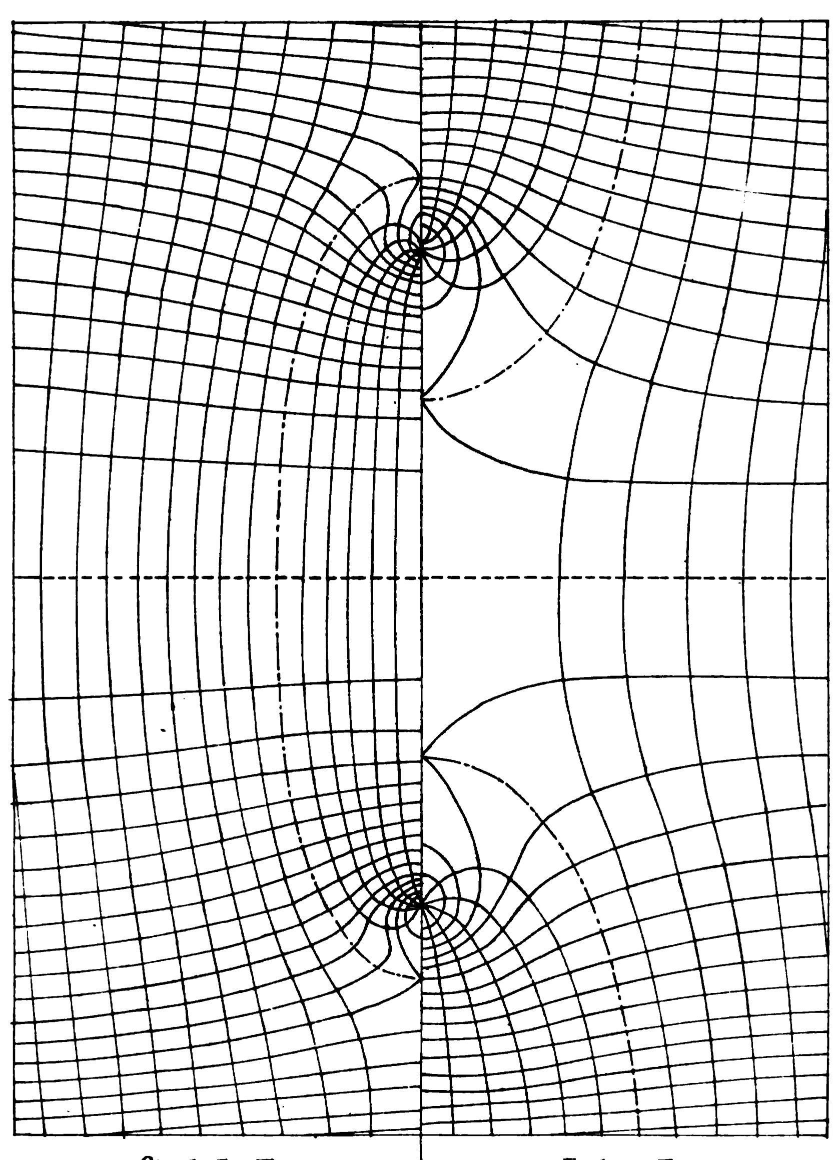
Störung eines gleichmässigen magnetischen Feldes durch einen geradlinigen Strom.



Kreisstrom.



Zwei Kreisströme.



Stabile Lage. | Labile Lage.

Kreisstrom im gleichmäſsigen magnetischen Felde.

Druck von H.S. Hermann in Berlin, SW. Beuthstr. 8.





